Math. P. 742 b

<36640771200015
<36640771200015
Bayer. Staatsbibliothek

Math. P. 742 b

# Algebra

zur

## Selbstbelehrung

mit

## Beispielen und Aufgaben,

bearbeitet

von

**Gotthelf Weber.**

Weber Algebra.

**Stuttgart.**
Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.
1869.

101 BS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

# Vorwort.

Mit ausdauernder Energie hat der Realismus in den letzten Jahrzehnten der Natur ihre Geheimnisse abzulauschen verstanden. In unermüdlichem Schaffen wusste er die Resultate seiner Forschungen technisch zu verwerthen und dem menschlichen Leben dienstbar zu machen. Dabei haben unter seiner Pflege die exacten Wissenschaften eine ausserordentliche Erweiterung und Förderung erfahren. Von Jahr zu Jahr haben sie an Bedeutung und Anerkennung gewonnen und neue Pflegestätten ins Leben gerufen, in denen man ihrem Studium alle Sorgfalt widmet. In der Gegenwart kann der Realismus als ein ebenbürdiger und gleichberechtigter Träger menschlicher Bildung dem Humanismus zuversichtlich an die Seite treten. Ist doch jetzt eine allgemeine Bildung kaum noch denkbar ohne realistische Studien und in Zukunft „sollten Humanismus und Realismus zu einem unversiegbaren Strome allgemeiner Bildung sich vereinigen". *

* In der Rede des Herrn Director Bauernfeind bei Einweihung der polytechnischen Hochschule in München.

Nun sind der Wissenschaften zwar viele, die im Bereiche des Realismus liegen, aber die Mathematik ist die „Königin" unter ihnen. Die Mathematik beherrscht sie alle sowohl nach der Kraft, die ihr als Bildungsmittel innewohnt, als nach der Macht, die sie über das practische Leben gewonnen. Unsere höhere Lehranstalten, die nicht unmittelbar für den Lebensberuf vorbereiten, sondern eine Gymnastik des jugendlichen Geistes als ihre nächste Aufgabe betrachten, stellen sie unter den Bildungsmitteln mit in erster Linie. Und auf den technischen Lehranstalten insgesammt ist in der Gegenwart ein gründliches Fachstudium ohne mathematische Grundlage geradezu eine Unmöglichkeit geworden. Selbst das Normativ über die Bildung der Lehrer unserer bayerischen Volksschule vom Jahre 1866 sah sich in richtiger Würdigung der Zeitverhältnisse gedrungen einen Theil der Elementar-Mathematik als obligaten Lehrgegenstand mit aufzunehmen.

Und doch scheinen den Opfern an Zeit, Mühe und Arbeit, welche dem Studium der Mathematik auf den verschiedenen Schulen gebracht werden, die erzielten Resultate nicht immer zu entsprechen. Worin hat das seinen Grund? Unzweifelhaft zunächst im Lehrstoffe selbst! Die Mathematik ist ein abgerundetes und geschlossenes System, wie kein zweites auf Erden. Nie sahen sich ihre Jünger gezwungen einzureissen, was die Väter gebaut hatten. Getrost durften sie auf dem wohlgefügten Fundamente weiter bauen. Sie tritt desshalb an den Schüler heran mit der Forderung ungetheilter und ununterbrochener Aufmerksamkeit. Und diese Forderung macht sie um so energischer geltend als sie ihrer

Natur nach durch und durch abstracte Wissenschaft ist, die den Scharfsinn und Verstand des Schülers in steter Selbstthätigkeit erhält. Eine unverschuldete Unterbrechung, eine schwierigere Partie lässt selbst den befähigten Schüler Lücken fühlen und unter diesem Gefühle erlahmt leicht die Spannkraft des jugendlichen Geistes, den abstractes Denken ohnehin weniger anmuthet. Der minder Befähigte dagegen wird dadurch nicht selten ganz unfähig dem laufenden Unterrichte zu folgen. Dem Lehrer bleibt bei dem umfangreichen Pensum, das jeder einzelnen Schulabtheilung zugemessen werden muss und bei der knapp zugeschnittenen Zeit in der Schule selbst kein Raum, den Zurückbleibenden besondere Sorgfalt zuzuwenden. Wer aber einmal in der Mathematik zurückgeblieben ist, hat kein Verständniss mehr für das Folgende und kommt nicht leicht mehr mit den Uebrigen fort. Die Zeit, welche er in der Schule dieser Wissenschaft noch zu widmen hat, ist für ihn vergeudet! Ein ausgezeichnetes Bildungsmittel ist für ihn verloren!

Stehen dagegen den Schülern Mittel zu Gebote durch Hausfleiss Versäumtes nachzuholen, Vergessenes aufzufrischen, nicht völlig Verstandenes wiederholt durchzuarbeiten und sich besser einzuprägen, so wird dadurch dem mathematischen Unterrichte ein wesentlicher Vorschub geleistet werden. Die verschieden befähigten Schüler könnten viel leichter dem Unterrichte in der Schule gleichmässiger folgen und wer unter ihnen einmal dieser Kraft sich bewusst geworden, den schrecken auch schwierigere Abschnitte dieser Wissenschaft nicht mehr zurück. Diese Mittel

gewähren aber keineswegs die da und dort üblichen Dictate. Denn durch die hier mit unterlaufenden Irrthümer wird dem Schüler die schwere Arbeit noch mehr erschwert und nicht selten die Sache selbst verleidet. Und doch rauben diese Dictate viel der kostbaren Zeit, die dem Unterricht entzogen wird. Soll der Unterricht in den Elementen der Mathematik einen bessern Erfolg haben, so müssen dem Schüler Lehrbücher in die Hand gegeben werden.

Mit Recht heisst es in den Erläuterungen zum Lehrplan für den mathematischen Unterricht an Gymnasien, München 1866 . . . „es erscheint als sehr wünschenswerth, dass ein Lehrbuch unter den vom königl. Ministerium genehmigten oder noch zu genehmigenden Lehrbüchern vom Lehrer ausgewählt, dem Unterrichte zu Grunde gelegt werde, da das Dictiren des ganzen Lehrstoffes nicht nur zeitraubend ist, sondern gewöhnlich dem Schüler nur ein höchst mangelhaftes Instrument zum Studium in die Hand gibt.“ Aus diesem didactischen Bedürfnisse sind auch in neuer und neuester Zeit eine Reihe von Lehrbüchern über die Elementarmathematik, namentlich im Norden, hervorgegangen. Die meisten von ihnen sind jedoch nur kurze Lehrgänge und Leitfäden für die Hand des Schülers unter Leitung des Lehrers. Diese mögen vollkommen ihren Zweck erreichen in der Geometrie, wo es sich nur um das Verständniss der Lehrsätze handelt. Anders scheint es mir dagegen in der Algebra zu sein; da ist mit der Einsicht in einen Lehrsatz nicht immer auch das Verständniss seiner Anwendung verbunden. Desshalb erfordert dieser Zweig der Mathematik an sich schon eine ausführlichere Behandlung, um so mehr

Seite

b. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten §. 165—166 . 260

Beispiele §. 167 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 264

Aufgaben §. 168 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 270

## Vierter Abschnitt.

# Progressionen und Kettenbrüche.

### I. Progressionen.

a. Arithmetische Progressionen §. 170 und 171 . . . . . . . . . 280

Beispiele und Aufgaben §. 172 . . . . . . . . . . . . . . 284

b. Geometrische Progressionen §. 173—176 . . . . . . . . . . 287

Beispiele und Aufgaben §. 177 . . . . . . . . . . . . . . 292

Anwendung der geometrischen Reihen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung.

A. Zinseszinsrechnung §. 178—181 . . . . . . . . . . 301

Beispiele zur Anwendung §. 182 . . . . . . . . . 304

B. Rentenrechnung §. 183—186 . . . . . . . . . . . 307

Beispiele zur Anwendung §. 187 . . . . . . . . . 309

Aufgaben §. 188 . . . . . . . . . . . . . . . 311

### II. Stufenbrüche.

a. Absteigende Stufenbrüche §. 190—196 . . . . . . . . . . . 318

Beispiele und Aufgaben §. 197 . . . . . . . . . . . . . . 324

b. Aufsteigende Stufenbrüche §. 198 . . . . . . . . . . . . . 328

Beispiele und Aufgaben §. 199 . . . . . . . . . . . . . . 329

Anwendung der Stufenbrüche, Beispiele und Aufgaben §. 200 . . . 332

## Fünfter Abschnitt.

# Combinationslehre, Wahrscheinlichkeitsrechnung, binomischer Lehrsatz, arithmetische Reihen höherer Ordnung.

### I. Combinationslehre.

a. Permutation §. 202 und 203 . . . . . . . . . . . . . . . 339

Beispiele und Aufgaben §. 204 . . . . . . . . . . . . . . 341

b. Combination §. 205 und 206 . . . . . . . . . . . . . . . 345

Beispiele und Aufgaben §. 207 . . . . . . . . . . . . . . 348

Seite

c. Variation §. 208 und 209 . . . . . . . . . . . . . . . 351
Beispiele und Aufgaben §. 210 . . . . . . . . . . . . . . 354

II. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

a. Einfache Wahrscheinlichkeit §. 212 . . . . . . . . . . . . 357
Beispiele §. 213 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 358
b. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit §. 214 . . . . . . . . . 360
Beispiele §. 215 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 361
Aufgaben §. 216 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 362

III. Binomialtheorem.

Lehrsätze §. 217 und 218 . . . . . . . . . . . . . . . 365
Beispiele und Aufgaben §. 219 . . . . . . . . . . . . . 372

IV. Arithmetische Reihen höherer Grade.

Lehrsätze §. 220—222 . . . . . . . . . . . . . . . . 375
Beispiele nnd Aufgaben §. 223 . . . . . . . . . . . . . 381

## Sechster Abschnitt.

## Höhere Gleichungen.

Allgemeine Sätze §. 224—232 . . . . . . . . . . . 386

I. Gleichungen mit einer Unbekannten.

a. Cubische Gleichungen §. 233 . . . . . . . . . . . 396
I. Auflösung durch Factorenzerlegung des Absolutgliedes §. 234 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 397
Beispiele §. 235 . . . . . . . . . . . . . . . . 398
II. Auflösung durch die cardanische Formel §. 236 . . . 401
Beispiele §. 237 . . . . . . . . . . . . . . . . 403
III. Auflösung durch trigonometrische Functionen §. 238—244 . 406
IV. Auflösung durch Näherungswerthe:
A. Newton'sche Methode §. 246 . . . . . . . . . . 414
Beispiele §. 247 . . . . . . . . . . . . . . 414
B. Lagrange'sche Methode §. 248 . . . . . . . . . 417
Beispiele §. 249 und 250 . . . . . . . . . . 417
Aufgaben §. 251 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 419
b. Biquadratische Gleichungen §. 252 . . . . . . . . . 421

Seite

I. Auflösung durch Factorenzerlegung des Absolutgliedes §. 254 . . . . . 423
Beispiele §. 255 . . . . . 423
II. Auflösung nach Ampère §. 256 . . . . . 425
Beispiele §. 257 . . . . . 427
III. Auflösung nach Euler §. 258 . . . . . 428
Beispiele §. 259 . . . . . 430
IV. Auflösung nach Luigi di Ferrara §. 260 . . . . . 432
V. Auflösung durch Näherungswerthe:
A. Newton'sche Methode §. 262 . . . . . 435
B. Lagrange'sche Methode §. 263 . . . . . 435
VI. Auflösung reciproker Gleichungen und durch reciproke §. 264 bis 269 . . . . . 437
Beispiele §. 270 . . . . . 442
Aufgaben §. 271 . . . . . 446

## II. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

I. Auflösung durch Substitution §. 273 . . . . . 448
Beispiele §. 274 . . . . . 449
II. Auflösung nach Euler §. 275 . . . . . 450
Beispiele §. 276 . . . . . 451
III. Auflösung mittelst gemeinschaftlichen Theilers §. 277 . . . 452
Beispiele §. 279 . . . . . 454
IV. Auflösung durch Näherungswerthe §. 280 . . . . . 456
Beispiel §. 281 . . . . . 458
Aufgaben §. 282 . . . . . 458
Anwendung §. 283 . . . . . 460

# Einleitung.

I.

Alle Dinge, die sind, sind in Raum und Zeit.

Alle Dinge, die in Raum und Zeit sind, sind einer Vermehrung und Verminderung fähig.

Jedes Ding, das vermehrungs- und verminderungsfähig ist, besteht aus gleichartigen Stücken oder Theilen.

Jedes vermehrungs- und verminderungsfähige Ding, sowie jedes vermehrte und verminderte Ding heisst Grösse.

II.

Diejenige Wissenschaft, welche sich mit den Grössen (quanta) beschäftigt, heisst **Mathematik** (*μάθησις, μαθηματικὴ* sc. *ἐπιστήμη*).

Was die Mathematik an den Grössen zum Gegenstand ihrer Untersuchung macht, das ist die Eigenschaft der Grösse (quantitas).

Weil die Mathematik an den Grössen die Grösse untersucht und ihre gegenseitigen Beziehungen nach dieser Eigenschaft ins Auge fasst, heisst sie auch Grössenlehre.

Diese Untersuchungen gründet sie auf Grundsätze oder Axiome, deren Wahrheit unerschütterlich feststeht.

Solche Axiome sind:

1. Gleiches lässt sich für Gleiches setzen.
2. Zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.
3. Das Ganze ist grösser als sein Theil.

4. *Das Ganze ist grösser als mehrere seiner Theile.*

5. *Das Ganze ist so gross als alle seine Theile.*

Alle Resultate, die sich der Mathematik aus diesen Untersuchungen ergeben, stellt sie als *Lehren* hin.

III.

Je nach dem *Gebiete*, dem die Grössen entnommen sind, welche die Mathematik untersucht, gliedert sie sich in **reine** und **angewandte** Mathematik.

Die *angewandte* Mathematik untersucht die Grössen, wie sie die *Natur* und das *Leben* darbietet: *physische* und *technische* Mathematik.

Die *reine* Mathematik dagegen hat es bei ihren Untersuchungen blos mit den Erzeugnissen des menschlichen Geistes zu thun; ihr Gegenstand sind *Begriffe, abstracte Grössen.*

Die abstracten Grössen theilt man in *Raumgrössen* und *Zahlengrössen.*

Unter *Raumgrössen* sind solche Grössen zu begreifen, deren einzelne Theile einen *stetigen* oder *continuirlichen* Zusammenhang haben, so dass das gedachte Ende des einen Theiles immer zugleich der Anfang des andern Theiles ist. Die Wissenschaft, welche die Raumgrössen behandelt, heisst **Geometrie.**

Unter *Zahlengrössen* begreift man solche Grössen, deren einzelne Theile eine *unzusammenhängende*, eine *discrete* Existenz haben und die desshalb in beliebige Verbindung gebracht werden können. Die Wissenschaft von den Zahlengrössen heisst **Arithmetik.**

Die *Arithmetik* theilt sich in *gemeine* und *allgemeine.* Die gemeine Arithmetik bedient sich bei ihren Operationen der *Zahlen*, die *allgemeine* dagegen der *Buchstaben*, um *allgemein giltige Gesetze* aufzustellen und zu erweisen.

Die allgemeine Arithmetik zerfällt in **Algebra** * und *Analysis* (Differential- und Integralrechnung).

Die Einkleidung eines arithmetischen Gesetzes in mathematische Sprache heisst *Formel.*

---

* Der Name Algebra wird abgeleitet vom arabischen Worte جبر quo significatur „conjunctio plurium partium separatarum, ut ex his unum fiat, apud Math. reductio partium ad totum seu fractionum ad integritatem.“

Die Zeichen, deren man sich bei arithmetischen Operationen zu bedienen hat, sind:

1. Operationszeichen:

   $a + b$ sprich a plus b,

   $a - b$ sprich a minus b,

   $a \times b$ oder $a . b$ sprich a mal b,

   $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ sprich a dividirt durch b;

2. Beziehungszeichen:

   $a = b$ sprich a gleich b,

   $a > b$ sprich a grösser als b,

   $a < b$ sprich a kleiner als b;

3. Grössenzeichen, welcher bei den einzelnen Abschnitten gedacht wird.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

# Erster Abschnitt.

# Die vier Grundoperationen.

---

## I. Addition und Subtraction.

### a. Summen und Differenzen aus absoluten Zahlen.

§. 1.

**Erklärung 1.** Zwei oder mehrere Zahlen addiren, heisst eine neue Zahl setzen, die so viele Einheiten enthält als die gegebenen Zahlen zusammen haben.

Die Addition lehrt demnach die Vereinigung der Einheiten zweier oder mehrerer Zahlen zu einer andern Zahl von gleichviel Einheiten.

Die zur Addition gegebenen Zahlen heissen Summanden und die gesuchte Zahl heisst Summa.

**Erklärung 2.** Es seien die Summanden a und b, so ist:

$$(a + b)$$

der allgemeine Ausdruck einer Summa. Durch Hinzufügung der Einheiten des b zu denen des a bekommen wir eine neue Zahl. Diese Zahl sei s, so ist

$$(a + b) = s$$

Die Zahl s heisst die wirkliche oder entwickelte und der Ausdruck $(a + b)$ die formelle Summa.

**Erklärung 3.** Um einen Ausdruck für sich als ein Ganzes darzustellen, bedient man sich der Klammern. Die in Klammern stehenden

Zahlen haben unter sich eine nähere Verbindung als mit andern Zahlen, ausserhalb der Klammern. Die Klammern zeigen also an, in welcher Ordnung die angedeuteten Operationen auszuführen sind. Zusammengehörige Klammern-Paare sind durch die Schreibweise äusserlich zu kennzeichnen.

§. 2.

**Lehrsatz.** In einer Summa kann man die Summanden beliebig vertauschen:

$$(a + b) = (b + a).$$

**Beweis.**

Dieser ergibt sich aus Erklärung 1, denn wenn eine Summa nur aus den Einheiten der Summanden besteht, so kann es gleich sein, von welchem Summanden die Einheiten zuerst gesetzt werden.

§. 3.

**Erklärung 1.** Eine Summa kann aus mehreren Summanden bestehen:

$$[(a + b) + c]$$
$$[((a + b) + c) + d]$$

**Erklärung 2.** Eine Summa mit zwei Summanden heisst man einen zweigliederigen Ausdruck oder Binomium; hat sie drei und mehr Summanden, dann heisst sie ein mehrgliederiger Ausdruck oder Polynomium. Die einzelnen Summanden heissen Glieder.

§. 4.

**Lehrsatz.** Eine Zahl wird zu einer Summa addirt, wenn man sie zu einem beliebigen Summanden addirt:

$$[(a + b) + c] = [a + (b + c)] = [(a + c) + b].$$

**Beweis.**

Die Summanden a und b werden durch die Addition zu einer Zahl (a + b) vereinigt, die als ein Summand zu betrachten und zu c zu addiren ist (§. 1). Würde man zu a blos b Einheiten addiren, so hätte man offenbar c Einheiten zu wenig genommen, weil man nicht b, sondern b und c oder c und b (§. 2) Einheiten zu a Einheiten addiren soll.

**Zusatz 1.** Eine Summa wird zu einer Zahl addirt, wenn man jeden Summanden in beliebiger Ordnung addirt:

$$[a + (b + c)] = [(a + b) + c] = [(a + c) + b].$$

**Zusatz 2.** Die Ordnung der Summanden ist gleichgiltig.

## §. 5.

**Grundsatz 1.** Jede Grösse ist sich selbst gleich.

$$a = a.$$

**Grundsatz 2.** Gleiches zu Gleichem addirt, gibt Gleiches:

Es ist: $(a + b) = s$

und $c = c$

folglich auch: $[(a + b) + c] = (s + c).$

## §. 6.

**Erklärung 1.** Kommt eine Grösse mehrmals als Summand vor, so setzt man sie nur einmal, aber mit einem Factor, der angibt, wie oft die Grösse als Summand vorkommt. Dieser Factor heisst Coëfficient. Z. B.

$$[(a + a + a) + b] = (3a + b).$$

Die Zahl 3 ist der Coëfficient von a. Der Coëfficient 1 wird nicht geschrieben; man schreibt b statt 1 b.

**Erklärung 2.** Wird eine angedeutete Operation ausgeführt, so löst sich die Klammer.

**Erklärung 3.** Summanden müssen dieselbe Benennung haben und diese hat dann auch die Summe.

**Erklärung 4.** Summanden mit Coëfficienten werden addirt, wenn man ihre Coëfficienten addirt.

## §. 7.

**Beispiele.**

1. $[(a + 2a) + b] = (3a + b).$
2. $[(5a + 3a + a) + (3b + b) + c) = [(9a + 4b) + c].$
3. $(7b + c + 3b + 2d + 2c) = [(10b + 3c) + 2d].$

Anmerkung. Die Aufeinanderfolge der Grössen ist alphabetisch zu ordnen.

## §. 8.

**Erklärung 1.** Zwei oder mehrere Zahlen subtrahiren, heisst aus dem Verhältniss einer gegebenen Summa zu dem einen gegebenen Summanden den andern bestimmen.

Die Subtraction lehrt demnach die Einheiten bestimmen, um die eine Zahl grösser ist als eine andere.

Die gegebene Summa, welche durch Subtrahiren des einen gleichfalls gegebenen Summanden vermindert werden soll, heisst Minuend, der gegebene Summand heisst Subtrahend und der gesuchte Summand heisst Differenz oder Rest.

**Erklärung 2.** Es sei a der Minuend und b der Subtrahend, so ist

$$(a - b)$$

der allgemeine Ausdruck einer Differenz. Diese Differenz kann ebenfalls als eine Zahl betrachtet werden, die wir mit d bezeichnen, so ist

$$1.\ (a - b) = d.$$

(a — b) heisst die formelle und d die entwickelte oder wirkliche Differenz.

**Erklärung 3.** Wenn $(a - b) = d$ ist, so ist auch, gestützt auf vorstehende Erklärungen,

$$2.\ (b + d) = a.$$

Denn setzen wir in die Gleichung (1) aus der Gleichung (2) den Werth von a, so ist

$$(d + b) - b = d,$$

und setzen wir in die Gleichung (2) aus der ersten Gleichung den Werth von d, so ist

$$(a - b) + b = a.$$

Anmerkung. Darauf gründen sich die zwei Hauptsätze der Summen und Differenzen.

## §. 9.

**1. Satz.** Zu einer Differenz den Subtrahenden addirt, gibt den Minuenden:

$$(a - b) + b = a.$$

**Beweis.**

Die Differenz (a — b) ist um b Einheiten $<$ a, addirt man diese Einheiten zur Differenz (a — b) hinzu, so gibt es a.

Anmerkung. Aus diesem Satze ergibt sich die Definition für die Subtraction.

**2. Satz.** Von einer Summa den einen Summanden abgezogen, gibt den andern:

$$(a + b) - b = a.$$

**Beweis.**

Die Summa $(a + b) >$ a um b Einheiten. Zieht man diese von ihr ab, so gibt es a.

**Zusatz.** Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie zugleich um ein und dieselbe Zahl vermehrt und vermindert.

Anmerkung. Addition und Subtraction heben sich gegenseitig auf und sind darum entgegengesetzte Operationen.

## §. 10.

**Grundsatz.** Gleiches von Gleichem subtrahirt, gibt Gleiches.

$$(a - b) = d,$$

und da $c = c$, so ist

$$(a - b) - c = (d - c).$$

## §. 11.

**Erklärung 1.** Minuend, Subtrahend und Differenz müssen gleichnamig sein.

**Erklärung 2.** Haben Minuend und Subtrahend Coëfficienten, so werden diese subtrahirt, z. B.

1. $(5a - 4a) = a$, 2. $(7b - 3b) = 4b$.

3. $(8a - a) + (3b - 2b) + 4c = 7a + b + 4c$.

## §. 12.

**Lehrsatz.** Eine Zahl wird von einer Summa subtrahirt, wenn man sie von dem einen Summanden subtrahirt:

$$[(a + b) - c] = [a + (b - c)] = [(a - c) + b].$$

**Beweis.**

Nehmen wir den ersten und den letzten Ausdruck und addiren zu beiden c, so ist

$$[(a + b) - c] + c = a + b \quad \text{cf. §. 9.}$$

und

$$[(a - c) + b] + c = [(a - c) + c] + b. \quad \text{cf. §. 4.}$$

statt $(a - c) + c$ können wir a setzen, demnach ist auch

$$[(a - c) + b] + c = a + b.$$

Nach dem Grundsatz: zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich, ist:

$$[(a + b) - c] + c = [(a - c) + b] + c,$$

subtrahiren wir auf beiden Seiten c, so ist

$$[(a + b) - c] + c - c = [(a - c) + b] + c - c$$

oder:

$$(a + b) - c = (a - c) + b.$$

**Zusatz.** Eine Zahl wird zu einer Differenz addirt, wenn man sie zum Minuenden addirt oder vom Subtrahenden subtrahirt.

$$(a - c) + b = a - (c - b) = (a + b) - c.$$

Beweis ergibt sich aus dem des Lehrsatzes.

## §. 13.

**Lehrsatz.** Eine Summa wird von einer Zahl subtrahirt, wenn man jeden Summanden in beliebiger Ordnung subtrahirt:

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b.$$

**Beweis.**

Addiren wir $(b + c)$, so ist

$$a - (b + c) + (b + c) = a$$

und

$$[(a - c) - b] + (b + c) = [[(a - c) - b] + b] + c = (a - c) + c = a;$$

folglich

$$[[a - (b + c)] + (b + c)] = [(a - c) - b] + (b + c).$$

Subtrahiren wir auf beiden Seiten $(b + c)$, so ist

$$a - (b + c) = (a - c) - b.$$

**Zusatz 1.** Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahirt, wenn man die Zahl vom Minuenden subtrahirt oder zum Subtrahenden addirt.

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c).$$

Beweis ergibt sich aus dem des Lehrsatzes.

**Zusatz 2.** Sollen von einer Zahl mehrere Zahlen theils subtrahirt, theils zu ihr addirt werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Ordnung dies geschieht.

## §. 14.

**Lehrsatz.** Eine Differenz wird von einer Zahl subtrahirt, wenn man in beliebiger Ordnung den Minuenden subtrahirt und den Subtrahenden addirt:

$$a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b.$$

**Beweis.**

Addiren wir $(b - c)$, so ist

$$a - (b - c) + (b - c) = a$$

und

$$[(a-b)+c]+(b-c)=[[(a-b)+c]-c]+b=(a-b)+b=a;$$

folglich

$$a-(b-c)+(b-c)=[(a-b)+c]+(b-c).$$

Subtrahiren wir auf beiden Seiten $(b-c)$, so ist

$$a-(b-c)=(a-b)+c.$$

**Zusatz.** Zu einer Differenz wird eine Zahl addirt, wenn man sie zum Minuenden addirt oder vom Subtrahenden abzieht:

$$(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c).$$

Beweis ist aus dem des Lehrsatzes zu entnehmen.

Anmerkung. Aus den vorhergehenden §§. ist ersichtlich, dass man die Klammern, vor welchen das Additionszeichen (+) steht, ohne Weiteres weglassen kann; steht aber das Subtractionszeichen vor den Klammern, so hat man die Operationszeichen innerhalb der aufzulösenden Klammern erst in ihr Gegentheil zu verwandeln.

## §. 15.

**Lehrsatz.** Eine Differenz bleibt unverändert, wenn man zum Minuenden und Subtrahenden Gleiches addirt oder subtrahirt:

$$1.\ (a-b)=(a+m)-(b+m).$$

$$2.\ (a-b)=(a-m)-(b-m).$$

### Erster Beweis.

$$(a+m)-(b+m)=$$
$$a+[m-(b+m)]=a+[(m-b)-m]=$$
$$a+[(m-m)-b)=(a-b).\quad \text{cf. §§. 13, 9.}$$

### Zweiter Beweis.

$$(a-m)-(b-m)=[(a-m)-b]-m=$$
$$[(a-b)+m]-m=(a-b).\quad \text{cf. §§. 13, 14, 9.}$$

## §. 16.

**Lehrsatz.** Zwei Differenzen werden addirt, wenn man die Summa ihrer Subtrahenden von der Summa ihrer Minuenden subtrahirt:

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d).$$

### Beweis.

Wir betrachten $(a-b)$ als eine Zahl und $(c-d)$ als eine Differenz, so ist

$[(a - b) + c] - d$; cf. §. 12, Zusatz.

und

$(a - b) + c = (a + c) - b$; cf. §. 12.

folglich

$[(a - b) + c] - d = [(a + c) - b] - d =$

$(a + c) - (b + d)$ cf. §. 13.

**Zusatz.** Alle zwischen Summen und Differrenzen noch möglichen Verbindungen lassen sich auf die bisher aufgestellten Sätze zurückführen.

### §. 17.

**Beispiele zur Einübung der vorstehenden Lehrsätze.**

1. $(8ab + 4ab) - 6ab = 12ab - 6ab = 6ab$
   $8ab + (4ab - 6ab) = 8ab - 2ab = 6ab$
   $(8ab - 6ab) + 4ab = 2ab + 4ab = 6ab$ } cf. §. 12.

2. $7bc - (3bc + 2bc) = 7bc - 5bc = 2bc$
   $(7bc - 3bc) - 2bc = 4bc - 2bc = 2bc$
   $(7bc - 2bc) - 3bc = 5bc - 3bc = 2bc$ } cf. §. 13.

3. $25cd - (19cd - cd) = 25cd - 18cd = 7cd$
   $(25cd - 19cd) + cd = 6cd + cd = 7cd$
   $(25cd + cd) - 19cd = 26cd - 19cd = 7cd$ } cf. §. 14.

4. $19abc - 16abc = 3abc$ cf. §. 15, 1.
   $(19abc + 10abc) - (16abc + 10abc) = 29abc - 26abc = 3abc.$

5. $17bcd - 13bcd = 4bcd$ cf. §. 15, 2.
   $(17bcd - 9bcd) - (13bcd - 9bcd) = 8bcd - 4bcd = 4bcd.$

6. $(9mn - 4mn) + (3mn - mn) = 5mn + 2mn = 7mn$ cf. §. 16.
   $(9mn + 3mn) - (4mn + mn) = 12mn - 5mn = 7mn.$

7. $15abd + (4cf + 9ch) = 15abd + 4cf + 9ch.$

8. $4mn + (3pr - c) = 4mn + 3pr - c.$

9. $11cd - (7m + n) = 11cd - 7m - n.$

10. $ab - [(bd - ac) - d] = ab - bd + ac + d.$

## b. Algebraische Zahlen und algebraische Summen.

### §. 18.

**Erklärung.** In allen über Differenzen bisher aufgestellten Sätzen wurde keine Rücksicht genommen auf das Verhältniss des Minuenden zum Subtrahenden. Es wurde vorausgesetzt, dass der Minuend

grösser ist als der Subtrahend. Der Minuend kann aber nicht blos grösser, er kann auch ebensogross und noch kleiner sein als der Subtrahend. Das gibt drei von einander wohl zu unterscheidende Fälle.

## §. 19.

**Erklärung.** Ist der Minuend grösser als der Subtrahend, so gibt er eine dritte Zahl (entwickelte Differenz), die zum Subtrahenden addirt, den Minuenden gibt.

**1. Lehrsatz.** Gleiches zu Grösserem addirt, gibt Grösseres.

Es ist $a > b$, so ist:

$$a + c > b + c.$$

**Beweis.**

Wenn $a > b$, so ist $a - b = d$ und

$$a = b + d. \quad \text{cf. §. 8.}$$

Addiren wir auf beiden Seiten c, so ist

$$a + c = b + c + d.$$

Da ist offenbar

$$a + c > b + c$$

und zwar um d.

**Zusatz.** Grösseres zu Grösserem addirt, gibt Grösseres.

Es ist $a > b$ und $c > d$, so ist

$$a + c > b + d.$$

**2. Lehrsatz.** Gleiches von Grösserem subtrahirt, bleibt Grösseres.

Es ist $a > b$, so ist

$$a - c > b - c.$$

**Beweis.**

Wenn $a > b$, so ist $a - b = d$ und

$$a = b + d.$$

Subtrahiren wir auf beiden Seiten c, so ist

$$a - c = (b - c) + d; \quad \text{cf. §. 12,}$$

Lehrsatz, folglich

$$a - c > b - c,$$

und zwar um d.

**3. Lehrsatz.** Grösseres von Gleichem subtrahirt, bleibt Kleineres.

Es ist $c = c$ und $a > b$, so ist

$$c - a < c - b.$$

**Beweis.**

Wenn $a > b$, so ist

$$a = b + d,$$

und

$$c = c.$$

Ziehen wir von der letzten Gleichung die erste ab, so ist

$$c - a = c - (b + d),$$

bei Auflösung der Klammer:

$$c - a = c - b - d,$$

folglich ist

$$c - a < c - b,$$

und zwar um d, weil dieses noch von $(c - b)$ abgezogen werden muss, um $c - a =$ zu werden.

**Zusatz.** Kleineres von Grösserem subtrahirt, gibt Grösseres.

Es ist $a > b$ und $m < n$, so ist

$$a - m > b - n.$$

**Beweis.**

Wenn $a > b$, so ist

$$a - m > b - m. \quad \text{cf. §. 19, 2.}$$

Wenn $m < n$, so ist

$$b - m > b - n. \quad \text{cf. §. 19, 3.}$$

Da aber $a - m > b - m > b - n$, so ist

$$a - m > b - n.$$

## §. 20.

**Lehrsatz.** Ist der Minuend dem Subtrahenden gleich, so ist die Differenz gleich Null:

$$a - a = 0.$$

**Beweis.**

Addiren wir a zu $(a - a)$, so ist

$$(a - a) + a = a. \quad \text{cf. §. 9, 1.}$$

**Zusatz.** Alle Differenzen mit dem Reste Null sind einander gleich.

Es ist

$$a - a = 0; \; b - b = 0; \; c - c = 0,$$

folglich

$$a - a = b - b = c - c.$$

## §. 21.

**Lehrsatz.** Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man Null addirt oder subtrahirt:

$$a + 0 = a \text{ und } a - 0 = a.$$

**Beweis.**

Substituiren wir für 0 die Differenz $b - b$, so ist

1. $a + (b - b) = (a + b) - b = a$ cf. §. 9, 2.
2. $a - (b - b) = (a - b) + b = a$ cf. §. 9. 1.

**Zusatz.** Ist in einer Summa mit zwei Gliedern der eine Summand Null, so ist der andere eine positive Zahl:

$$(a + 0) = + a.$$

## §. 22.

**Lehrsatz.** Ist der Minuend kleiner als der Subtrahend, so ist die Differenz eine negative Zahl.

Es ist $a < b$, so ist

$$(a - b) = - d.$$

**Beweis.**

Wenn $a < b$, so zerfällt b in zwei Zahlen, deren eine $= a$, deren andere $= d$ ist, darum ist

$$a - b = a - (a + d)$$

$$a - (a + d) = (a - a) - d. \quad \text{cf. §. 13.}$$

$$(a - a) - d = 0 - d. \quad \text{cf. §. 20.}$$

$$0 - d = - d. \quad \text{cf. §. 21.}$$

**Zusatz.** Differenzen mit dem Minuend Null sind negative Ausdrücke.

Anmerkung. Positive Zahlen sind grösser als Null und negative Zahlen sind kleiner als Null, z. B.

$$6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6.$$

## §. 23.

**Erklärung 1.** Negative Ausdrücke werden mit dem Subtractionszeichen (—) geschrieben und heissen subtractiv, positive Ausdrücke werden mit dem Additionszeichen (+) angeschrieben und heissen additiv. Additive und subtractive Ausdrücke heissen algebraische Zahlen zur Unterscheidung von den absoluten Zahlen, die ohne

Vorzeichen stehen. Steht vor diesen plus oder minus, so deutet es blos die mit ihnen vorzunehmenden Operationen an.

**Erklärung 2.** Werden positive und negative Zahlen mit einander verbunden, so müssen sie mit ihren Vorzeichen eingeklammert werden; denn jeder positive Ausdruck kann nicht blos eine additive, sondern auch eine subtractive Beziehung haben und jeder negative Ausdruck kann nicht blos eine negative, sondern auch eine additive Beziehung haben, je nach ihrer Verbindung mit andern algebraischen Ausdrücken. In Zeichen:

$(+a)$ kann verbunden werden $+(+a)$ und $-(+a)$.
$(-a)$ „ „ „ $+(-a)$ „ $-(-a)$.

NB. Wenn der Anfänger das algebraische Zeichen vom Operationszeichen nicht genau unterscheidet, erwachsen ihm manche Schwierigkeiten im Zeichensetzen, die er vermeiden könnte.

## §. 24.

**Lehrsatz 1.** Algebraische Zahlen mit gleichem Vorzeichen werden addirt, wenn man der Summa ihrer absoluten Werthe das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt.

I. $(+a)+(+b)=+(a+b)$.
II. $(-a)+(-b)=-(a+b)$.

**Beweise.**

I. Es ist

$(+a)=(0+a)$ und cf. §. 21.
$(+a)+(+b)=(0+a)+(+b)=0+(a+b)$. cf. §. 4.
$0+(a+b)=+(a+b)$. cf. §. 21 Zusatz.

II. Es ist

$(-a)=(0-a)$ und $(-b)=(0-b)$. cf. §. 22.
$(0-a)+(0-b)=(0+0)-(a+b)$. cf. §. 16.
$(0+0)-(a+b)=-(a+b)$.

**Lehrsatz 2.** Algebraische Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden addirt, wenn man der Differenz ihrer absoluten Werthe das Vorzeichen der grösseren gibt.

I. $(+a)+(-b)=+(a-b)=-(b-a)$.
II. $(-a)+(+b)=-(a-b)=+(b-a)$.

### Beweise.

I. $(+a)+(0-b)=a+(0-b)=(a-b)+0$. cf. §. 12, Zusatz.

$(a-b)+0 \quad =0+(a-b)$; wenn $a>b$, so ist

$0+(a-b) \quad =+(a-b)$; wenn $b>a$, so ist

$0-(b-a) \quad =-(b-a)$.

II. $(0-a)+(+b)=0-(a-b)=-(a-b)$ cond. $a>b$.

$(0-a)+(+b)=(0+b)-a=0+(b-a)=+(b-a)$ cond. $b>a$.

## §. 25.

**Lehrsatz.** Algebraische Zahlen werden subtrahirt, wenn man den Subtrahenden mit verändertem Vorzeichen zum Minuenden addirt.

I. $(+a)-(-b)=(+a)+(+b)=+(a+b)$. cf. §. 24, 1; I.

II. $(-a)-(+b)=(-a)+(-b)=-(a+b)$. cf. §. 24, 1; II.

III. $(+a)-(+b)=(+a)+(-b)=+(a-b)$ oder $-(b-a)$ cf. 24, 2; I.

IV. $(-a)-(-b)=(-a)+(+b)=-(a-b)$ oder $+(b-a)$ cf. 24, 2; II.

### Beweise.

I. $(+a)-(-b)=(+a)-(0-b)=[(+a)+b]-0$. cf. §. 13.

$[(+a)+b]-0=+(a+b)$. cf. §. 21.

II. $(-a)-(+b)=[(0-a)-b]=[(-a)+0]-b$. cf. §. 21.

$[(-a)+0]-b=(-a)+(0-b)=$ cf. §. 12.

$(-a)+(-b)=-(a+b)$.

III. $(+a)-(+b)=(+a)-(0+b)=[(+a)-b]-0=$

$(0+a)-b=+(a-b)$ oder $-(b-a)$.

IV. $(-a)-(-b)=(-a)-(0-b)=[(-a)+b]-0$

$[(-a)+b]-0=(-a)+(+b)=-(a-b)$ oder $+(b-a)$.

## §. 26.

**Erklärung.** Aus den vorangehenden Lehrsätzen (§. 24 und §. 25) ist ersichtlich, dass es einerlei ist, ob man zu einer positiven Zahl eine negative addirt oder eine positive subtrahirt und umgekehrt. Negative und positive Ausdrücke sind entgegengesetzte Grössen. Zur Veranschaulichung der entgegengesetzten Grössen dienen Einnahmen und Ausgaben, Gewinn und Verlust, Vermögen und Schulden.

## §. 27.

### Beispiele.

I.

1. $(+14a)+(+6a)=+20a$.
2. $(+14a)-(-6a)=(+14a)+(+6a)=+20a$.

II.

3. $(-11ab)+(-7ab)=-18ab$.
4. $(-11ab)-(+7ab)=-11ab+(-7ab)=-18ab$.

III.

5. $(+12bc)+(-7bc)=+5bc$.
6. $(+7bc)+(-12bc)=-5bc$.
7. $(+12bc)-(+7bc)=+12bc+(-7bc)=+5bc$.
8. $(+7bc)-(+12bc)=+7bc+(-12bc)=-5bc$.

IV.

9. $(-8cd)+(+5cd)=-3cd$.
10. $(-5cd)+(+8cd)=+3cd$.
11. $(-8cd)-(-5cd)=(-8cd)+(+5cd)=-3cd$.
12. $(-5cd)-(-8cd)=(-5cd)+(+8cd)=+3cd$.

Anmerkung. Am Anfang, innerhalb einer Klammer und nach dem Gleicheitszeichen lässt man der Kürze wegen das positive Zeichen weg. Das negative dagegen darf man nie weglassen. Z. B. statt $(+14a)+(+6a)=+20a$ schreibt man einfacher:

$$14a+6a=20a.$$

## §. 28.

**Erklärung 1.** Eine Verbindung von positiven Ausdrücken in additiver und subtractiver Beziehung heisst eine algebraische Summa oder Aggregat; die einzelnen Ausdrücke heissen Glieder. Besteht ein Glied wieder aus einer algebraischen Summa, so heisst es ein zusammengesetztes und ist in Klammern anzuschreiben.

**Erklärung 2.** Die in einem mehrgliedrigen Ausdrucke vorkommenden Klammern bedürfen ganz besonderer Beachtung. Gestützt auf die Lehrsätze in §. 13 und 14 ergeben sich folgende Regeln:

I. Klammern, vor denen plus (+) steht, lässt man weg und der Werth des Ausdruckes wird dadurch nicht verändert.

Will man nach plus (+) eine Klammer setzen, so bleiben die Zeichen (+) und (—) innerhalb der gesetzten Klammern unverändert.

II. Klammern, vor denen ein minus (—) steht, kann man nur weglassen, wenn man bei allen Ausdrücken, die sie umschliessen + in — und — in + verwandelt. Auf diese Weise kann man bei Zahlenverbindungen additiver und subtractiver Ausdrücke alle Klammern vermeiden.

Will man nach minus (—) eine Klammer setzen so müssen die Zeichen innerhalb der gesetzten Klammern in ihr Gegentheil umgeändert werden: + in — und — in +.

III. Sind in einem Ausdrucke Klammern von Klammern umschlossen, so ist's am besten, zuerst die innersten Klammernpaare aufzulösen.

## §. 29.

**Erklärung.** Die für Summen und Differenzen aufgestellten Lehrsätze gelten auch für die algebraischen Summen.

**Lehrsatz.** Jede algebraische Summa lässt sich als Differenz zweier Summen darstellen:

$$(+a) - (-b - c) + (d - e) - (f - g) + (-h - m) =$$
$$a + (b + c) + (d - e) + (g - f) + (-h) + (-m) =$$
$$(a + b + c + d + g) - (e + f + h + m).$$

Der

**Beweis**

für die Richtigkeit dieser Entwicklung ergibt sich aus den vorhergehenden Lehrsätzen von selbst.

**Zusatz.** Sollen algebraische Summen addirt oder subtrahirt werden, so sind sie auf Differenzen zu reduziren.

**Erklärung.** Da die Reduktionen oft Weitläufigkeiten haben, so kann man auch nach folgenden Regeln verfahren:

I. Algebraische Summen werden addirt, wenn man die gleichnamigen Grössen unter einander schreibt und nach §. 24 verfährt.

II. Algebraische Summen werden subtrahirt, wenn man die Zeichen des Subtrahenden umkehrt und die gleichnamigen Glieder des Minuenden und Subtrahenden addirt.

III. Positive und negative gleichnamige Grössen heben sich gegenseitig auf, wenn sie gleich gross sind, sind sie ungleich gross, so hebt die kleinere in der grösseren so viele Einheiten auf als sie selbst hat. Z. B.

$$+3a - 3a = 0 \text{ und } +5ab - 7ab = -2ab.$$

## §. 30.

**Schlussbemerkung.** Addition und Subtraction sind direkte und indirekte Zahlenverbindungen der ersten Stufe.

## §. 31.

### Beispiele und Aufgaben.

1.
$$\begin{array}{rrr} 12a & +\ 6b & +\ 4c \\ 10a & +\ 12b & +\ 4c \\ \hline 22a & +\ 18b & +\ 8c. \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rrrr} 5ab & +\ 8bd & +\ 9def & +\ 6 \\ 4ab & +\ 2bd & +\ 4def & +\ 4 \\ \hline 9ab & +\ 10bd & +\ 13def & +\ 10. \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rrrrr} 16ac & +\ 7bd & +\ 4eg & & \\ 17ac & & +\ 2eg & +\ ah & \\ 5ac & +\ bd & & +\ 2ah & +\ 16h \\ \hline 38ac & +\ 8bd & +\ 6eg & +\ 3ah & +\ 16h. \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{rrrrr} 116abc & +\ 9abe & +\ h & +\ f & \\ -\ 116abc & -\ 7abe & +\ 6h & +\ 2f & +\ m \\ \hline & 2abe & +\ 7h & +\ 3f & +\ m. \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rrrrr} 6a & +\ 4b & -\ 7c & +\ 2d & -\ 4ef \\ 9a & +\ b & -\ 8c & -\ 4d & -\ 3ef \\ -\ a & +\ 10b & +\ 14c & +\ 6d & -\ 5ef \\ -\ 16a & -\ b & -\ 3c & -\ 4d & -\ ef \\ \hline -\ 2a & +\ 14b & -\ 4c & & -\ 13ef. \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rrrrr} 10ab & +\ 6cd & +\ 4 & +\ e & \\ 5ab & -\ 6cd & & -\ 2e & \\ -\ 9ab & +\ cd & -\ 1 & +\ 7e & \\ 9ab & & +\ 2 & & +\ gh \\ -\ ab & +\ 2cd & & +\ 3e & -\ gh \\ \hline 14ab & +\ 3cd & +\ 5 & +\ 9e. & \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rrrrrr} 16ab & +\ 3bc & +\ 8cd & -\ 5de & -\ 8e & \\ 13ab & +\ 9bc & & +\ 5de & +\ 7e & +\ 2f \\ ab & -\ 12bc & & & -\ e & \\ -\ 20ab & +\ 2bc & +\ 8cd & +\ 2de & +\ 18e & -\ 2f \\ 5ab & & -\ 16cd & -\ de & & \\ \hline 15ab & +\ 2bc & & +\ de & +\ 16e. & \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rrrrr} \frac{1}{2}a & +\ 7\ b & -\ 5\frac{1}{8}bc & +\ \frac{2}{3}\ abd & \\ 3\frac{3}{4}a & -\ 5\frac{1}{2}b & +\ \frac{3}{4}bc & & +\ agh \\ 1\frac{1}{2}a & -\ \frac{b}{2} & -\ \frac{bc}{2} & +\ \frac{1}{3}abd & -\ \frac{4}{5}agh \\ \hline 5\frac{3}{4}a & +\ b & -\ 4\frac{7}{8}\ bc & +\ abd & +\ \frac{agh}{5}. \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rrr} 5{,}04\ ab & -\ 0{,}7\,bc & +\ 9{,}2\ g \\ 4{,}045\,ab & +\ 0{,}7\,bc & +\ 9{,}24\,g \\ -\ 3{,}21\ ab & +\ 7{,}2\,bc & -\ 8{,}02\,g \\ \hline 5{,}875\,ab & +\ 7{,}2\,bc & +\ 10{,}42\,g. \end{array}$$

10. $8a + 4b + 6c - 9d$

$5a - 2b + 4c - 5d$

$- \quad + \quad - \quad +$

$3a + 6b + 2c - 4d.$

11. $35abc - 16abd + 5abe - abf$

$36abc - 9abd + 11abe - 2abf$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-abc - 7abd - 6abe + abf$

12. $6\frac{3}{4}ace + 12\frac{4}{5}f - 3\frac{1}{2}mn + p$

$4\frac{1}{8}ace - 14\frac{1}{10}f - \frac{mn}{4} + \frac{p}{4}$

$- \quad + \quad + \quad -$

$2\frac{5}{8}ace + 26\frac{9}{10}f - 3\frac{1}{4}mn + \frac{3p}{4}.$

13. $15{,}5\,am - 6{,}45\,bn$

$11{,}25\,am - 4{,}21\,bn$

$- \quad +$

$4{,}25\,am - 2{,}24\,bn.$

14. $[[(6a + 2b + 3c) + (8a + 4a + 6c)] + 7b] =$

$6a + 2b + 3c + 8a + 4a + 6c + 7b =$ cf. §. 28, I.

$18a + 9b + 9c.$

15. $[(6a + 12a) + (2b - b) + 4c - 8d + 7e - 3f] + (3d - c - 4e + 5f) =$

$18a + b + 4c - 8d + 7e - 3f + 3d - c - 4e + 5f =$

$18a + b + 3c - 5d + 3e + 2f.$

16. $[[36abc - (30abc - 10abc - 5abc)] + (abc - 4def)] =$

$(36abc - 30abc + 10abc + 5abc + abc - 4def) =$ cf. 28, II, III.

$22abc - 4def.$

17. $[9ab - 4cd - (25ab - 16bc - 25cd + de)] - [-10ab + (6bc + 20cd - de)] =$

$9ab - 4cd - 25ab + 16bc + 25cd - de + 10ab - 6bc - 20cd + de =$

$-6ab + 10bc + cd.$

18. $50ab - [6bc - [8ab - (10bc - 12cd)] - 16ab] =$

$50ab - [6bc - (8ab - 10bc + 12cd) - 16ab] =$

$50ab - [6bc - 8ab + 10bc - 12cd - 16ab] =$

$50ab - 6bc + 8ab - 10bc + 12cd + 16ab =$

$74ab - 16bc + 12cd.$

19. $2ab - 2cd - [4ab - 4cd + [2ab + 2cd - (4a - 2b) + (2ab - 2a)]] =$
$2ab - 2cd - [4ab - 4cd + 2ab + 2cd - 4a + 2b + 2ab - 2a] =$
$2ab - 2cd - 4ab + 4cd - 2ab - 2cd + 4a - 2b - 2ab + 2a =$
$- 6ab + 6a - 2b.$

20. $ac - [(bc + cd) + [de - (ef - fg + h) + (ah - hk)] + [lm - (mn - np + pr)]] =$
$ac - [bc + cd + de - ef + fg - h + ah - hk + lm - mn + np - pr] =$
$ac - bc - cd - de + ef - fg + h - ah + hk - lm + mn - np + pr.$

21. $7\frac{1}{2}ac - [(\frac{b}{4} + 16\frac{1}{3}cd - ac) + 120\frac{1}{6}cd - 14b] =$

22. $2\frac{1}{3}a - [1\frac{1}{3}b - (3\frac{1}{2}c - 1\frac{2}{3}d + 1\frac{5}{6}e)] =$

23. $27abc + 16\frac{1}{2}bc - [4\frac{1}{3}ab - 3\frac{5}{6}abc - [1\frac{1}{3}acd - \frac{ab}{4} - (\frac{cd}{2} - bc)]] =$

24. $(50{,}45\,ad - 11{,}3\,ad) - [[(25{,}5\,ab + 14{,}16\,ab) + (4abc - 5ce) - (0{,}6\,ce + 4abc)]] =$

25. $148am - [2\frac{1}{2}am + [(4\frac{3}{4}au - 1\frac{1}{7}au) + (11am - an) - (9an + am - 17an)] - [(136an + 16am) - (an + \frac{am}{2})]] =$

Anmerkung. Zur weiteren Uebung siehe Hofmann, II. Theil Seite 1—6, Heis §. 7—13.

---

# II. Multiplication und Division.

## a. Producte aus absoluten Zahlen.

### §. 32.

**Erklärung 1.** Eine gegebene Zahl so oft als Summand setzen als eine andere gegebene Zahl Einheiten hat, um eine neue Zahl zu gewinnen, heisst multipliciren.

Die Zahl, welche mehrmals addirt wird, heisst Multiplicand, und die Zahl, welche angibt, wie oft dies geschehen soll, heisst Multiplicator; die dadurch gewonnene Zahl heisst Product.

Die Multiplication lehrt demnach eine Zahl finden, deren Einheiten gleich sind den Einheiten des so oft als Summand gesetzten Multiplicanden als die Einheiten des Multiplicators erfordern.

**Erklärung 2.** Es sei der Multiplicand a und der Multiplicator b, so ist

$$a \times b \text{ oder } a \, . \, b \text{ oder kürzer } a\,b$$

der allgemeine Ausdruck eines Productes. Wenn wir die Einheiten des a so oft als Summanden ansetzen als die Einheiten des b fordern, so erhalten wir eine Zahl, die wir mit p bezeichnen. Es ist also

$$ab = a + a + a + a + \ldots b \text{ mal} = p.$$

Der Ausdruck ab bezeichnet das formelle und die Zahl p das entwickelte Product.

**Erklärung 3.** In einem formellen Product kann der Multiplicand benannt sein, der Multiplicator ist es nie. Ist der Multiplicand benannt, dann ist es auch das entwickelte Product.

## §. 33.

**Lehrsatz.** In jedem Product lassen sich Multiplicand und Multiplicator mit einander vertauschen:

$$ab = ba.$$

Es ist

$$ab = a + a + a + \ldots b \text{ mal}$$

und

$$ba = b + b + b + \ldots a \text{ mal.}$$

Da

$$a + a + a + \ldots . b \text{ mal} = b + b + b + \ldots a \text{ mal}$$

ist, so ist auch

$$ab = ba.$$

Anmerkung. Zur Veranschaulichung nehmen wir Ziffern. Es ist

$$2 \times 4 = 4 \times 2 = 8.$$

Zerlegen wir den Multiplicanden 2 in seine Einheiten und setzen ihn so oft als Summanden an als der Multiplicator 4 Einheiten hat, so ist:

$$\begin{array}{l} 1 \quad 1 = 2 \\ 1 \quad 1 = 2 \\ 1 \quad 1 = 2 \\ 1 \quad 1 = 2 \\ \hline 4 + 4 = 8 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 = 4 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 = 4 \\ \hline 2 + 2 + 2 + 2 = 8. \end{array}$$

**Zusatz 1.** Eine Summa aus gleichen Summanden kann man in

ein Product verwandeln, das zum Multiplicanden den gleichen Summanden und die Anzahl desselben zum Multiplicator hat:

$$a + a + a = 3a.$$

**Zusatz 2.** Umgekehrt lässt sich jedes Product zu einer Summa aus gleichen Summanden machen:

$$3a = a + a + a.$$

**Erklärung 1.** Da Multiplicator und Multiplicand mit einander vertauscht werden können, heissen beide auch Factoren. Ist der eine Factor bestimmt (3, 6), so heisst er wohl auch Coëfficient zur Unterscheidung vom andern unbestimmten Factor (a, b), z. B. 3a, 6b.

**Erklärung 2.** Die bestimmten Factoren werden mit einander wirklich multiplicirt, die unbestimmten Factoren haben in alphabetischer Ordnung als Factoren auf einander zu folgen.

**Erklärung 3.** Wenn die unbestimmten Factoren mit einander übereinstimmen, so sind die Grössen gleichnamig, z. B. 3abc und 6abc.

## §. 34.

**Lehrsatz.** Eine Summa wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jeden Summanden mit der Zahl multiplicirt:

$$(a + b) . c = ac + bc.$$

**Beweis.**

Es ist

$$(a + b) . c = (a + b) + (a + b) + (a + b) + \dots c \text{ mal. cf. §. 32.}$$
$$= a + b + a + b + a + b + \dots c \text{ mal. cf. §. 28. I.}$$
$$= (a + a + a + \dots c \text{ mal}) + (b + b + b + \dots c \text{ mal}). \text{ cf. §. 33.}$$
$$= ac + bc. \text{ cf. §. 32.}$$

oder:

Wir setzen $c = 3$, so ist

$$(a + b) . 3 = (a + b) + (a + b) + (a + b)$$
$$= (a + a + a) + (b + b + b). \text{ cf. §. 2.}$$
$$= 3a + 3b. \text{ cf. §. 33 Zusatz 1.}$$
$$= ca + cb, \text{ da } c = 3.$$
$$= ac + bc. \text{ cf. §. 33 Erkl. 2.}$$

**Zusatz 1.** Producte mit gleichen Factoren werden addirt,

wenn man die Summa der ungleichen Factoren mit dem gleichen Factor multiplicirt:

$$ac + bc = c(a + b) = (a + b)c.$$

**Beweis**

hiefür ergibt sich aus dem Vorhergehenden.

**Zusatz 2.** Was vom Binomium $(a + b)$ gilt, gilt auch von jedem Polynomium.

$$1.\quad (a + b + c)d = ad + bd + cd.$$

$$2.\quad ad + bd + cd = (a + b + c)d.$$

## §. 35.

**Lehrsatz.** Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man Minuenden und Subtrahenden mit der Zahl multiplicirt:

$$(a - b)c = ac - bc.$$

**Beweis.**

Es ist

$$\begin{aligned}(a - b)c &= (a - b) + (a - b) + (a - b) + \ldots c \text{ mal.} \quad \text{cf. §. 32.}\\ &= a + a + a + \ldots c \text{ mal} - b - b - b - \ldots c \text{ mal.}\\ &= (a + a + a + \ldots c \text{ mal}) - (b + b + b + \ldots c \text{ mal}). \quad \text{cf. §. 28, II.}\\ &= ac - bc;\end{aligned}$$

oder:

Wir setzen $c = 2$, so ist

$$\begin{aligned}(a - b).2 &= (a - b) + (a - b). \quad \text{cf. §. 33, Zusatz 2.}\\ &= (a + a) - (b + b). \quad \text{cf. §. 16.}\\ &= 2a - 2b.\\ &= ca - cb = ac - bc, \text{ da } c = 2.\end{aligned}$$

**Zusatz 1.** Zwei Producte mit gleichen Factoren werden subtrahirt, wenn man die Differenz der ungleichen Factoren mit dem gleichen Factor multiplicirt:

$$ac - bc = c(a - b) = (a - b)c.$$

**Zusatz 2.** Ist der eine Factor Null, so ist das Product Null:

$$a \times 0 = 0.$$

**Beweis.**

Es ist $0 = b - b$, cf. §. 20; folglich

$$a . 0 = a (b - b).$$
$$= a b - a b. \quad \text{cf. §. 35 Lehrsatz.}$$
$$= 0.$$

Zusatz 3. Ist der eine Factor 1, so ist das Product gleich dem andern Factor:

$$a \times 1 = a.$$

**Beweis**

hiefür aus dem Wesen der Multiplication.

## §. 36.

**Lehrsatz.** Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man einen seiner Factoren mit der Zahl multiplicirt:

$$(a b) . c = a (b . c) = (a . c) . b.$$

**Beweis.**

Es ist

$$(a b) . c = a b + a b + a b + \dots c \text{ mal.}$$
$$= (a + a + a + \dots c \text{ mal}) b = a c . b. \quad \text{cf. §. 34, Zusatz.}$$
$$= a (b + b + b + \dots c \text{ mal}) = a (b c).$$

oder:

Wir setzen $c = 3$, so ist

$$a b . 3 = a . b + a . b + a . b$$
$$= (3 a) b = (3 b) a$$
$$= (c . a) b = (c . b) a = a (b . c) = (a . c) b. \quad \text{cf. §. 33.}$$

da $c = 3$.

Zusatz. Sollen mehrere Zahlen mit einander multiplicirt werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Ordnung dies geschieht:

$$(a . b) . c = c . (b . a) = (b . c) . a.$$

**Erklärung.** Kehren in einem Producte dieselben Factoren mehrmals wieder, so bedient man sich einer kürzern Schreibweise, z. B. $a a = a^2$, $a a a = a^3$, $b b b b = b^4$; sprich a hoch 2, 3, .... (Quadrat, Kubus, Biquadrat). Diese exponirte Zahl (Exponent) ist nicht mit dem Coëfficienten zu verwechseln; denn $a + a = 2 a$, aber $a . a = a^2$, $a^2 + a^2 = 2 a^2$, aber $a^2 \times a^2 = a^4$.

§. 37.

**Grundsatz 3.** Gleiches mit Gleichem multiplicirt, gibt Gleiches:

da $ab = p$ cf. §. 32,

$c = c$,

so ist auch $ab \cdot c = c \cdot p$.

§. 38.

**Erklärung.** Bei der Multiplication kann der Multiplicand eine Summa, Differenz oder ein Product sein; und statt beim Multiplicanden kann dasselbe Verhältniss beim Multiplicator stattfinden. Wir hätten 6 von einander unterschiedene Fälle zu betrachten. Da aber nach §. 33 Multiplicand und Multiplicator als Factoren mit einander vertauscht werden können, so genügen die 3 in §§. 34, 35, 36 behandelten Fälle. Auf diese gestützt lassen sich noch folgende Fälle besonders behandeln.

§. 39.

**Lehrsatz 1.** Eine Summa wird mit einer Summa multiplicirt, wenn man jedes Glied der einen Summa mit jedem Glied der andern Summa multiplicirt und die einzelnen Producte addirt:

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Beweis.

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d \quad \text{cf. §. 34;}$$

$(a + b)$ als Zahl betrachtet

$$= ac + bc + ad + bd.$$

**Lehrsatz 2.** Eine Summa wird mit einer Differenz multiplicirt, wenn man jedes Glied der Summa mit jedem Glied der Differenz multiplicirt, wenn man die einzelnen Producte aus dem Minuenden addirt und die aus dem Subtrahenden subtrahirt:

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd \quad \text{§. 28, II.}$$

$$\left.\begin{array}{l} = ac + bc - (ad + bd) \\ = ac - ad + bc - bd \end{array}\right\} \text{cf. §. 16.}$$

**Beweis.**

Es ist

$$(a+b)(c-d) = a(c-d) + b(c-d) \Big\} \text{ cf. §. 35.}$$
$$= ac - ad + bc - bd$$
$$= ac + bc - (ad + bd) \quad \text{cf. §. 16.}$$
$$= ac + bc - ad - bd. \quad \text{cf. §. 28, II.}$$

**Lehrsatz 3.** Eine Differenz wird mit einer Differenz multiplicirt, wenn man jedes Glied der einen mit jedem der andern multiplicirt und die Einzelproducte aus beiden Minuenden und beiden Subtrahenden addirt und die Einzelproducte aus je einem Minuend und je einem Subtrahend subtrahirt:

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$
$$= ac - bc - ad + bd \quad \text{cf. §. 13, Zusatz 2.}$$
$$= ac + bd - bc - ad.$$

**Beweis.**

Es ist

$$(a-b)(c-d) = (a-b)c - d(a-b)$$
$$= (ac - bc) - (ad - bd)$$
$$= ac - bc - ad + bd$$
$$= ac - ad - bc + bd$$
$$= ac + bd - bc - ad.$$

**Zusatz.** Vier Producte, von denen je zwei einen gemeinschaftlichen Factor haben, lassen sich meistens in zwei Factoren zerlegen, wenn man die Summen oder Differenzen je zwei unter sich verschiedener Factoren mit einander multiplicirt:

1. $ac + bc + ad + bd = (a+b)(c+d)$.
2. $ac + bc - ad - bd = (a+b)(c-d)$.
3. $ac - ad - bc + bd = (a-b)(c-d)$.

## §. 40.

**Erklärung.** Wie einzelne Zahlen, so können auch Summen und Differenzen in einem Producte als Factoren wiederkehren. Man bedient sich dann derselben Kürze wie in §. 36, Erklärung. Z. B.

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2; \quad (a-b)(a-b) = (a-b)^2.$$

**Lehrsatz 1.** Das Quadrat der Summa oder Differenz zweier

Zahlen ist gleich der Summa der Quadrate beider Zahlen vermehrt oder vermindert um ihr doppeltes Product:

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

**Beweise.**

I. Es ist

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 \quad \text{cf. §. 39, 1.}$$
$$= a^2 + 2ab + b^2. \quad \text{cf. §. 6.}$$

II. Es ist

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2 \quad \text{cf. §. 39, 3.}$$
$$= a^2 - 2ab + b^2.$$

**Lehrsatz 2.** Das Product aus der Summa und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

**Beweis.**

Es ist

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2$$
$$= a^2 - b^2. \quad \text{cf. §. 26.}$$

**Zusatz 1.** Eine Differenz aus je zwei gleichen Factoren ist gleich zwei Factoren, deren einer die Summa, der andere dagegen die Differenz der nämlichen Zahlen ist:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

**Zusatz 2.** Ist ein ursprünglich viergliedriges Product durch Zusammenziehung zweier Glieder dreigliedrig geworden, so lässt es sich nur durch Versuch in seine Factoren zerlegen; wobei aber zu beachten ist, dass das erste Glied des Products ein Product aus den ersten Gliedern der Factoren und das letzte Glied ein Product aus den zweiten Gliedern der Factoren ist:

I. $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$.

II. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$.

## §. 41.

**Beispiele zur Einübung der vorstehenden Lehrsätze.**

1. $5ab \cdot 3 = 3 \cdot 5ab = 15ab$.
2. $ab \cdot 9c = 9c \cdot ab = 9abc$.

3. $ade . fg = adefg$.
4. $14ac . 2b = 28abc$.
5. $3ag . 4bd = 12abdg$.
6. $ab . a = aab = a^2b$.
7. $ac . acg = a^2c^2g$.
8. $4bde . 4bde = 16b^2d^2e^2 = (4bde)^2$.
9. $3a^2b^2c . 3abc = 9a^3b^3c^2$.
10. $8\frac{1}{4}am . \frac{2}{3}an = \frac{66a^2mn}{12} = \frac{11a^2mn}{2} = 5\frac{1}{2}a^2mn$.

II.

11. $(a+b)3 = 3a + 3b = 3(a+b)$.
12. $(7bc + 5d)7c = 49bc^2 + 35cd = 7c(7bc + 5d)$.
13. $(3cg + 4am + n)\frac{n}{2} = \frac{3cgn + 4amn + n^2}{2} = n\left(\frac{3cg + 4am + n}{2}\right)$.
14. $(3a + 6b + 9c)2\frac{1}{3}b = \frac{21ab + 42b^2 + 63bc}{3} = 7ab + 14b^2 + 21bc$
$= 7b(a + 2b + 3c)$.

III.

15. $(5ac - 3bd)d = 5acd - 3bd^2$.
16. $(ab - 1)m = abm - m = m(ab - 1)$.
17. $(12an - 4mn)3x = 36anx - 12mnx = 12nx(3a - m)$.
18. $(15{,}05 - 3{,}2bc)5{,}2a = 78{,}26a - 16{,}64abc$.
19. $9pr . 0 = 0$.
20. $15mn . 1 = 15mn$.

IV.

21. $(5b . 3c)m = 5b . 3cm = 5bm . 3c = 15bc . m = 15bcm$.
22. $(ad . ac)2n = ad . 2acn = 2adn . ac = a^2cd . 2n = 2a^2cdn$.
23. $(15bd . 3ag)\frac{p}{3} = 45abdg . \frac{p}{3} = \frac{45abdgp}{3} = 15abdgp$.
24. $(5{,}2ac . 15{,}05ad)3ad = 78{,}26a^2cd . 3ad = 234{,}78a^3cd^2$.

V.

25. $(5a + 3b)(4c + 6d) = 20ac + 30ad + 12bc + 18bd$.
26. $(bc + 8c)(3a - 2b) = 3abc - 2b^2c + 24ac - 16bc$.
$= 3abc + 24ac - 2b^2c - 16bc$.
27. $(2b - mx)(3c - y) = 6bc - 2by - 3cmx + mxy$
$= (3c - y)(2b - mx)$.

28. $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$

29. $(ac + ad)(ac - ad) = (ac)^2 + a^2cd - a^2cd - (ad)^2 = (ac)^2 - (ad)^2.$

30. $\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{2}\right)\left(\frac{m}{2} + \frac{n}{2}\right) = \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2.$

## b. Producte aus algebraischen Zahlen.

§. 42.

**Lehrsatz 1.** Zwei positive Ausdrücke werden multiplicirt, wenn man das Product ihrer absoluten Zahlen positiv setzt:

$$(+a)(+b) = +ab.$$

**Beweis.**

Es ist

$$(+a)(+b) = (0+a)(0+b). \quad \text{cf. §. 21.}$$
$$= 0(+a) + 0(+b) + ab. \quad \text{cf. §. 39.}$$
$$= +ab. \quad \text{cf. §. 35, Zusatz 2.}$$

**Lehrsatz 2.** Zwei negative Ausdrücke werden multiplicirt, wenn man das Product ihrer absoluten Zahlen positiv setzt:

$$(-a)(-b) = +ab.$$

**Beweis.**

Es ist

$$(-a)(-b) = (0-a)(0-b). \quad \text{cf. §. 22.}$$
$$= 0(-a) - 0(-b) + ab. \quad \text{cf. §. 39, 3.}$$
$$= +ab.$$

**Lehrsatz 3.** Ein positiver und negativer Ausdruck werden multiplicirt, wenn man das Product aus ihren absoluten Zahlen negativ setzt:

$$(+a)(-b) = -ab.$$

**Beweis.**

Es ist

$$(+a)(-b) = (0+a)(0-b).$$
$$= 0(+a) - 0(-b) - ab. \quad \text{cf. §. 39, 2.}$$
$$= -ab.$$

**Regel.**

Gleiche Zeichen geben plus und ungleiche minus.

**Zusatz 1.** Eine algebraische Summa wird mit einer algebraischen Zahl multiplicirt, wenn man alle Glieder mit der Zahl multiplicirt und dabei vorstehende Regel beachtet:

$$(a + b - c)(-d) = -ad - bd + cd.$$

**Zusatz 2.** Zwei algebraische Summen werden multiplicirt, wenn man jedes Glied der einen mit jedem Glied der andern multiplicirt und sich dabei nach vorstehender Regel richtet:

$$(a + b - c)(d - e + m) = ad + bd - cd - ae - be + ce$$
$$+ am + bm - cm = (ad + bd + ce + am + bm)$$
$$-(cd + ae + be + cm).$$

**Erklärung 1.** Tritt eine algebraische Summa als Factor auf, so ist sie in Klammern zu setzen.

**Erklärung 2.** Producte, in welchen algebraische Summen Factoren sind, heissen zusammengesetzte Producte.

**Erklärung 3.** Zusammengesetzte Producte können wieder zu einer algebraischen Summa vereinigt sein.

**Erklärung 4.** Die zusammengesetzten Producte sind in eine algebraische Summa zu verwandeln, deren Glieder sämmtlich einfache Producte sind. Entstehen bei dieser Umwandlung gleichnamige Producte, so müssen sie in ein Glied zusammengezogen werden. Auf diese Weise lösen sich die Klammern auf. Z. B.:

$$5ac + 4b(3a - 2b) - [(7a + 4b)(9a - 3b)].$$

Diese Summa besteht 1) aus $5ac$ und 2) aus $4b(3a - 2b)$ und 3) aus $(7a + 4b)(9a - 3b)$. Daraus ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l} 5ac + 12ab - 8b^2 - (63a^2 + 15ab - 12b^2) = \\ 5ac + 12ab - 8b^2 - 63a^2 - 15ab + 12b^2 = \end{array}\right\} \text{cf. §. 28, II.}$$
$$5ac - 3ab - 63a^2 + 4b^2.$$

**Erklärung 5.** Wird eine algebraische Summa mit $(-1)$ multiplicirt, so bekommen alle ihre Glieder entgegengesetzte Werthe. Z. B.

$$(5ac - 3ab - 63a^2 + 4b^2)(-1) = -5ac + 3ab + 63a^2 - 4b^2.$$

**Erklärung 6.** Besteht ein formelles Product aus mehr als zwei Factoren, so multiplicirt man erst die beiden ersten Factoren mit einander und dieses Product hierauf mit dem nächsten Factor. Dabei ist

zu beachten, dass eine gerade Anzahl von negativen Factoren eine positive Zahl und eine ungerade Anzahl von negativen Factoren eine negative Zahl als Product gibt. Z. B.

$$(-a)(-b) = +ab; \quad (-a)(-b)(-c) = -abc.$$

$$(-a)(-b)(-c)(-d) = +abcd.$$

## §. 43.

**Erklärung.** Aus der Vergleichung zweier Ausdrücke ergeben sich unter der Voraussetzung, dass man es nur mit positiven Zahlen zu thun hat, folgende Lehrsätze:

**Lehrsatz 1.** Gleiches mit Grösserem multiplicirt, gibt Grösseres:

Es ist $a > b$, so ist:

$$ac > bc.$$

**Beweis.**

Ist $a > b$, so ist:

$$a - b = d \quad \text{cf. §. 8.}$$

und

$$a = b + d.$$

Multipliciren wir auf beiden Seiten mit c, so ist

$$ac = (b + d)c. \quad \text{cf. §. 37.}$$

$$ac = bc + cd.$$

Da ist offenbar

$$ac > bc$$

und zwar um cd.

**Lehrsatz 2.** Grösseres mit Grösserem multiplicirt, gibt Grösseres:

Es sei $a > b$ und $m > n$, so ist

$$am > bn.$$

**Beweis.**

Ist $a > b$, so ist auch

$$am > bm. \quad \text{cf. vorig. Satz.}$$

Ist $m > n$, so ist auch nach demselben Satze

$$bm > bn;$$

demnach ist:

$$am > bn.$$

## §. 44.
### Beispiele und Aufgaben.

1. $8a \times -2bc = -16abc.$

2. $3ad\left(\frac{1}{2}ad - 2b\right) = 1\frac{1}{2}a^2d^2 - 6abd.$

3. $\left(\frac{1}{2}ad + 2m\right) \times -n = -\frac{adn}{2} - 2mn;$

4. $-2ab(b - 4c + d) = -2ab^2 + 8abc - 2abd.$

5. $5abc\left(6a + 4b - \frac{3c}{4} - \frac{1}{2}\right) = 30a^2bc + 20ab^2c - 3\frac{3}{4}abc^2 - 2\frac{1}{2}abc.$

6. $-\frac{1}{2}b(-8a + 2b - 3c) = 4ab - b^2 + 1\frac{1}{2}bc.$

7. $$\begin{array}{l}
2a - 3ab + 5cd \\
5a + 7ab - 3cd \\
\hline
10a^2 - 15a^2b + 25acd \\
\qquad 14a^2b \qquad - 21a^2b^2 + 35abcd \\
\qquad\qquad - 6acd \qquad + 9abcd - 15c^2d^2 \\
\hline
10a^2 - a^2b + 19acd - 21a^2b^2 + 44abcd - 15c^2d^2.
\end{array}$$

8. $$\begin{array}{l}
3ac - 2bd - e + 3 \\
\qquad 7ac + 5bd + e \\
\hline
21a^2c^2 - 14abcd - 7ace + 21ac \\
\qquad 15abcd \qquad - 10b^2d^2 - 5bde + 15bd \\
\qquad\qquad 3ace \qquad - 2bde \qquad - e^2 + 3e \\
\hline
21a^2c^2 + abcd - 4ace + 21ac - 10b^2d^2 - 7bde + 15bd - e^2 + 3e.
\end{array}$$

9. $$\begin{array}{l}
8a - 2b + 5c \\
-2a + b \\
\hline
-16a^2 + 4ab - 10ac \\
\qquad 8ab \qquad - 2b^2 + 5bc \\
\hline
-16a^2 + 12ab - 10ac - 2b^2 + 5bc.
\end{array}$$

10. $(3ab - 2b).(5ab + b) = 15a^2b^2 - 7ab^2 - 2b^2.$

11. $(3a - 4b).(7a - 2b) = 21a^2 - 34ab + 8b^2.$

12. $(6a - 2b + 9c).(4a - b + 5c) = 24a^2 - 14ab + 66ac + 2b^2$
$- 19bc + 45c^2.$

13. $(3d + 5g - 2m).(4d - 2g + 6m) =$
$12d^2 + 14dg + 10dm - 10g^2 + 34gm - 12m^2.$

14. $(2 + 3d + 5mn).(4 + 2d + mn) =$
$8 + 16d + 22mn + 6d^2 + 13dmn + 5m^2n^2.$

15. $[5\,a\,b\,.\,(-4\,b\,c)]\,.\,(-a\,c) = -20\,a\,b^2\,c\,.\,(-a\,c) = 20\,a^2 b^2 c^2$.

16. $(-a)(+m)(-n)(+0)(+h) = -a\,m\,(-n)(+0)(+h) =$
$a\,m\,n\,(+0)(+h) = 0\,(+h) = 0$.

17. $\left[\left(\frac{1}{2}\,a\,d + 2\,m\right).(-n)\right](-1) = \left(\frac{a\,d\,n}{2} - 2\,m\,n\right)(-1) = -\frac{a\,d\,n}{2} + 2\,m\,n.$

18. $(10\,a\,h)\,.\,(-5\,a\,b)\,.\,(a\,m)\,.\,(b\,c\,d) = -50\,a^3 b^2\,c\,d\,h\,m$.

19. $(3 + \frac{8}{3}\,m - \frac{3}{2}\,m^2)(3 - \frac{m}{2}) = 9 + 6\frac{1}{2}\,m - 5\frac{5}{6}\,m^2 + \frac{3}{4}\,m^3$.

20. $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3$. (Kubikformel.)

21. $(2 + 3\,p)^4 = (2 + 3\,p)(2 + 3\,p)(2 + 3\,p)(2 + 3\,p) =$
$16 + 96\,p + 216\,p^2 + 216\,p^3 + 81\,p^4$.

22. $(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$.

23. $(1 - y)^2 (1 + y)^3 = 1 + y - 2\,y^2 - 2\,y^3 + y^4 + y^5$.

24. $[5\,d + 3\,(d + e) - 5\,(4\,d - 2\,e)] + 12\,d = 13\,e$.

25. $8\,a - 7\,c - 4\,(a + 2\,b - 3\,c) + 2\,(3\,a - 4\,c) = 10\,a - 8\,b - 3\,c$.

26. $3\,m\,(5\,m^2 - 2\,m\,n + n^2) - [(2\,m^2 + 5\,m\,n)\,.\,(4\,m - 2\,n)] - 3\,m\,n^2 =$
$7\,m^3 - 22\,m^2 n + 10\,m\,n^2$.

27. $(5\,a\,b - 3\,m + 4\,c)\,.\,(-a\,b - 3\,m + c) =$

28. $\left(\frac{a\,b}{2} - \frac{b}{3} + c\right).(2\frac{1}{2}\,a\,b + b - 1\frac{1}{8}\,c) =$

29. $(42{,}01\,a\,c + 3{,}4\,b\,d - 20{,}5\,c\,d - 0{,}5)\,.\,(0{,}5\,a\,c - 7\,b\,d - 0{,}5\,c\,d) =$

30. $(-16\,a\,h + 4\,h - 1\frac{1}{3}\,h\,m)\,.\,(-3\frac{1}{2}\,a\,h - 4\frac{1}{3}\,h\,m - \frac{h}{2}) =$

31. $[(15\,a - 9\,b - 3\,c + 12\,d)\,3\,a\,b\,c] + (2\,x - y)\,.\,(3\,x + \frac{y}{2} + a\,b) + 4\,a\,b\,y =$

32. $[[3\,a\,f\,(5\,b - 7\,f + 9\,x)]\,(8\,b + 5\,f - 4\,x) + 16\,a\,b] - [(3\,a\,f - 2\,b\,f).$
$(x + b - 2\,f)] + 30\,a\,f =$

Anmerkung. Zur weiteren Uebung siehe Hofmann, II. Thl. S. 7, 8, 11—13, Heis §. 14—17.

## aa. Quotienten und Producte aus absoluten Zahlen.

### §. 45.

**Erklärung 1.** Aus dem Verhältniss eines gegebenen Products zu dem einen gleichfalls gegebenen Factor den andern Factor bestimmen, heisst dividiren.

Das gegebene Product, welches dividirt werden soll, heisst Dividend, und der gegebene Factor, mit welchem dividirt wird, heisst Divisor, und das durch die Division gewonnene Resultat heisst Quotient.

Die Division lehrt demnach eine Zahl finden, welche mit dem Divisor multiplicirt den Dividenden als Product gibt.

**Erklärung 2.** Es sei a der Dividend und b der Divisor, so ist:

$$a:b \text{ oder } \frac{a}{b}$$

der allgemeine Ausdruck eines Quotienten. Dieser Quotient bezeichnet unter Umständen, die wir hier voraussetzen, eine ganze Zahl. Wir bezeichnen diese Zahl mit q und bekommen:

$$\frac{a}{b} = q.$$

Der Ausdruck $\frac{a}{b}$ bezeichnet den formellen und q den wirklichen oder entwickelten Quotienten.

**Erklärung 3.** In einem formellen Quotienten können Dividend und Divisor benannt und unbenannt sein.

Ist nur der Dividend benannt, dann ist das Verfahren eine Theilung; ist Dividend und Divisor benannt (gleichnamig), dann handelt es sich um eine Messung. In diesem Falle ist der Quotient unbenannt und gibt an wie viel Male der Dividend so gross ist als der Divisor; in jenem Falle ist der Quotient benannt und gibt an, der wie vielte Theil der Divisor vom Dividenden ist.

**Erklärung 4.** Kommen in einem formellen Quotienten Coëfficienten und Exponenten unbestimmter Grössen vor, so werden die Coëfficienten wirklich dividirt, die Exponenten subtrahirt, um den entwickelten Quotienten zu bestimmen; die gleichbenannten unbestimmten Grössen des Dividenden und Divisor fallen im Quotienten ganz weg, z. B.

$$10\,a^2 b^3 c\,d : 2\,a\,b^2 d = 5\,a\,b\,c.$$

## §. 46.

**Erklärung.** Aus dem §. 45 ergeben sich folgende Fundamentalsätze:

Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer und derselben Zahl in beliebiger Ordnung multiplicirt oder dividirt:

$$\text{I. } \frac{a}{b} \,.\, b = a.$$

$$\text{II. } \frac{q\,.\,b}{b} = q.$$

**Beweise.**

Es ist $\frac{a}{b} = q$, mithin:

$$a = q\,b. \quad \text{cf. §, 45.}$$

Substituirt man in dieser Gleichung für q den entsprechenden Werth aus der vorhergehenden Gleichung, so ist:

$$a = \frac{a}{b} \, . \, b.$$

Es ist $\frac{a}{b} = q$ und

$$a = q\,b.$$

Substituirt man aus der letzten Gleichung den Werth von a in der vorletzten, so ist

$$\frac{q\,b}{b} = q.$$

Anmerkung. Darauf stützt sich die Probe für die Multiplication und Division.

**Zusatz 1.** Hat der formelle Quotient zum Divisor 1, so ist der entwickelte Quotient dem Dividenden gleich:

$$\frac{a}{1} = a.$$

**Zusatz 2.** Ist in einem formellen Quotienten Dividend und Divisor gleich, so ist der entwickelte Quotient 1:

$$\frac{a}{a} = 1.$$

Anmerkung. Multiplication und Division sind entgegengesetzte Operationen.

## §. 47.

**Grundsatz 4.** Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt Gleiches:

Es sei $m = n$, so ist

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{c}.$$

## §. 48.

**Erklärung.** Da Multiplication und Division entgegengesetzte Operationen sind, so ergeben sich, wenn man hier dividirt, wo man dort multiplicirt, nachstehende Lehrsätze.

**Lehrsatz.** Eine Summa wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jeden Summanden durch die Zahl dividirt:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

**Beweis.**

Man multiplicirt auf beiden Seiten mit c, so ist:

$$\left(\frac{a+b}{c}\right).c = a+b. \quad \text{cf. §. 46}$$

und

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right).c = \left(\frac{a}{c}.c\right)+\left(\frac{b}{c}.c\right) \quad \text{cf. §. 34}$$

$$= a+b \quad \text{cf. §. 46;}$$

folglich:

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)c = \left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)c$$

nach dem Grundsatze: zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, sind sich selbst gleich.

Und es ist auch

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c} \quad \text{cf. §. 37 u. 47.}$$

**Zusatz.** Was vom Binomium (a + b) gilt, gilt auch von jedem Polynomium:

$$\frac{a+b+m+n}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{m}{c}+\frac{n}{c}.$$

Anmerkung. Der Divisionsstrich ersetzt die Klammern:

$$(a+b):c = \frac{a+b}{c}.$$

## §. 49.

**Lehrsatz.** Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, wenn man Minuenden und Subtrahenden durch die Zahl dividirt:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c}-\frac{b}{c}.$$

**Beweis.**

Man multiplicirt auf beiden Seiten mit c, so ist:

$$\left(\frac{a-b}{c}\right).c = a-b \quad \text{cf. §. 46}$$

und

$$\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right).c = \left(\frac{a}{c}.c\right)-\left(\frac{b}{c}.c\right) \quad \text{cf. §. 35}$$

$$= a-b;$$

folglich auch:

$$\left(\frac{a-b}{c}\right).c = \left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right).c; \quad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c}-\frac{b}{c}. \quad \text{cf. §. 37 u. 47.}$$

**Zusatz 1.** Eine algebraische Summa wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jedes Glied durch die Zahl dividirt:

$$\frac{a+b-m+n}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-\frac{m}{c}+\frac{n}{c}.$$

**Zusatz 2.** Zwei oder mehrere Quotienten mit demselben Divisor werden addirt oder subtrahirt, wenn man die Summa oder Differenz ihrer Dividenden durch den gleichen Divisor dividirt:

$$1.\quad \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

$$2.\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

$$3.\quad \frac{a}{c}+\frac{b}{c}-\frac{m}{c}+\frac{n}{c}=\frac{a+b-m+n}{c}.$$

**Zusatz 3.** Jeder Quotient mit dem Dividend Null, gibt Null als entwickelten Quotienten:

$$\frac{0}{m}=0.$$

**Beweis.**

Es ist

$$\frac{0}{m}=\frac{a-a}{m} \quad \text{cf. §. 20.}$$

$$=\frac{a}{m}-\frac{a}{m} \quad \text{cf. §. 48 Lehrsatz.}$$

$$=0.$$

## §. 50.

**Lehrsatz.** Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, wenn man einen Factor durch die Zahl dividirt:

$$\frac{a.b}{c}=\frac{a}{c}.b=a.\frac{b}{c}.$$

**Beweis.**

Man multiplicirt die als gleich zu beweisenden Ausdrücke mit c, so ist

$$\left(\frac{a.b}{c}\right).c=a.b \quad \text{cf. §. 46.}$$

$$\left(\frac{a}{c}.b\right).c=\left(\frac{a}{c}.c\right).b \quad \text{cf. §. 36.}$$

$$=a.b.$$

$$\left(a.\frac{b}{c}\right).c=a.\left(\frac{b}{c}.c\right)$$

$$=a.b;$$

folglich ist auch:

$$\left(a\,.\,\frac{b}{c}\right).\,c = \left(\frac{a}{c}\,.\,b\right).\,c = \left(\frac{a\,.\,b}{c}\right).\,c;$$

demnach auch

$$a\,.\,\frac{b}{c} = \frac{a}{c}\,.\,b = \frac{a\,.\,b}{c} \quad \text{cf. §. 37.}$$

**Zusatz 1.** Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man den Dividenden mit der Zahl multiplicirt:

$$\frac{a}{c}\,.\,b = \frac{a\,.\,b}{c}.$$

**Zusatz 2.** Wenn eine Zahl mit einer andern multiplicirt und mit einer dritten dividirt werden soll, so ist es einerlei, in welcher Ordnung dies geschieht.

**Zusatz 3.** $a^2 : a = a$; denn

$$a^2 = a\,.\,a; \quad \frac{a\,.\,a}{a} = \frac{a}{a}\,.\,a = a\,.\,\frac{a}{a} = 1\,.\,a = a$$

$$a^3 : a = a^2; \quad a^3 = a\,.\,a\,.\,a; \quad \frac{a\,.\,a\,.\,a}{a} = \frac{a}{a}\,.\,a\,.\,a = 1\,.\,a^2 = a^2.$$

## §. 51.

**Lehrsatz.** Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Dividenden durch die Zahl dividirt:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{c} : b.$$

### Beweis.

Man multiplicirt jeden Ausdruck mit c, so ist:

$$\left(\frac{a}{b} : c\right) c = \frac{a}{b} \quad \text{cf. §. 46.}$$

$$\left(\frac{a : c}{b}\right) c = \frac{(a : c)\,.\,c}{b} \quad \text{cf. §. 50 Zusatz.}$$

$$= \frac{a}{b};$$

folglich ist

$$\left(\frac{a}{b} : c\right) c = \left(\frac{a : c}{b}\right) c$$

und:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}. \quad \text{cf. §. 37.}$$

**Zusatz.** Wenn eine Zahl durch zwei andere nach einander dividirt werden soll, so ist es einerlei, in welcher Ordnung dies geschieht.

## §. 52.

**Lehrsatz.** Eine Zahl wird durch ein Product dividirt, wenn man die Zahl durch jeden Factor in beliebiger Ordnung dividirt:

$$\frac{a}{b \,.\, c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$

**Beweis.**

Man multiplicirt jeden Ausdruck mit bc, so ist:

$$\left(\frac{a}{bc}\right) bc = a \quad \text{cf. §. 46.}$$

$$\left(\frac{a}{b} : c\right) bc = \left(\frac{a}{b} : c\right) c \,.\, b. \quad \text{cf. §. 36, 1.}$$

$$= \frac{a}{b} \,.\, b = a;$$

folglich:

$$\left(\frac{a}{bc}\right) bc = \left(\frac{a}{b} : c\right) bc;$$

demnach auch:

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c.$$

**Zusatz.** Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Divisor mit der Zahl multiplicirt:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \,.\, c}.$$

## §. 53.

**Lehrsatz.** Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, wenn man die Zahl mit dem Divisor multiplicirt und das Product durch den Dividenden dividirt,

oder

wenn man die Zahl mit dem umgekehrten Werth des Quotienten multiplicirt:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a \,.\, c}{b} = \frac{a}{b} \,.\, c = a \,.\, \frac{c}{b}.$$

**Beweis.**

Multiplicirt man alle Ausdrücke mit $\frac{b}{c}$, so ist:

$$\left(a : \frac{b}{c}\right)\frac{b}{c} = a \quad \text{cf. §. 46.}$$

$$\left(\frac{a \, . \, c}{b}\right)\frac{b}{c} = \frac{a \, . \, c \, . \, b}{b \, . \, c} = \frac{a \, . \, bc}{bc} = a.$$

$$\left(\frac{a}{b} \, . \, c\right)\frac{b}{c} = \left(\frac{a \, . \, c}{b}\right)\frac{b}{c} = a \quad \text{cf. §. 50, Zusatz.}$$

$$\left(a \, . \, \frac{c}{b}\right)\frac{b}{c} = a \text{ u. s. w.}$$

**Zusatz.** Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man den Dividend mit der Zahl multiplicirt oder auch den Divisor durch die Zahl dividirt:

$$\frac{a}{b} \, . \, c = \frac{a \, . \, c}{b} = \frac{a}{b : c}.$$

## §. 54.

**Lehrsatz.** Zwei Quotienten werden mit einander multiplicirt, wenn man Dividend mit Dividend und Divisor mit Divisor multiplicirt:

$$\frac{a}{b} \, . \, \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

**Beweis.**

Es ist

$$\frac{a}{b} \, . \, \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \, . \, c\right) : d = \frac{ac}{b} : d \quad \text{cf. §. 50.}$$

$$= \frac{ac}{bd} \quad \text{cf. §. 52}$$

oder man multiplicirt die beiden Ausdrücke mit b d, so ist:

$$\left(\frac{a}{b} \, . \, \frac{c}{d}\right) bd = ac$$

$$\left(\frac{ac}{bd}\right) bd = ac \text{ u. s. w.}$$

## §. 55.

**Lehrsatz.** Ein Quotient wird durch einen Quotienten dividirt, wenn man das Product aus dem Dividend des ersten und dem Divisor des zweiten Quotienten dividirt durch das Product aus dem Divisor des ersten und Dividenden des zweiten Quotienten,

oder

man multiplicirt mit dem umgekehrten Werth des zweiten Quotienten den Werth des ersten:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}=\frac{a.d}{b.c}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}.d\right):c \quad \text{cf. §. 53.}$$

$$=\left(\frac{a.d}{b}\right):c=\frac{a.d}{b.c}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c} \quad \text{cf. §. 52}$$

oder man multiplicirt mit $\frac{c}{d}$, so ist:

$$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a.d}{b.c}\right)\frac{c}{d}=\frac{a.c.d}{b.c.d}=\frac{a}{b},$$

folglich:

$$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)\frac{c}{d}=\left(\frac{a.d}{b.c}\right)\frac{c}{d}$$

und

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\,d}{b\,c}. \quad \text{cf. §. 47.}$$

## §. 56.

**Lehrsatz.** Ein Quotient bleibt unverändert, wenn man Dividend und Divisor mit der nämlichen Zahl entweder multiplicirt oder dividirt:

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}.$$

**Beweis.**

Multiplicirt man die Ausdrücke mit b c, so ist:

$$\left(\frac{a}{b}\right)b\,c=a.c.$$

$$\left(\frac{a.c}{b.c}\right)b\,c=a.c.$$

$$\left(\frac{a:c}{b:c}\right)b\,c=\left(\frac{a}{b:c}:c\right)c\,b \quad \text{cf. §. 51.}$$

$$=\left(\frac{a}{b:c}\right)b \quad \text{cf. §. 46.}$$

$$=\left(\frac{a.c}{b}\right)b \quad \text{cf. §. 53.}$$

$$=a.c;$$

folglich ist:

$$\left(\frac{a}{b}\right) b c = \left(\frac{a.c}{b.c}\right) b c = \left(\frac{a:c}{b:c}\right) b c;$$

und auch

$$\frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.c} = \frac{a:c}{b:c}.$$

§. 57.

**Erklärung 1.** Die Division lässt sich nur dann vollständig ausführen, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist. Ist das nicht der Fall, so bleibt nach der Entwicklung des Quotienten immer ein Rest. In diesem Falle ist der Quotient ein Bruch.

Dieser Bruch heisst ächt, wenn der Dividend kleiner ist als der Divisor; unächt aber, wenn der Dividend grösser ist als der Divisor. Bei einem Bruch heisst der Dividend Zähler und der Divisor Nenner.

**Erklärung 2.** Da jeder Bruch ein specieller Quotient ist, so sind Dividend und Divisor, Zähler und Nenner identisch, und alle für Quotienten und Producte aufgestellten Sätze gelten auch für die Brüche. Es bedarf desshalb hier keiner weitern Erörterung, wie Brüche multiplicirt oder dividirt werden sollen. Sollen Brüche addirt oder subtrahirt werden, so hat man nach §. 48 und 49 zu verfahren, aber nur wenn sie gleiche Nenner haben. Haben sie verschiedene Nenner, so sind sie auf gleiche Benennung zu bringen.

§. 58.

**Lehrsatz.** Brüche werden auf gleiche Benennung gebracht, wenn man das Product aller Nenner als gemeinschaftlichen Nenner betrachtet; diesen mit dem Nenner jedes einzelnen Bruches dividirt und den erhaltenen Quotienten mit dem Zähler jedes einzelnen Bruches multiplicirt. Dieses Product ist der entsprechende Zähler eines Bruches mit einem Nenner, der auf diese Weise allen einzelnen Brüchen, die zu addiren oder subtrahiren sind, gemeinschaftlich wird:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{m} = \frac{a d m + b c m + b d e}{b d m}.$$

**Beweis.**

Der gemeinschaftliche Nenner ist b d m. Dividiren wir diesen mit dem Nenner des ersten Bruches, so ist:

$$1.\ \frac{b\,d\,m}{b} = d\,m.$$

Multiplicirt man mit d m Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,d\,m}{b\,d\,m}.\quad \text{cf. §. 56.}$$

Ebenso ist:

$$2.\ \frac{b\,d\,m}{d} = b\,m;\ b\,m\,.\,c : b\,m\,.\,d = \frac{b\,c\,m}{b\,d\,m}$$

und

$$3.\ \frac{b\,d\,m}{m} = b\,d;\quad b\,d\,.\,e : b\,d\,.\,m = \frac{b\,d\,e}{b\,d\,m}.$$

Es ist folglich auch:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{m} = \frac{a\,d\,m}{b\,d\,m} + \frac{b\,c\,m}{b\,d\,m} + \frac{b\,d\,e}{b\,d\,m} = \frac{a\,d\,m + b\,c\,m + b\,d\,e}{b\,d\,m}.\quad \text{cf. §. 48.}$$

**Zusatz 1.** Kommen bei diesem Verfahren mehrere Nenner mit gleichen Factoren vor, so setzt man diese nur einmal an, um den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu erhalten:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m\,n} + \frac{d}{m\,p} - \frac{c}{n\,p} = \frac{a\,n\,p + b\,p + d\,n - c\,m}{m\,n\,p}.$$

### Beweis.

Da ist der grösste gemeinschaftliche Nenner $= m\,.\,m\,n\,.\,m\,p\,.\,n\,p$ und der kleinste $= m\,n\,p$, weil die Nenner: m, m n, m p, n p nur einmal in ihm enthalten sind.

Es ist:

$$1.\ \frac{m\,n\,p}{m} = n\,p;\ n\,p\,.\,a : n\,p\,.\,m = \frac{a\,n\,p}{m\,n\,p}.$$

$$2.\ \frac{m\,n\,p}{m\,n} = p;\quad p\,.\,b : p\,.\,m\,n = \frac{b\,p}{m\,n\,p}.$$

$$3.\ \frac{m\,n\,p}{m\,p} = n;\quad n\,.\,d : n\,.\,m\,p = \frac{d\,n}{m\,n\,p}.$$

$$4.\ \frac{m\,n\,p}{n\,p} = m;\quad m\,.\,c : m\,.\,n\,p = \frac{c\,m}{m\,n\,p}.$$

Folglich ist:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m\,n} + \frac{d}{m\,p} - \frac{c}{n\,p} = \frac{a\,n\,p + b\,p + d\,n - c\,m}{m\,n\,p}.$$

**Zusatz 2.** Haben Zähler und Nenner eines Bruches einen gemeinschaftlichen Factor, so kann man durch diesen den ganzen Bruch dividiren, um ihn auf einen einfachern Ausdruck zurück zu führen, ohne den Werth des Bruches selbst zu ändern, z. B.:

$$\frac{15\,a\,b}{5\,c} = \frac{3\,a\,b}{c}.\quad \text{cf. §. 47 u. 56.}$$

**Zusatz 3.** Sollen Brüche auf ihre einfachsten Ausdrücke reducirt werden, so sind Zähler und Nenner, wenn sie Producte sind, in ihre Factoren zu zerlegen. Z. B.

$$\frac{ab - bc}{am - cm} = \frac{(a - c)b}{(a - c)m} = \frac{b}{m}. \text{ cf. §. 56.}$$

## §. 59.

### Beispiele zur Einübung der vorangehenden Lehrsätze.

I.

1. $\frac{12ab}{3b} = 4a$; denn $4a.3b = 12ab$.

2. $\frac{9a^4}{3a^2} = 3a^2$; denn $3a^2.3a^2 = 9a^4$.

3. $\frac{14a^2b^2c}{7a^2b} = 2bc$; denn $2bc.7a^2b = 14a^2b^2c$.

4. $\frac{35a^3bx}{7ab^2x} = 5a^2b^{-1}$; denn $5a^2b^{-1}.7ab^2x = 35a^3bx$. *

II.

5. $\frac{ab + ac}{a} = \frac{ab}{a} + \frac{ac}{a} = b + c$.

6. $\frac{12mn + 4np}{4n} = \frac{12mn}{4n} + \frac{4np}{4n} = 3m + p$.

7. $\frac{27a^3b^2c + 9b^2c}{3b^2c} = \frac{27a^3b^2c}{3b^2c} + \frac{9b^2c}{3b^2c} = 9a^3 + 3$.

III.

8. $\frac{ax - ay}{a} = \frac{ax}{a} - \frac{ay}{a} = x - y$.

9. $\frac{15d^2m^3 - 3d^2m^2}{3d^2m^2} = \frac{15d^2m^3}{3d^2m^2} - \frac{3d^2m^2}{3d^2m^2} = 5m - 1$.

10. $\frac{18acdm^2 - 9a^2dm}{3adm} = \frac{18acdm^2}{3adm} - \frac{9a^2dm}{3adm} = 6cm - 3a$.

11. $\frac{12ab - 36bc - 20b^2 + 4bd}{4b} = 3a - 9c - 5b + d$.

IV.

12. $\frac{3ab.6bc}{3b} = a.6bc = 3ab.2c = 6abc$.

13. $\frac{24mn.6mp}{6m} = 4n.6mp = 24mn.p = 24mnp$.

---

* $\frac{b}{b^2} = \frac{1}{b}$ oder nach einer andern Schreibweise $= b^{-1}$,

$\frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$; später des Nähern mehr.

14. $\frac{21\,a^2bc.28\,abm}{7\,ab} = 3\,ac.28\,abm = 21\,a^2bc.4\,m = 84\,a^2bcm.$

15. $\frac{9\,ab}{3\,b}.3\,d = \frac{9\,ab.3\,d}{3\,b} = 3\,a.3\,d = 9\,ad.$

16. $\frac{35\,a^3bc}{7\,a^2c}.2\,m = \frac{35\,a^3bc.2\,m}{7\,a^2c} = 5\,ab.2\,m = 10\,abm.$

V.

17. $\frac{8\,b}{2\,c}:4\,b = \frac{8\,b:4\,b}{2\,c} = \frac{8\,b}{4\,b}:2\,c = \frac{1}{c}.$

18. $\frac{4\,mc}{12\,c}:2\,m = \frac{4\,mc:2\,m}{12\,c} = \frac{4\,mc}{2\,m}:12\,c = \frac{1}{6}.$

19. $\frac{35\,a^2bc}{2\,c}:7\,a^2b = \frac{35\,a^2bc:7\,a^2b}{2\,c} = \frac{35\,a^2bc}{7\,a^2b}:2\,c = 2\frac{1}{2}.$

VI.

20. $\frac{28\,m^4n^2}{4\,m^2n.7\,m^2n} = \frac{28\,m^4n^2}{4\,m^2n}:7\,m^2n = \frac{28\,m^4n^2}{7\,m^2n}:4\,m^2n = 1.$

21. $\frac{18\,bcd}{3\,d.12\,abc} = \frac{18\,bcd}{3\,d}:12\,abc = \frac{18\,bcd}{12\,abc}:3\,d = \frac{1}{2}\,a.$

VII.

22. $15\,x:\frac{5\,x}{a} = \frac{15\,x.a}{5\,x} = 3\,a.$

23. $3\,ab:\frac{1}{2\,b} = \frac{3\,ab.2\,b}{1} = 6\,ab^2.$

24. $10\,mn:\frac{5\,m}{2\,n} = \frac{10\,mn.2\,n}{5\,m} = 4\,n^2.$

VIII.

25. $\left(\frac{35\,a^2bc}{7\,ac}\right)\left(\frac{2\,m}{5\,abm}\right) = \frac{70\,a^2bcm}{35\,a^2bcm} = 2.$

26. $\frac{am}{y}.\frac{x}{am} = \frac{amx}{amy} = \frac{x}{y}.$

27. $\frac{5\,a^2bd}{4\,an}.\frac{12\,bn^2}{15\,bd} = \frac{60\,a^2b^2dn^2}{60\,abdn} = abn.$

IX.

28. $\frac{4\,ab}{9}:\frac{2\,b}{5\,a} = \frac{4\,ab.5\,a}{9.2\,b} = \frac{20\,a^2b}{18\,b} = \frac{10\,a^2}{9}.$

29. $\frac{12\,ab}{3\,x^2z}:\frac{4\,abx}{2\,bxz} = \frac{12\,ab.2\,bxz}{3\,x^2z.4\,abx} = \frac{24\,ab^2xz}{12\,abx^3z} = \frac{2\,b}{x^2}.$

30. $\frac{4\,x^2}{3\,z^3}:\frac{6\,x^3}{9\,z^4} = \frac{4\,x^2.9\,z^4}{3\,z^3.6\,x^3} = \frac{36\,x^2z^4}{18\,x^3z^3} = \frac{2\,z}{x}.$

X.

31. $\frac{2d}{n}+\frac{m}{g}=\frac{2dg+mn}{gn}$.

32. $\frac{3ab}{2bc}-\frac{5c}{4d}+\frac{7d}{8m}=\frac{12abdm-10bc^2m+7bcd^2}{8bcdm}$.

33. $\frac{5n}{2p}+3m-\frac{3g}{7m}+\frac{e}{14mp}=\frac{35mn+42m^2p-6gp+e}{14mp}$.

XI.

34. $\frac{ax+x^2}{2bx-cx}=\frac{x(a+x)}{x(2b-c)}=\frac{a+x}{2b-c}$.

35. $\frac{ax-a}{3bx-3b}=\frac{a(x-1)}{3b(x-1)}=\frac{a}{3b}$.

36. $\frac{21y-3x}{49y-7x}=\frac{3(7y-x)}{7(7y-x)}=\frac{3}{7}$.

37. $\frac{12a^2b+6ax^2}{24ax-18a^2c}=\frac{6a(2ab+x^2)}{6a(4x-3ac)}=\frac{2ab+x^2}{4x-3ac}$.

## bb. Quotienten und Producte aus algebraischen Zahlen.

§. 60.

**Lehrsatz 1.** Zwei positive Ausdrücke werden durch einander dividirt, wenn man den Quotienten aus ihren absoluten Werthen positiv setzt:

$$\frac{(+a)}{(+b)}=+\frac{a}{b}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$\frac{(+a)}{(+b)}=\frac{(0+a)}{(+b)}. \quad \text{cf. §. 21.}$$

$$=\frac{0}{(+b)}+\frac{a}{(+b)}. \quad \text{cf. §. 48.}$$

$$=0+\frac{a}{b}. \quad \text{cf. §. 21; §. 49, 3.}$$

$$=+\frac{a}{b}.$$

**Lehrsatz 2.** Zwei negative Ausdrücke werden durch einander dividirt, wenn man den Quotienten aus ihren absoluten Werthen positiv setzt:

$$\frac{(-a)}{(-b)} = + \frac{a}{b}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$\frac{(-a)}{(-b)} = \frac{(0-a)}{(-b)}, \quad \text{cf. §. 22.}$$

$$= \frac{0}{(-b)} - \frac{a}{(-b)}, \quad \text{cf. §. 49.}$$

$$= 0 - \frac{a}{(0-b)},$$

$$= -\left(-\frac{a}{b}\right) = + \frac{a}{b}. \quad \text{cf. §. 28, II.}$$

**Lehrsatz 3.** Ein positiver und negativer Ausdruck werden durch einander dividirt, wenn man den Quotienten aus ihren absoluten Werthen negativ setzt:

$$\frac{(-a)}{(+b)} = - \frac{a}{b}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$\frac{(-a)}{(+b)} = \frac{(0-a)}{(+b)};$$

$$= \frac{0}{(+b)} - \frac{a}{(+b)}$$

$$= 0 - \frac{a}{(0+b)}$$

$$= -\left(+\frac{a}{b}\right) = - \frac{a}{b}.$$

**Regel.**

Bei der Division geben wie bei der Multiplication gleiche Zeichen plus und ungleiche minus.

**Zusatz 1.** Eine algebraische Summa wird durch eine algebraische Zahl dividirt, wenn man jedes Glied derselben durch die Zahl dividirt und die Zeichen nach vorstehenden Lehrsätzen setzt:

$$\frac{ab + ac - ad}{a} = b + c - d.$$

### Beweis.

Multiplicirt man beide Ausdrücke mit (+ a), so ist:

$$\left(\frac{ab + ac - ad}{a}\right).a = (b + c - d).a.$$

Nach §. 46 und §. 34 gibt das aber

$$ab + ac - ad = ab + ac - ad.$$

**Zusatz 2.** Der Werth eines Quotienten bleibt unverändert, wenn man Dividend und Divisor mit (− 1) multiplicirt:

$$\frac{-2ab + 4ab}{-2cd} = \frac{2ab - 4ab}{2cd} = -\frac{ab}{cd}.$$

### Beweis.

Es ist

$$\frac{-2ab + 4ab}{-2cd} = \frac{+2ab}{-2cd} = -\frac{ab}{cd}$$

und

$$\left(\frac{-2ab + 4ab}{-2cd}\right)(-1) = \frac{2ab - 4ab}{2cd} = \frac{-2ab}{+2cd} = -\frac{ab}{cd}.$$

## §. 61.

**Erklärung 1.** Die Glieder einer algebraischen Summa können nicht blos Producte (§. 60 Zusatz 1), sondern auch Producte und Quotienten sein; sind aber immer nach den über die Quotienten und Producte aufgestellten Sätze zu behandeln. Z. B.

1. $$\left(\frac{5a^2}{2} + 3ab + \frac{4a}{3b}\right) : 6ab$$
$$= \frac{5a^2}{12ab} + \frac{3ab}{6ab} + \frac{4a}{18ab^2}$$
$$= \frac{5a}{12b} + \frac{1}{2} + \frac{2}{9b^2}.$$

2. $$\left(2ab + \frac{5bc}{2cd} - \frac{3de}{4mn} - x\right).\left(+\frac{3cd}{5ab}\right)$$
$$= \frac{6abcd}{5ab} + \frac{15bc^2d}{10abcd} - \frac{9cd^2e}{20abmn} - \frac{3cdx}{5ab}$$
$$= \frac{6cd}{5} + \frac{3c}{2a} - \frac{9cd^2e}{20abmn} - \frac{3cdx}{5ab}.$$

3. $$\left(-\frac{2am}{3bc} + 6cd\right) : \left(-\frac{2a}{5b}\right) = \left(-\frac{2am}{3bc} + 6cd\right).\left(-\frac{5b}{2a}\right)$$
$$= \frac{10abm}{6abc} - \frac{30bcd}{2a} = \frac{5m}{3c} - \frac{15bcd}{a}.$$

**Erklärung 2.** Wie man einen Quotienten, dessen Dividend eine algebraische Summa, in eine algebraische Summa verwandeln kann, so kann man jede algebraische Summa, die zu Gliedern Quotienten hat, in einen Quotienten verwandeln. (cf. §. 58.) Z. B.

$$\frac{5am}{2am - np} - \frac{3am - 4np}{5am + 2np} - \frac{2am}{3np} =$$

$$[[3np.(5am + 2np).5am] - [(3am - 4np).3np.(2am - np)]$$
$$- [2am.(2am - np)(5am + 2np)]] : 3np.(2am - np)(5am + 2np) =$$

$$[(15amnp + 6n^2p^2).5am - (3am - 4np)(6amnp - 3n^2p^2)$$
$$- (4a^2m^2 - 2amnp)(5am + 2np)] : 3np.(2am - np)(5am + 2np) =$$

$$[75a^2m^2np + 30amn^2p^2 - (3am - 4np)(6amnp - 3n^2p^2)$$
$$- 20a^3m^3 + 2a^2m^2np + 4amn^2p^2] : 3np.(2am - np)(5am + 2np) =$$

$$(75a^2m^2np + 30amn^2p^2 - 18a^2m^2np + 33amn^2p^2 - 12n^3p^3$$
$$- 20a^3m^3 + 2a^2m^2np + 4amn^2p^2) : 3np.(2am - 2np)(5am + 2np) =$$

$$\frac{59a^2m^2np - 20a^3m^3 + 67amn^2p^2 - 12n^3p^3}{3np.(2am - 2np)(5am + 2np)}.$$

Anmerkung. Algebraische Summen, in welchen die Quotienten wieder aus algebraischen Summen bestehen, haben bei der Umformung in Quotienten für den Anfänger Schwierigkeiten, um diese zu vermeiden, hat er dem vorangehenden Beispiel besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Desshalb wurde es auch so umständlich behandelt.

**Erklärung 3.** Zwei algebraische Summen werden dividirt, wenn man das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors dividirt und das Product aus dem gefundenen Quotienten und Divisor vom Dividenden subtrahirt. Aus diesem Rest wählt man wieder ein Glied, in welchem das erste Glied des Divisors enthalten ist, um dividiren zu können. Dies gibt das zweite Glied des Quotienten, welches mit dem Divisor wieder multiplicirt werden muss, damit dieses Product wiederum vom Dividenden abgezogen werden kann. Bleibt Null als Rest, so ist die Operation vollzogen. Z. B.

$$12a^4b - 24a^3bc - 3a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4 : 3a^2b - 6abc + 3bc^2 = 4a^2 - 5c^2$$
$$12a^4b - 24a^3bc + 12a^2bc^2$$
$$- \quad + \quad -$$
$$\overline{\qquad\qquad - 15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4}$$
$$- 15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$\overline{\qquad 0. \qquad}$$

**Erklärung 4.** Ist aber der Dividend kein Vielfaches des Divisors, so bleibt nicht Null, sondern ein Rest. In diesem Falle wird die Division am besten nicht vollzogen, sondern nur angedeutet, aber man hat durch Zerfällung in Factoren (cf. §. 58, 3) einfachere Ausdrücke herzustellen.

Wird die Division gleichwohl vorgenommen, so bildet der Rest, als ein Bruch, dessen Zähler der Rest selbst und dessen Nenner der Divisor ist, das letzte Glied des Quotienten. Dieser tritt in der Form einer unendlichen Reihe auf. Z. B.

1. $$6a^2 - x^2 - ax + ab : 3a + x = 2a - x + \frac{ab}{3a+x}.$$
$$\begin{array}{l} 6a^2 \quad + 2ax \\ - \qquad\; - \\ \hline \qquad - 3ax - x^2 \\ \qquad - 3ax - x^2 \\ \qquad + \qquad + \\ \hline \qquad\qquad + ab \\ \qquad\qquad \overline{3a + x}. \end{array}$$

2. $$1 : 1 - x = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.$$
$$\begin{array}{l} 1 - x \\ - \;\; + \\ \hline \quad x \\ \quad x - x^2 \\ \quad - \;\; + \\ \hline \qquad x^2 \\ \qquad x^2 - x^3 \\ \qquad - \;\; + \\ \hline \qquad\quad x^3 \\ \qquad\quad x^3 - x^4 \\ \qquad\quad - \;\; + \\ \hline \qquad\qquad x^4 \\ \qquad\qquad x^4 - x^5 \\ \qquad\qquad - \;\; + \\ \hline \qquad\qquad\quad x^5. \end{array}$$

So ist auch:

3. $$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + ax^5 + \ldots.$$

4. $a : 1 + b = a - ab + ab^2 - ab^3 + ab^4 - \ldots.$

$$\begin{array}{l}
a + ab \\
\underline{-\quad -} \\
\quad - ab \\
\quad - ab - ab^2 \\
\quad \underline{+ \quad\; +} \\
\qquad\quad ab^2 \\
\qquad\quad ab^2 + ab^3 \\
\qquad\quad \underline{- \quad\;\; -} \\
\qquad\qquad - ab^3 \\
\qquad\qquad - ab^3 - ab^4 \\
\qquad\qquad \underline{+ \quad\;\; +} \\
\qquad\qquad\qquad ab^4 \\
\qquad\qquad\qquad ab^4 + ab^5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{- \quad\;\; -} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - ab^5.
\end{array}$$

So ist auch:

5. $\frac{a}{b+1} = ab^{-1} - ab^{-2} + ab^{-3} - ab^{-4} + \ldots.$

6. $x : a - b = \frac{x}{a} + \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x}{a^3} + \frac{b^3x}{a^4} + \ldots.$

$$\begin{array}{l}
x - \frac{bx}{a} \\
\underline{- \quad +} \\
\quad \frac{bx}{a} \\
\quad \frac{bx}{a} - \frac{b^2x}{a^2} \\
\quad \underline{- \quad\;\; +} \\
\qquad\quad \frac{b^2x}{a^2} \\
\qquad\quad \frac{b^2x}{a^2} - \frac{b^3x}{a^3} \\
\qquad\quad \underline{- \quad\;\; +} \\
\qquad\qquad\quad \frac{b^3x}{a^3} \\
\qquad\qquad\quad \frac{b^3x}{a^3} - \frac{b^4x}{a^4} \\
\qquad\qquad\quad \underline{- \quad\;\; +} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \frac{b^4x}{a^4}.
\end{array}$$

So ist auch:

7. $\frac{x}{a+b} = \frac{x}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x}{a^3} - \frac{b^3x}{a^4} + \frac{b^4x}{a^5} - \frac{b^5x}{a^6} + \ldots$

**Erklärung 5.** Setzt man im Quotienten $\frac{a}{1+b}$ für a die Zahl 1 und für b die Zahl 2, so ist:

$$\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - 2^5 + \frac{2^6}{1+2} = -21 + 21\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

## §. 62.

**Erklärung.** Durch die unendlichen Quotienten werden wir auf das Gebiet der unendlichen Grössen geführt, allein von diesen kann hier nur vorübergehend die Rede sein.

Eine unendliche Grösse ist eine Zahl, die über bestimmte Grenzen hinausgeht. Eine unendlich grosse Grösse ist grösser als jede noch so grosse angebbare Grösse. Eine unendlich kleine Grösse ist kleiner als jede noch so kleine angebbare Grösse. Die Zeichen dafür sind $\infty$, $\frac{1}{\infty}$.

**Lehrsatz.** Ein Quotient, der zum Dividend eine beliebige Zahl und zum Divisor Null hat, ist eine unendlich grosse Grösse:

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

**Beweis.**

Setzen wir im Quotienten $\frac{a}{1-x}$ für x die Zahl 1, so ist:

$$\frac{a}{1-1} = a + a + a + a + a + \ldots = \infty. \quad \text{cf. §. 35, 3.}$$

$$\frac{a}{1-1} = \frac{a}{0}, \quad \text{cf. §. 20;}$$

folglich ist auch:

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

**Zusatz 1.** Ein Quotient, der zum Dividend eine beliebige Zahl und zum Divisor eine unendlich grosse Grösse hat, ist Null:

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

**Beweis.**

Es ist nach dem vorigen Satz:

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

demnach ist auch:

$$a = 0 . \infty, \quad \text{cf. §. 45.}$$

und:

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

**Zusatz 2.** Ein Quotient, der zum Dividend eine unendlich grosse Grösse hat und zum Divisor eine geliebige Zahl, ist unendlich gross:

$$\frac{\infty}{a} = \infty.$$

## §. 63.

**Erklärung.** Aus der Vergleichung zweier Ausdrücke ergeben sich unter der Voraussetzung, dass man es nur mit positiven Zahlen zu thun hat, auch hier (§. 43) noch folgende Lehrsätze:

**Lehrsatz 1.** Grösseres durch Gleiches dividirt, gibt Grösseres:

Es sei $a > b$, so ist:

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}.$$

**Beweis.**

Ist $a > b$, so ist $a - b = d$ und

$$a = b + d.$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit m, so ist:

$$\frac{a}{m} = \frac{b+d}{m} = \frac{b}{m} + \frac{d}{m}, \quad \text{cf. §. 48;}$$

folglich

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m} \text{ und zwar um } \frac{d}{m}.$$

**Zusatz.** Bei zwei Quotienten mit gleichem Divisor ist der grössere Quotient auf Seiten des grössern Dividenden.

**Lehrsatz. 2.** Gleiches durch Grösseres dividirt, gibt Kleineres:

Es sei $a > b$, so ist:

$$\frac{m}{a} < \frac{m}{b}.$$

**Beweis.**

Ist $a > b$, so ist

$$a - b = d.$$

Multipliciren wir auf beiden Seiten mit m, so ist:

$$am - bm = dm. \quad \text{cf. §. 37.}$$

Dividiren wir beide Seiten durch a b, so ist:

$$\frac{am - bm}{ab} = \frac{dm}{ab}, \quad \text{cf §. 47.}$$

$$\frac{am}{ab} - \frac{bm}{ab} = \frac{dm}{ab}, \quad \text{cf. §. 49.}$$

$$\frac{m}{b} - \frac{m}{a} = \frac{dm}{ab}, \quad \text{cf. §. 56.}$$

Folglich ist:

$$\frac{m}{b} > \frac{m}{a} \text{ um } \frac{dm}{ab} \text{ und } \frac{m}{a} < \frac{m}{b} \text{ um } \frac{dm}{ab}.$$

**Zusatz 1.** Bei zwei Quotienten mit gleichen Dividenden ist der grössere Quotient auf Seiten des kleinern Divisor.

**Zusatz 2.** Grösseres durch Kleineres dividirt, gibt Grösseres:

Es sei $a > b$, und $m < n$, so ist:

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{n}.$$

**Beweis.**

Ist $a > b$, so ist:

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}, \quad \text{cf. §. 63, 1.}$$

Ist $m < n$, so ist:

$$\frac{b}{m} > \frac{b}{n}, \quad \text{cf. §. 63, 2;}$$

folglich

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{n}.$$

Anmerkung. Multiplication und Division sind Zahlenverbindungen der zweiten Stufe. Bei Zahlenverbindungen der zweiten Stufe kann man alle Klammern weglassen; bei Zahlenverbindungen der ersten und zweiten Stufe ist das unmöglich. Z. B.

$$[(a \,.\, b) : c] \,.\, d = a \,.\, b : c \,.\, d; \quad [(a + b - c) : d] \,.\, m = [(a + b - c) \,.\, m] : d.$$

## §. 64.

### Schlussanmerkung für den ganzen Abschnitt.

Aus dem bisher Entwickelten ist der innige Zusammenhang der vier Grundoperationen (Species) ersichtlich. Die Addition bildet die Grundlage für Subtraction, Multiplication und Division; denn durch wiederholtes Addiren einer und derselben Zahl kommt man zum Multipliciren, und durch Umkehrung des Addiren und des Multipliciren kommt man zum Subtrahiren und Dividiren.

Addition und Multiplication sind directe, Subtraction und Division sind indirecte Zahlenverbindungen der ersten und zweiten Stufe.

Durch wiederholtes Multipliciren der nämlichen Zahl kommt man zu einer dritten Stufe directer Zahlenverbindungen zum Potenziren, und durch Umkehrung des Potenziren zum Radiziren und Logarithmiren, den zwei indirecten Zahlenverbindungen der dritten Stufe.

Von den Operationen der dritten Stufe handelt der nächste Abschnitt.

## §. 65.

### Beispiele und Aufgaben.

I.

1. $12mn^2 : -4mn = -3n.$

2. $24bcd : -8bd = -3c.$

3. $9a^2b : 27a^2b = \frac{1}{3}.$

4. $-12ac : -9c = \frac{4a}{3}.$

5. $16abc : -20ac = -\frac{4b}{5}.$

6. $\frac{9ab}{-12cd} = -\frac{3ab}{4cd}.$

7. $\frac{-11a^2m^2n}{33am^2} = -\frac{an}{3}.$

8. $\frac{-9a^2m^2nx}{-15a^2mx} = \frac{3mn}{5}.$

9. $\frac{21a^4b^3c^2dx}{7a^3b^2c^2d^2x^2} = 3abd^{-1}x^{-1}.$

10. $\frac{-25a^{10}m^5n^5}{5a^5m^{10}n} = -5a^5m^{-5}n^4.$

11. $\frac{6mx+12nx}{-3x} = -2m-4n.$

12. $\frac{-12a^3b^2+24a^2b^3-36ab^4}{-4ab^2} = 3a^2-6ab+9b^2.$

13. $\frac{3ab}{4bc}\cdot -8d = -\frac{24abd}{4bc} = -\frac{6ad}{c}.$

14. $\frac{17\,c\,d}{21\,a\,m\,n} \cdot -7\,a\,p = -\frac{119\,a\,c\,d\,p}{21\,a\,m\,n} = -\frac{17\,c\,d\,p}{3\,m\,n}$.

15. $\frac{3\,a^2\,b\,c}{27\,a\,c} \cdot 9\,a\,c\,m^2 = \frac{3\,a^2\,b\,c}{27\,a\,c : 9\,a\,c\,m^2} = \frac{3\,a^2\,b\,c}{3 : m^2} = a^2\,b\,c\,m^2$.

16. $\frac{-15\,b\,c}{-3\,c\,d} : 4\,b\,c = \frac{-15\,b\,c}{-12\,b\,c^2\,d} = \frac{5}{4\,c\,d}$.

17. $-a : -\frac{b}{c} = \frac{a\,c}{b}$.

18. $15\,a\,m : -\frac{3\,a\,c}{4\,c} = -\frac{60\,a\,c\,m}{3\,a\,c} = -20\,m$.

19. $4\,m\,n \cdot \frac{2\,c}{3\,d} = \frac{8\,c\,m\,n}{3\,d}$.

20. $-a\,d \cdot -\frac{a\,m}{b\,m} = \frac{a^2\,d}{b}$.

21. $\frac{4\,m\,n^2}{3\,n\,d} : 8\,n = \frac{4\,m\,n^2}{24\,n^2\,d} = \frac{4\,n^2\,(m)}{4\,n^2\,(6\,d)} = \frac{m}{6\,d}$.

22. $\frac{8\,a^4}{3\,b^2} : -4\,a^3 = -\frac{8\,a^4}{12\,a^3\,b^2} = -\frac{2\,a}{3\,b^2}$.

23. $\frac{9\,a\,m\,c}{2\,b\,c} : -3\,a\,m = -\frac{9\,a\,m\,c}{6\,a\,b\,c\,m} = -\frac{3}{2\,b}$.

24. $\frac{27\,m^2}{8\,x^2} : -9\,m^3 = -\frac{27\,m^2 : -9\,m^3}{8\,x^2} = -\frac{3}{8\,m\,x^2}$.

25. $\frac{x}{2\,m} : 3\,x^2 = \frac{x}{6\,m\,x^2} = \frac{1}{6\,m\,x}$.

26. $\frac{a\,x^2}{d^2} \cdot d\,x = \frac{a\,d\,x^3}{d^2} = \frac{a\,x^3}{d}$.

27. $-\frac{2\,c^2}{5\,f\,g} \cdot 15\,d\,g = -\frac{30\,c^2\,d\,g}{5\,f\,g} = -\frac{6\,c^2\,d}{f}$.

28. $\frac{9\,c\,m\,x}{8\,n\,y} : 3\,a\,c\,x = \frac{9\,c\,m\,x}{24\,a\,c\,n\,x\,y} = \frac{3\,m}{8\,a\,n\,y}$.

29. $3\,a\,d^2 : -\frac{6\,b\,m}{5\,a\,d} = -\frac{15\,a^2\,d^3}{6\,b\,m} = -\frac{5\,a^2\,d^3}{2\,b\,m}$.

30. $-\frac{2\,a\,c\,b}{b} : -2\,a\,c = \frac{2\,a\,c\,b}{2\,a\,c\,b} = 1$.

31. $-\frac{5\,m^2}{2\,d} : -10\,m^4 = \frac{5\,m^2}{20\,d\,m^4} = \frac{1}{4\,d\,m^2}$.

32. $-\frac{7\,a\,m}{3\,a\,n^2} : 3\,a\,m = -\frac{7\,a\,m}{9\,a^2\,m\,n^2} = -\frac{7}{9\,a\,n^2}$.

33. $-9\,a\,d : \frac{a\,d}{3\,a\,d} = -\frac{27\,a^2\,d^2}{a\,d} = -27\,a\,d$.

34. $(9\,a - \frac{15\,d}{2\,e} + 27\,d\,e) : 3\,d = \frac{3\,a}{d} - \frac{5}{2\,e} + 9\,e$.

35. $\left(\frac{3m^2}{4b^2} - \frac{5mn}{6bc} - \frac{2n^2}{3c^2}\right) : -\frac{10mn}{3bc} = -\frac{9bcm^2}{40b^2mn} + \frac{15bcmn}{60bcmn}$

$+ \frac{6bcn^2}{30c^2mn} = -\frac{9cm}{40bn} + \frac{1}{4} + \frac{bn}{5cm}.$

36. $\left(9 - \frac{4}{a} + \frac{16}{a^2} + \frac{8}{a^3}\right) . 2a^2 = 18a^2 - 8a + 32 + \frac{16}{a}.$

37. $\left(15am - 9bm + \frac{7b}{4a}\right) . -\frac{2a}{3m} = -10a^2 + 6ab - \frac{7b}{6m}.$

38. $\left(-\frac{3ac}{4agm} - \frac{2mn}{3den^2} + 5x\right) . -3agmn = \frac{9acn}{4} + \frac{2agm^2}{de} - 15agmnx.$

39. $\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{3m} - 4 + \frac{3n}{q}\right) : \frac{6bn}{7mq} = \frac{7amq}{6b^2n} + \frac{7q}{9n} - \frac{14mq}{3bn} + \frac{7m}{2b}.$

40. $\frac{9ab}{4b^2c} . -\frac{10cd}{12mn} = -\frac{90abcd}{48b^2cnm} = -\frac{6bc(15ad)}{6bc(8bmn)} = -\frac{15ad}{8bmn}.$

41. $-\frac{77mn^2}{9dg} . -\frac{3g}{7n^2} = \frac{11m}{3d}.$

42. $-\frac{24acm^2}{25x^2} : -\frac{8a^2c^2}{5x^3} = \frac{120acm^2x^3}{200a^2c^2x^2} = \frac{3m^2x}{5ac};$

$-\frac{24acm^2}{25x^2} : -\frac{8a^2c^2}{5x^3} = -\frac{3m^2}{5} : -\frac{ac}{x} = \frac{3m^2x}{5ac}.$

43. $-\frac{4b^3}{5c^4} : -\frac{3b^4}{8c^6} = \frac{32b^3c^6}{15b^4c^4} = \frac{32c^2}{15b}.$

44. $\frac{8a^2}{15x^3} : \frac{2a}{3x} = \frac{24a^2x}{30ax^3} = \frac{4a}{5x^2}.$

45. $-12a^4m . \frac{3n}{4a^2m} = -9a^2n.$

46. $\frac{m+2n}{3cd^2} . -3cd = -\frac{3cd(m+2n)}{3cd^2} = -\frac{m+2n}{d}.$

47. $(12a^3 + 28a^4 + 16a^5) : (3a + 7a^2 + 4a^3) = 4a^2.$

48. $(63 + 62m + 15m^2) : (9 + 5m) = 7 + 3m.$

49. $(18 + 15c + 60c^2 + 49c^3 + 32c^4 + 24c^5) : (3 + 8c^2) =$
$6 + 5c + 4c^2 + 3c^3.$

50. $(12n + 36n^2 + 63n^3 + 92n^4 + 38n^5 + 8n^6 + 11n^7) : (2 + 5n$
$+ 8n^2 + 11n^3) = 6n + 3n^2 + n^4.$

51. $(2c^4 + 17ac^3 + 40a^2c^2 + 34a^3c + 9a^4) : (c^2 + 7ac + 9a^2) =$
$2c^2 + 3ac + a^2.$

52. $\left\{\left[\left(\frac{ab + 2d}{3cd}\right) . (-2cd + 9) : -\frac{3ab}{7cd}\right] : -\frac{7}{9ab}\right\} =$

$\left[\left(\frac{(ab + 2d) . (-2cd + 9) . -7cd}{3cd . -3ab}\right) : -\frac{7}{9ab}\right] =$

$$\frac{[(-2abcd - 4cd^2 + 9ab + 18d) . -7cd] . -9ab}{(-9abcd) . (-7)} =$$

$$\frac{(14abc^2d^2 + 28c^2d^3 - 63abcd - 126cd^2) . -9ab}{-9abcd . -7} =$$

$$\frac{14abc^2d^2 + 28c^2d^3 - 63abcd - 126cd^2}{7cd} = 2abcd + 4cd^2 - 9ab - 18d.$$

53. $\frac{5ab}{2} + \frac{9b}{5} - 2m = \frac{25ab + 18b - 20m}{10}.$

54. $\frac{6d}{7e^2} - \frac{3e}{2d} + \frac{2d}{3e} = \frac{36d^2 - 63e^3 + 28d^2e}{42de^2}.$

55. $x - \frac{4a}{3c^2} + \frac{5d}{3cm} = \frac{3c^2mx - 4am + 5cd}{3c^2m}.$

56. $\frac{5}{24n^2} + \frac{1}{4m} + \frac{3np}{4m^2} = \frac{5m^2 + 24mn^2 + 18n^3p}{24m^2n^2}.$

57. $\frac{1}{4} + \frac{3ac}{8bd} + \frac{5e}{12b^2} + \frac{7m}{16b^3n} = \frac{12b^3dn + 18ab^2cn + 20bden + 21dm}{48b^3dn}.$

58. $\frac{3a}{5d} + \frac{7m}{10n} + 2x = \frac{6an + 7dm + 20dnx}{10dn}.$

59. $\frac{3c}{2a} - \frac{5c - a}{3b} + \frac{3a - 4c}{2a} = \frac{9bc - 10ac + 2a^2 + 9ab - 12bc}{6ab} =$

$\frac{2a^2 + 9ab - 10ac - 3bc}{6ab}.$

60. $\frac{2a - 3b + 10}{2ab} + \frac{2 - 4ac}{4ac} - \frac{4 + 3ac + bd}{3b} =$

$\frac{12ac - 18bc + 60c + 6b - 12abc - 16ac - 12a^2c^2 - 4abcd}{12abc} =$

$\frac{60c - 18bc + 6b - 12abc - 4ac - 12a^2c^2 - 4abcd}{12abc}.$

II.

61. $12abc : 4ab . =$

62. $15a^2bd : 3ad^2 =$

63. $-9m^2ng : 3mn =$

64. $27x^2yh : -9xy =$

65. $\frac{18ac^2}{7ac} . -14c . =$

66. $-\frac{8am^2}{13dn} . -26dn =$

67. $(14am - 21bm - 56cm) : (-7m) =$

68. $(9cm^2 + 33cd + 27cdm - 15bcm) : -3c =$

69. $(-63a^2 - 15ab + 31ac + 108ad + 18b^2 - 33bc + 3bd + 14c^2 - 17cd - 45d^2) : (-7a + 3b - 2c + 5d) =$

70. $(78a^2 - 9ab - 15b^2) : (13a + 5b) =$

71. $\left(\frac{5m^2}{2n} + 3n^2m + 9n^2p\right) : (-12m^2n) =$

72. $(37{,}7b^2 + 47{,}867bc + 1{,}716c^2) : (5{,}8b + 7{,}15c) =$

73. $(46{,}324m^2 + 143{,}268mn + 73{,}44n^2) : (7{,}4m + 4{,}8n) =$

74. $\left(\frac{d^2}{4} + \frac{85de}{168} + \frac{e}{4}\right) : \left(\frac{d}{3} + \frac{2e}{7}\right) =$

75. $(49b^2 + 39\frac{2}{3}bc + 8c^2) : \left(7\frac{b}{4} + \frac{2c}{3}\right) =$

76. $\left(\frac{m^2}{4} - \frac{mp}{4} + \frac{2mn}{3} + \frac{4n^2}{9} + \frac{4mq}{5} - \frac{up}{3} + \frac{p^2}{16} + 1\frac{1}{16}nq - \frac{2pq}{5} + \frac{16q}{25}\right) : \left(\frac{m}{2} + \frac{2n}{3} + \frac{4q}{5} - \frac{p}{4}\right) =$

77. $\frac{12amn}{bc + ce} \cdot -c =$

78. $\frac{15ab - 13y}{7ab - 15y} \cdot -\frac{ab}{7y} =$

79. $\frac{5ab - 7cd}{9ac - 3b} \cdot (7ab - 3c) =$

80. $\frac{6ad + 2c}{(3ad - 5c)mn} \cdot (3a - 5cd) =$

81. $\left(\frac{7ab + 3ac}{(4m - 3n) \cdot (-x)}\right) \cdot \left(-\frac{5c + 3a}{7m + 2n}\right) =$

82. $\left(\frac{14ac - 21bc}{5ab - 3by}\right) \cdot \left(\frac{5a^2 - 2ay}{21bc - 11cy} + 19 - y\right) =$

83. $\left[\left(\frac{5am}{9cd} \cdot -\frac{3cm}{7de} \cdot -\frac{2cg}{7cm}\right) : \frac{cgx}{4ay}\right] =$

84. $\left[\left(\frac{12ab + 8bc}{5cd} : (4g + bc)\right) - 0{,}9ac + 19d - 4cd\right] =$

85. $\left[\left(\frac{36 - 72dn}{(1 - y) \cdot -2a} : \frac{33 - 77dn}{3 - 7ay}\right) - 4dny\right] =$

86. $\frac{5bc - 10cd}{6dg - 8cd} : \frac{4bd - 6dg}{9bd - 12bc} =$

87. $\left(-\frac{4am}{9ac} \cdot \frac{6b^2m}{15an}\right) : \left(-\frac{5an}{7ac}\right) \cdot$

88. $\frac{12m}{(x + y)^2} : 6(x + y) =$

89. $\frac{10am}{6n-4p} : \frac{8aq}{4d-2g} =$

90. $\frac{9ac+2bc}{2b} + \frac{ac-3bc}{4c} =$

91. $\frac{15a-12c}{3ac} - \frac{12b-6}{2a} + \frac{4}{c} =$

92. $\frac{ab-3b}{c} + \frac{a}{2b} + \frac{a^2-b^2-ab}{bc} - \frac{2c}{d} =$

93. $\frac{14d-7m}{9d} - \frac{4n-x}{2x} + \frac{mx+bn}{2dx} - \frac{d}{2} =$

94. $\frac{15amx-17}{2am-22x} - 3d =$

95. $\frac{1+7x}{14-21x} - \frac{3-9x}{5x-5} =$

96. $\frac{12a-8x}{6a-9x} + \frac{4a+7x}{9a-9x} =$

97. $\frac{3a+2b-4cd}{5a-6b} - \frac{2a-7b-9cd}{2ad+7b} =$

98. $\frac{3c-13m}{5c-5m} + \frac{3}{10} - \frac{2c-7}{4c-11} =$

99. $\left\{\left[\left(\frac{5d-7e}{6d-9e} - \frac{7d-13e}{4d-6e}\right) : \left(\frac{7e-5d}{2d-4e} - 2d\right)\right] \cdot \frac{9de}{2m}\right\} =$

100. $\left\{\left[\left(\frac{2b-(3d-2e)}{m} \cdot \frac{bcm-bdm}{b+d+e}\right) : ab\right] : \left(\frac{2bm+3dm-c}{2bm-6bn} - \right.\right.$

$\left.\left.\frac{2b+3d}{m-3b}\right) \cdot -19\right\} =$

Anmerkung. Zur weiteren Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 13—40, Heis §. 18—28, §. 33 b.

# Zweiter Abschnitt.

# Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

## I. Potenzen.

### a. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§. 66.

**Erklärung 1.** Eine Potenz ist ein Product aus gleichen Factoren. Daher heisst potenziren, eine Zahl so oft als Factor setzen als eine andere gegebene Zahl Einheiten hat.

Die wiederholt als Factor zu setzende Zahl heisst Dignand (Basis, Grundzahl, Wurzel) und die Zahl, welche angibt, wie oft der Dignand als Factor zu behandeln ist, heisst Exponent.

**Erklärung 2.** Es sei der Dignand a und der Exponent m, so ist:

$$a^m$$

— sprich: a hoch m oder a zur $m^{ten}$ — der allgemeine Ausdruck einer Potenz. Der Dignand mit dem Exponenten potenzirt, gibt die Potenz. Diese Potenz sei eine Zahl p, da eine Zahl potenzirt, immer wieder eine Zahl gibt, so ist:

$$a^m = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\,.\, m \text{ mal} = p.$$

Der Ausdruck $a^m$ heisst die formelle und p die entwickelte Potenz.

**Zusatz 1.** Jedes Product aus gleichen Factoren ist gleich einer Potenz, deren Dignand der gleiche Factor und deren Exponent die Anzahl der Factoren ist:

**Erklärung 4.** Ist aber der Dividend kein Vielfaches des Divisors, so bleibt nicht Null, sondern ein Rest. In diesem Falle wird die Division am besten nicht vollzogen, sondern nur angedeutet, aber man hat durch Zerfällung in Factoren (cf. §. 58, 3) einfachere Ausdrücke herzustellen.

Wird die Division gleichwohl vorgenommen, so bildet der Rest, als ein Bruch, dessen Zähler der Rest selbst und dessen Nenner der Divisor ist, das letzte Glied des Quotienten. Dieser tritt in der Form einer unendlichen Reihe auf. Z. B.

$$1.\quad 6a^2 - x^2 - ax + ab : 3a + x = 2a - x + \frac{ab}{3a+x}.$$

$$\begin{array}{l} 6a^2 \quad + 2ax \\ \underline{- \qquad\quad -} \\ \quad - 3ax - x^2 \\ \quad - 3ax - x^2 \\ \underline{\quad + \qquad +} \\ \qquad\qquad + ab \\ \qquad\qquad \frac{}{3a+x}. \end{array}$$

$$2.\quad 1 : 1 - x = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

$$\begin{array}{l} 1 - x \\ \underline{- \;\; +} \\ \quad x \\ \quad x - x^2 \\ \underline{\quad - \;\; +} \\ \qquad x^2 \\ \qquad x^2 - x^3 \\ \underline{\qquad - \;\; +} \\ \qquad\quad x^3 \\ \qquad\quad x^3 - x^4 \\ \underline{\qquad\quad - \;\; +} \\ \qquad\qquad x^4 \\ \qquad\qquad x^4 - x^5 \\ \underline{\qquad\qquad - \;\; +} \\ \qquad\qquad\quad x^5. \end{array}$$

So ist auch:

$$3.\quad \frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + ax^5 + \ldots.$$

4. $a : 1 + b = a - ab + ab^2 - ab^3 + ab^4 - \ldots$

$$\begin{array}{l}
a + ab \\
- \quad - \\
\hline
- ab \\
- ab - ab^2 \\
+ \quad + \\
\hline
ab^2 \\
ab^2 + ab^3 \\
- \quad - \\
\hline
- ab^3 \\
- ab^3 - ab^4 \\
+ \quad + \\
\hline
ab^4 \\
ab^4 + ab^5 \\
- \quad - \\
\hline
- ab^5.
\end{array}$$

So ist auch:

5. $\dfrac{a}{b + 1} = ab^{-1} - ab^{-2} + ab^{-3} - ab^{-4} + \ldots$

6. $x : a - b = \dfrac{x}{a} + \dfrac{bx}{a^2} + \dfrac{b^2x}{a^3} + \dfrac{b^3x}{a^4} + \ldots$

$$\begin{array}{l}
x - \dfrac{bx}{a} \\
- \quad + \\
\hline
\dfrac{bx}{a} \\
\dfrac{bx}{a} - \dfrac{b^2x}{a^2} \\
- \quad + \\
\hline
\dfrac{b^2x}{a^2} \\
\dfrac{b^2x}{a^2} - \dfrac{b^3x}{a^3} \\
- \quad + \\
\hline
\dfrac{b^3x}{a^3} \\
\dfrac{b^3x}{a^3} - \dfrac{b^4x}{a^4} \\
- \quad + \\
\hline
\dfrac{b^4x}{a^4}.
\end{array}$$

So ist auch:

7. $\frac{x}{a+b} = \frac{x}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x}{a^3} - \frac{b^3x}{a^4} + \frac{b^4x}{a^5} - \frac{b^5x}{a^6} + \ldots$

**Erklärung 5.** Setzt man im Quotienten $\frac{a}{1+b}$ für a die Zahl 1 und für b die Zahl 2, so ist:

$$\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - 2^5 + \frac{2^6}{1+2} = -21 + 21\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

## §. 62.

**Erklärung.** Durch die unendlichen Quotienten werden wir auf das Gebiet der unendlichen Grössen geführt, allein von diesen kann hier nur vorübergehend die Rede sein.

Eine unendliche Grösse ist eine Zahl, die über bestimmte Grenzen hinausgeht. Eine unendlich grosse Grösse ist grösser als jede noch so grosse angebbare Grösse. Eine unendlich kleine Grösse ist kleiner als jede noch so kleine angebbare Grösse. Die Zeichen dafür sind $\infty$, $\frac{1}{\infty}$.

**Lehrsatz.** Ein Quotient, der zum Dividend eine beliebige Zahl und zum Divisor Null hat, ist eine unendlich grosse Grösse:

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

**Beweis.**

Setzen wir im Quotienten $\frac{a}{1-x}$ für x die Zahl 1, so ist:

$$\frac{a}{1-1} = a + a + a + a + a + \ldots = \infty. \quad \text{cf. §. 35, 3.}$$

$$\frac{a}{1-1} = \frac{a}{0}, \quad \text{cf. §. 20;}$$

folglich ist auch:

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

**Zusatz 1.** Ein Quotient, der zum Dividend eine beliebige Zahl und zum Divisor eine unendlich grosse Grösse hat, ist Null:

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

**Beweis.**

Es ist nach dem vorigen Satz:

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

demnach ist auch:

$$a = 0 . \infty, \quad \text{cf. §. 45.}$$

und:

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

**Zusatz 2.** Ein Quotient, der zum Dividend eine unendlich grosse Grösse hat und zum Divisor eine geliebige Zahl, ist unendlich gross:

$$\frac{\infty}{a} = \infty.$$

## §. 63.

**Erklärung.** Aus der Vergleichung zweier Ausdrücke ergeben sich unter der Voraussetzung, dass man es nur mit positiven Zahlen zu thun hat, auch hier (§. 43) noch folgende Lehrsätze:

**Lehrsatz 1.** Grösseres durch Gleiches dividirt, gibt Grösseres:

Es sei $a > b$, so ist:

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}.$$

**Beweis.**

Ist $a > b$, so ist $a - b = d$ und

$$a = b + d.$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit m, so ist:

$$\frac{a}{m} = \frac{b + d}{m} = \frac{b}{m} + \frac{d}{m}, \quad \text{cf. §. 48;}$$

folglich

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m} \text{ und zwar um } \frac{d}{m}.$$

**Zusatz.** Bei zwei Quotienten mit gleichem Divisor ist der grössere Quotient auf Seiten des grössern Dividenden.

**Lehrsatz. 2.** Gleiches durch Grösseres dividirt, gibt Kleineres:

Es sei $a > b$, so ist:

$$\frac{m}{a} < \frac{m}{b}.$$

### Beweis.

Ist $a > b$, so ist

$$a - b = d.$$

Multipliciren wir auf beiden Seiten mit m, so ist:

$$am - bm = dm. \quad \text{cf. §. 37.}$$

Dividiren wir beide Seiten durch a b, so ist:

$$\frac{am - bm}{ab} = \frac{dm}{ab}, \quad \text{cf §. 47.}$$

$$\frac{am}{ab} - \frac{bm}{ab} = \frac{dm}{ab}, \quad \text{cf. §. 49.}$$

$$\frac{m}{b} - \frac{m}{a} = \frac{dm}{ab}, \quad \text{cf. §. 56.}$$

Folglich ist:

$$\frac{m}{b} > \frac{m}{a} \text{ um } \frac{dm}{ab} \text{ und } \frac{m}{a} < \frac{m}{b} \text{ um } \frac{dm}{ab}.$$

**Zusatz 1.** Bei zwei Quotienten mit gleichen Dividenden ist der grössere Quotient auf Seiten des kleinern Divisor.

**Zusatz 2.** Grösseres durch Kleineres dividirt, gibt Grösseres:

Es sei $a > b$, und $m < n$, so ist:

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{n}.$$

### Beweis.

Ist $a > b$, so ist:

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}, \quad \text{cf. §. 63, 1.}$$

Ist $m < n$, so ist:

$$\frac{b}{m} > \frac{b}{n}, \quad \text{cf. §. 63, 2;}$$

folglich

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{n}.$$

Anmerkung. Multiplication und Division sind Zahlenverbindungen der zweiten Stufe. Bei Zahlenverbindungen der zweiten Stufe kann man alle Klammern weglassen; bei Zahlenverbindungen der ersten und zweiten Stufe ist das unmöglich. Z. B.

$$[(a.b):c].d = a.b:c.d; \quad [(a+b-c):d].m = [(a+b-c).m]:d.$$

## §. 64.

### Schlussanmerkung für den ganzen Abschnitt.

Aus dem bisher Entwickelten ist der innige Zusammenhang der vier Grundoperationen (Species) ersichtlich. Die Addition bildet die Grundlage für Subtraction, Multiplication und Division; denn durch wiederholtes Addiren einer und derselben Zahl kommt man zum Multipliciren, und durch Umkehrung des Addiren und des Multipliciren kommt man zum Subtrahiren und Dividiren.

Addition und Multiplication sind directe, Subtraction und Division sind indirecte Zahlenverbindungen der ersten und zweiten Stufe.

Durch wiederholtes Multipliciren der nämlichen Zahl kommt man zu einer dritten Stufe directer Zahlenverbindungen zum Potenziren, und durch Umkehrung des Potenziren zum Radiziren und Logarithmiren, den zwei indirecten Zahlenverbindungen der dritten Stufe.

Von den Operationen der dritten Stufe handelt der nächste Abschnitt.

## §. 65.

### Beispiele und Aufgaben.

I.

1. $12mn^2 : -4mn = -3n.$

2. $24bcd : -8bd = -3c.$

3. $9a^2b : 27a^2b = \frac{1}{3}.$

4. $-12ac : -9c = \frac{4a}{3}.$

5. $16abc : -20ac = -\frac{4b}{5}.$

6. $\frac{9ab}{-12cd} = -\frac{3ab}{4cd}.$

7. $\frac{-11a^2m^2n}{33am^2} = -\frac{an}{3}.$

8. $\frac{-9a^2m^2nx}{-15a^2mx} = \frac{3mn}{5}.$

9. $\frac{21a^4b^3c^2dx}{7a^3b^2c^2d^2x^2} = 3abd^{-1}x^{-1}.$

10. $\frac{-25a^{10}m^5n^5}{5a^5m^{10}n} = -5a^5m^{-5}n^4.$

11. $\frac{6mx + 12nx}{-3x} = -2m - 4n.$

12. $\frac{-12a^3b^2 + 24a^2b^3 - 36ab^4}{-4ab^2} = 3a^2 - 6ab + 9b^2.$

13. $\frac{3ab}{4bc} \cdot -8d = -\frac{24abd}{4bc} = -\frac{6ad}{c}.$

14. $\frac{17\,cd}{21\,amn} \cdot -7\,ap = -\frac{119\,acdp}{21\,amn} = -\frac{17\,cdp}{3mn}$.

15. $\frac{3\,a^2bc}{27\,ac} \cdot 9\,acm^2 = \frac{3\,a^2bc}{27\,ac:9\,acm^2} = \frac{3\,a^2bc}{3:m^2} = a^2bcm^2$.

16. $\frac{-15\,bc}{-3\,cd} : 4\,bc = \frac{-15\,bc}{-12\,bc^2d} = \frac{5}{4\,cd}$.

17. $-a : -\frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$.

18. $15\,am : -\frac{3\,ac}{4\,c} = -\frac{60\,acm}{3\,ac} = -20\,m$.

19. $4\,mn \cdot \frac{2\,c}{3\,d} = \frac{8\,cmn}{3\,d}$.

20. $-ad \cdot -\frac{am}{bm} = \frac{a^2d}{b}$.

21. $\frac{4\,mn^2}{3\,nd} : 8\,n = \frac{4\,mn^2}{24\,n^2d} = \frac{4\,n^2(m)}{4\,n^2(6\,d)} = \frac{m}{6\,d}$.

22. $\frac{8\,a^4}{3\,b^2} : -4\,a^3 = -\frac{8\,a^4}{12\,a^3b^2} = -\frac{2\,a}{3\,b^2}$.

23. $\frac{9\,amc}{2\,bc} : -3\,am = -\frac{9\,amc}{6\,abcm} = -\frac{3}{2\,b}$.

24. $\frac{27\,m^2}{8\,x^2} : -9\,m^3 = -\frac{27\,m^2 : -9\,m^3}{8\,x^2} = -\frac{3}{8\,mx^2}$.

25. $\frac{x}{2\,m} : 3\,x^2 = \frac{x}{6\,mx^2} = \frac{1}{6\,mx}$.

26. $\frac{ax^2}{d^2} \cdot dx = \frac{adx^3}{d^2} = \frac{ax^3}{d}$.

27. $-\frac{2\,c^2}{5\,fg} \cdot 15\,dg = -\frac{30\,c^2dg}{5\,fg} = -\frac{6\,c^2d}{f}$.

28. $\frac{9\,cmx}{8\,ny} : 3\,acx = \frac{9\,cmx}{24\,acnxy} = \frac{3\,m}{8\,any}$.

29. $3\,ad^2 : -\frac{6\,bm}{5\,ad} = -\frac{15\,a^2d^3}{6\,bm} = -\frac{5\,a^2d^3}{2\,bm}$.

30. $-\frac{2\,acb}{b} : -2\,ac = \frac{2\,acb}{2\,acb} = 1$.

31. $-\frac{5\,m^2}{2\,d} : -10\,m^4 = \frac{5\,m^2}{20\,dm^4} = \frac{1}{4\,dm^2}$.

32. $-\frac{7\,am}{3\,an^2} : 3\,am = -\frac{7\,am}{9\,a^2mn^2} = -\frac{7}{9\,an^2}$.

33. $-9\,ad : \frac{ad}{3\,ad} = -\frac{27\,a^2d^2}{ad} = -27\,ad$.

34. $\left(9\,a - \frac{15\,d}{2\,e} + 27\,de\right) : 3\,d = \frac{3\,a}{d} - \frac{5}{2\,e} + 9\,e$.

35. $\left(\frac{3m^2}{4b^2} - \frac{5mn}{6bc} - \frac{2n^2}{3c^2}\right) : -\frac{10mn}{3bc} = -\frac{9bcm^2}{40b^2mn} + \frac{15bcmn}{60bcmn}$
$+ \frac{6bcn^2}{30c^2mn} = -\frac{9cm}{40bn} + \frac{1}{4} + \frac{bn}{5cm}.$

36. $\left(9 - \frac{4}{a} + \frac{16}{a^2} + \frac{8}{a^3}\right) . 2a^2 = 18a^2 - 8a + 32 + \frac{16}{a}.$

37. $\left(15am - 9bm + \frac{7b}{4a}\right) . -\frac{2a}{3m} = -10a^2 + 6ab - \frac{7b}{6m}.$

38. $\left(-\frac{3ac}{4agm} - \frac{2mn}{3den^2} + 5x\right) . -3agmn = \frac{9acn}{4} + \frac{2agm^2}{de} - 15agmnx.$

39. $\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{3m} - 4 + \frac{3n}{q}\right) : \frac{6bn}{7mq} = \frac{7amq}{6b^2n} + \frac{7q}{9n} - \frac{14mq}{3bn} + \frac{7m}{2b}.$

40. $\frac{9ab}{4b^2c} . -\frac{10cd}{12mn} = -\frac{90abcd}{48b^2cnm} = -\frac{6bc(15ad)}{6bc(8bmn)} = -\frac{15ad}{8bmn}.$

41. $-\frac{77mn^2}{9dg} . -\frac{3g}{7n^2} = \frac{11m}{3d}.$

42. $-\frac{24acm^2}{25x^2} : -\frac{8a^2c^2}{5x^3} = \frac{120acm^2x^3}{200a^2c^2x^2} = \frac{3m^2x}{5ac};$
$-\frac{24acm^2}{25x^2} : -\frac{8a^2c^2}{5x^3} = -\frac{3m^2}{5} : -\frac{ac}{x} = \frac{3m^2x}{5ac}.$

43. $-\frac{4b^3}{5c^4} : -\frac{3b^4}{8c^6} = \frac{32b^3c^6}{15b^4c^4} = \frac{32c^2}{15b}.$

44. $\frac{8a^2}{15x^3} : \frac{2a}{3x} = \frac{24a^2x}{30ax^3} = \frac{4a}{5x^2}.$

45. $-12a^4m . \frac{3n}{4a^2m} = -9a^2n.$

46. $\frac{m + 2n}{3cd^2} . -3cd = -\frac{3cd(m + 2n)}{3cd^2} = -\frac{m + 2n}{d}.$

47. $(12a^3 + 28a^4 + 16a^5) : (3a + 7a^2 + 4a^3) = 4a^2.$

48. $(63 + 62m + 15m^2) : (9 + 5m) = 7 + 3m.$

49. $(18 + 15c + 60c^2 + 49c^3 + 32c^4 + 24c^5) : (3 + 8c^2) =$
$6 + 5c + 4c^2 + 3c^3.$

50. $(12n + 36n^2 + 63n^3 + 92n^4 + 38n^5 + 8n^6 + 11n^7) : (2 + 5n$
$+ 8n^2 + 11n^3) = 6n + 3n^2 + n^4.$

51. $(2c^4 + 17ac^3 + 40a^2c^2 + 34a^3c + 9a^4) : (c^2 + 7ac + 9a^2) =$
$2c^2 + 3ac + a^2.$

52. $\left\{\left[\left(\frac{ab + 2d}{3cd}\right) . (-2cd + 9) : -\frac{3ab}{7cd}\right] : -\frac{7}{9ab}\right\} =$
$\left[\left(\frac{(ab + 2d) . (-2cd + 9) . -7cd}{3cd . -3ab}\right) : -\frac{7}{9ab}\right] =$

$$\frac{[(-2abcd - 4cd^2 + 9ab + 18d).-7cd].-9ab}{(-9abcd).(-7)} =$$

$$\frac{(14abc^2d^2 + 28c^2d^3 - 63abcd - 126cd^2).-9ab}{-9abcd.-7} =$$

$$\frac{14abc^2d^2 + 28c^2d^3 - 63abcd - 126cd^2}{7cd} = 2abcd + 4cd^2 - 9ab - 18d.$$

53. $\frac{5ab}{2} + \frac{9b}{5} - 2m = \frac{25ab + 18b - 20m}{10}.$

54. $\frac{6d}{7e^2} - \frac{3e}{2d} + \frac{2d}{3e} = \frac{36d^2 - 63e^3 + 28d^2e}{42de^2}.$

55. $x - \frac{4a}{3c^2} + \frac{5d}{3cm} = \frac{3c^2mx - 4am + 5cd}{3c^2m}.$

56. $\frac{5}{24n^2} + \frac{1}{4m} + \frac{3np}{4m^2} = \frac{5m^2 + 24mn^2 + 18n^3p}{24m^2n^2}.$

57. $\frac{1}{4} + \frac{3ac}{8bd} + \frac{5e}{12b^2} + \frac{7m}{16b^3n} = \frac{12b^3dn + 18ab^2cn + 20bden + 21dm}{48b^3dn}.$

58. $\frac{3a}{5d} + \frac{7m}{10n} + 2x = \frac{6an + 7dm + 20dnx}{10dn}.$

59. $\frac{3c}{2a} - \frac{5c-a}{3b} + \frac{3a-4c}{2a} = \frac{9bc - 10ac + 2a^2 + 9ab - 12bc}{6ab} =$

$$\frac{2a^2 + 9ab - 10ac - 3bc}{6ab}.$$

60. $\frac{2a - 3b + 10}{2ab} + \frac{2 - 4ac}{4ac} - \frac{4 + 3ac + bd}{3b} =$

$$\frac{12ac - 18bc + 60c + 6b - 12abc - 16ac - 12a^2c^2 - 4abcd}{12abc} =$$

$$\frac{60c - 18bc + 6b - 12abc - 4ac - 12a^2c^2 - 4abcd}{12abc}.$$

## II.

61. $12abc : 4ab. =$

62. $15a^2bd : 3ad^2 =$

63. $-9m^2ng : 3mn =$

64. $27x^2yh : -9xy =$

65. $\frac{18ac^2}{7ac}. -14c. =$

66. $-\frac{8am^2}{13dn}. -26dn =$

67. $(14am - 21bm - 56cm) : (-7m) =$

68. $(9cm^2 + 33cd + 27cdm - 15bcm) : -3c =$

69. $(-63a^2 - 15ab + 31ac + 108ad + 18b^2 - 33bc + 3bd + 14c^2 - 17cd - 45d^2) : (-7a + 3b - 2c + 5d) =$

70. $(78a^2 - 9ab - 15b^2) : (13a + 5b) =$

71. $\left(\frac{5m^2}{2n} + 3n^2m + 9n^2p\right) : (-12m^2n) =$

72. $(37{,}7b^2 + 47{,}867bc + 1{,}716c^2) : (5{,}8b + 7{,}15c) =$

73. $(46{,}324m^2 + 143{,}268mn + 73{,}44n^2) : (7{,}4m + 4{,}8n) =$

74. $\left(\frac{d^2}{4} + \frac{85de}{168} + \frac{e}{4}\right) : \left(\frac{d}{3} + \frac{2e}{7}\right) =$

75. $(49b^2 + 39\frac{2}{3}bc + 8c^2) : \left(7\frac{b}{4} + \frac{2c}{3}\right) =$

76. $\left(\frac{m^2}{4} - \frac{mp}{4} + \frac{2mn}{3} + \frac{4n^2}{9} + \frac{4mq}{5} - \frac{up}{3} + \frac{p^2}{16} + 1\frac{1}{16}nq - \frac{2pq}{5} + \frac{16q}{25}\right) : \left(\frac{m}{2} + \frac{2n}{3} + \frac{4q}{5} - \frac{p}{4}\right) =$

77. $\frac{12amn}{bc + ce} \cdot -c =$

78. $\frac{15ab - 13y}{7ab - 15y} \cdot -\frac{ab}{7y} =$

79. $\frac{5ab - 7cd}{9ac - 3b} \cdot (7ab - 3c) =$

80. $\frac{6ad + 2c}{(3ad - 5c)mn} \cdot (3a - 5cd) =$

81. $\left(\frac{7ab + 3ac}{(4m - 3n) \cdot (-x)}\right) \cdot \left(-\frac{5c + 3a}{7m + 2n}\right) =$

82. $\left(\frac{14ac - 21bc}{5ab - 3by}\right) \cdot \left(\frac{5a^2 - 2ay}{21bc - 11cy} + 19 - y\right) =$

83. $\left[\left(\frac{5am}{9cd} \cdot -\frac{3cm}{7de} \cdot -\frac{2cg}{7cm}\right) : \frac{cgx}{4ay}\right] =$

84. $\left[\left(\frac{12ab + 8bc}{5cd} : (4g + bc)\right) - 0{,}9ac + 19d - 4cd\right] =$

85. $\left[\left(\frac{36 - 72dn}{(1 - y) \cdot -2a} : \frac{33 - 77dn}{3 - 7ay}\right) - 4dny\right] =$

86. $\frac{5bc - 10cd}{6dg - 8cd} : \frac{4bd - 6dg}{9bd - 12bc} =$

87. $\left(-\frac{4am}{9ac} \cdot \frac{6b^2m}{15an}\right) : \left(-\frac{5an}{7ac}\right).$

88. $\frac{12m}{(x + y)^2} : 6(x + y) =$

89. $\frac{10\,a\,m}{6\,n - 4\,p} : \frac{8\,a\,q}{4\,d - 2\,g} =$

90. $\frac{9\,a\,c + 2\,b\,c}{2\,b} + \frac{a\,c - 3\,b\,c}{4\,c} =$

91. $\frac{15\,a - 12\,c}{3\,a\,c} - \frac{12\,b - 6}{2\,a} + \frac{4}{c} =$

92. $\frac{a\,b - 3\,b}{c} + \frac{a}{2\,b} + \frac{a^2 - b^2 - a\,b}{b\,c} - \frac{2\,c}{d} =$

93. $\frac{14\,d - 7\,m}{9\,d} - \frac{4\,n - x}{2\,x} + \frac{m\,x + b\,n}{2\,d\,x} - \frac{d}{2} =$

94. $\frac{15\,a\,m\,x - 17}{2\,a\,m - 22\,x} - 3\,d =$

95. $\frac{1 + 7\,x}{14 - 21\,x} - \frac{3 - 9\,x}{5\,x - 5} =$

96. $\frac{12\,a - 8\,x}{6\,a - 9\,x} + \frac{4\,a + 7\,x}{9\,a - 9\,x} =$

97. $\frac{3\,a + 2\,b - 4\,c\,d}{5\,a - 6\,b} - \frac{2\,a - 7\,b - 9\,c\,d}{2\,a\,d + 7\,b} =$

98. $\frac{3\,c - 13\,m}{5\,c - 5\,m} + \frac{3}{10} - \frac{2\,c - 7}{4\,c - 11} =$

99. $\left\{\left[\left(\frac{5\,d - 7\,e}{6\,d - 9\,e} - \frac{7\,d - 13\,e}{4\,d - 6\,e}\right) : \left(\frac{7\,e - 5\,d}{2\,d - 4\,e} - 2\,d\right)\right] . \frac{9\,d\,e}{2\,m}\right\} =$

100. $\left\{\left[\left(\frac{2\,b - (3\,d - 2\,e)}{m} . \frac{b\,c\,m - b\,d\,m}{b + d + e}\right) : a\,b\right] : \left(\frac{2\,b\,m + 3\,d\,m - c}{2\,b\,m - 6\,b\,n} - \frac{2\,b + 3\,d}{m - 3\,b}\right) . - 19\right\} =$

Anmerkung. Zur weiteren Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 13—40, Heis §. 18—28, §. 33 b.

# Zweiter Abschnitt.

# Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

---

## I. Potenzen.

### a. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§. 66.

**Erklärung 1.** Eine Potenz ist ein Product aus gleichen Factoren. Daher heisst potenziren, eine Zahl so oft als Factor setzen als eine andere gegebene Zahl Einheiten hat.

Die wiederholt als Factor zu setzende Zahl heisst Dignand (Basis, Grundzahl, Wurzel) und die Zahl, welche angibt, wie oft der Dignand als Factor zu behandeln ist, heisst Exponent.

**Erklärung 2.** Es sei der Dignand a und der Exponent m, so ist:

$$a^m$$

— sprich: a hoch m oder a zur $m^{ten}$ — der allgemeine Ausdruck einer Potenz. Der Dignand mit dem Exponenten potenzirt, gibt die Potenz. Diese Potenz sei eine Zahl p, da eine Zahl potenzirt, immer wieder eine Zahl gibt, so ist:

$$a^m = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \ldots . \text{ m mal} = p.$$

Der Ausdruck $a^m$ heisst die formelle und p die entwickelte Potenz.

**Zusatz 1.** Jedes Product aus gleichen Factoren ist gleich einer Potenz, deren Dignand der gleiche Factor und deren Exponent die Anzahl der Factoren ist:

$$a . a = a^2; \quad a . a . a = a^3;$$
$$a . a . a . a = a^4.$$

**Zusatz 2.** Jede Potenz lässt sich in ein Product aus gleichen Factoren verwandeln:

$$a^4 = a . a . a . a.$$

**Erklärung 3.** Die erste Potenz einer Zahl, ist die Zahl selbst,

$$a^1 = a,$$

die zweite Potenz heisst auch Quadrat, die dritte Cubus, die vierte Biquadrat.

**Erklärung 4.** Die Potenz ist das kurzgefasste Product aus gleichen Factoren; in der Multiplication aber ist das Product das abgekürzte Zeichen für eine Summa aus gleichen Summanden. Multiplicand und Multiplicator dürfen mit einander verwechselt werden, der Dignand und Exponent in einer Potenz nie. Z. B.

$$3 . 2 = 6 \text{ und } 2 . 3 = 6;$$

aber

$$3^2 = 9 \text{ und } 2^3 = 8.$$

Anmerkung. Die Potenz einer ganzen Zahl ist immer wieder eine ganze Zahl.

## §. 67.

**Erklärung.** Ueber Addition und Subtraction von Potenzen sind keine besondern Sätze aufzustellen. Was hierüber zu sagen ist, wurde bei den Summen und Differenzen schon ausgesprochen, da Potenzen nur dann addirt und subtrahirt werden können, wenn sie gleichnamig sind. Potenzen sind gleichnamig, wenn sie gleiche Dignanden und gleiche Exponenten haben. Z. B.

1. $a^2 + a^2 = 2 a^2$.
2. $3 b^2 + 2 b^2 = 5 b^2$.
3. $9 a b^3 + a b^3 = 10 a b^3$.
4. $2 a^2 b^3 + 3 a^2 b^3 - a^2 b^3 = 4 a^2 b^3$.
5. $4 m^3 x^n - 3 m^3 x^n + 7 m^3 x^n = 8 m^3 x^n$.
6. $9 x^4 y^2 m - 10 x^4 y^2 m = - x^4 y^2 m$.

## §. 68.

**Lehrsatz 5.** Gleiches mit Gleichem potenzirt, gibt Gleiches.

Es sei:

$$x = y,$$

so ist:

$$x^m = y^m.$$

## §. 69.

**Lehrsatz.** Potenzen mit gleichen Dignanden werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt:

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$a^m \,.\, a^n = (a\,.\,a\,.\,a \ldots m\,\text{mal})\;(a\,.\,a\,.\,a \ldots n\,\text{mal}), \quad \text{cf. §. 66,}$$
$$= a^{m+n},$$

denn a soll so oft als Factor gesetzt werden, als m und n = m + n Einheiten hat.

**Zusatz.** Eine Zahl wird mit einer Summe potenzirt, wenn man sie mit jedem Summanden potenzirt und die erhaltenen Potenzen mit einander multiplicirt:

$$a^{m+n} = a^m \,.\, a^n.$$

## §. 70.

**Lehrsatz.** Potenzen mit gleichen Dignanden werden dividirt, wenn man ihre Exponenten subtrahirt:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \;(\text{condit. } m > n).$$

**Beweis.**

Man multiplicirt auf beiden Seiten mit $a^n$, so ist:

$$\left(\frac{a^m}{a^n}\right) a^n = a^m \quad \text{cf. §. 37.}$$
$$(a^{m-n})\, a^n = a^{(m-n)+n}, \quad \text{cf. §. 69.}$$
$$= a^m.$$

Es ist auch:

$$\left(\frac{a^m}{a^n}\right) a^n = (a^{m-n})\, a^n,$$

d. h.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{cf. §. 47.}$$

**Zusatz 1.** Eine Zahl wird mit einer Differenz potenzirt, wenn man sie mit dem Minuenden und Subtrahenden potenzirt und die gewonnene Potenz mit dem Minuenden durch die Potenz mit dem Subtrahenden dividirt:

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

**Zusatz 2.** Ist der Minuend kleiner als der Subtrahend, so erhält man als Quotienten eine Potenz mit negativen Exponenten:

Es sei $m < n$, so ist:

$$a^{m-n} = a^{-d}.$$

**Beweis.** *

Ist $m < n$, so ist:

$$m = n - d. \quad \text{cf. § 8.}$$

Substituirt man bei $a^{m-n}$ als Werth von m den Ausdruck $(n-d)$, so ist:

$$a^{m-n} = a^{(n-d)-n} = a^{-d}.$$

## §. 71.

**Lehrsatz.** Potenzen mit gleichen Exponenten werden multiplicirt, wenn man das Product ihrer Dignanden mit dem Exponenten potenzirt:

$$a^m . b^m = (a\,b)^m.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$\begin{aligned} a^m . b^m &= (a . a . a \ldots m\ \text{mal})\ (b . b . b \ldots m\ \text{mal}), \\ &= (a . b)\ (a . b)\ (a . b) \ldots m\ \text{mal}, \quad \text{cf. §. 36.} \\ &= (a\,b)^m. \end{aligned}$$

**Zusatz.** Ein Product wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man mit ihr jeden Factor potenzirt:

$$(a\,b)^m = a^m . b^m.$$

## §. 72.

**Lehrsatz.** Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividirt, wenn man den Quotienten ihrer Dignanden mit dem Exponenten potenzirt:

$$a^m : b^m = (a : b)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

**Beweis.**

Es ist:

---

* Dieser Satz wurde mit Rücksicht auf Aufgabensammlungen schon hier erwähnt, cf. §. 59 Anmerk.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a \,.\, a \,.\, a \,\ldots\, m \text{ mal}}{b \,.\, b \,.\, b \,\ldots\, m \text{ mal}},$$
$$= \frac{a}{b} \,.\, \frac{a}{b} \,.\, \frac{a}{b} \ldots m \text{ mal},$$
$$= \left(\frac{a}{b}\right)^m = (a:b)^m.$$

**Zusatz.** Ein Quotient wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man mit ihr Dividend und Divisor potenzirt:

$$(a:b)^m \text{ oder } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} = a^m : b^m.$$

## §. 73.

**Lehrsatz.** Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man ihren Exponenten mit der Zahl multiplicirt:

$$(a^m)^n = a^{m\,n} = a^{n\,m}.$$

### Beweis.

Es ist:

$$(a^m)^n = a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \ldots n \text{ mal},$$
$$= a^{m+m+m+\ldots n \text{ mal}}, \quad (\text{cf. §. 69.})$$
$$= a^{m\,n} = a^{n\,m}. \quad (\text{cf. §. 36.})$$

**Zusatz 1.** Eine Zahl wird mit einem Product potenzirt, wenn man sie erst mit dem einen Factor potenzirt und die gewonnene Potenz mit dem andern Factor potenzirt:

$$a^{m\,n} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

**Zusatz 2.** Soll eine Zahl mit einem Product aus mehreren Factoren potenzirt werden, so ist es einerlei, in welcher Ordnung dies geschieht:

$$a^{m\,n\,x} = (a^m)^{n\,x} = (a^{n\,x})^m = [(a^n)^x]^m = [(a^m)^x]^n.$$

## §. 74.

### Beispiele zur Einübung der vorstehenden Lehrsätze.

I.

1. $a^2 \,.\, a^3 = a^5.$
2. $2\,a^3 \,.\, 5\,a^2 = 10\,a^5.$
3. $4\,a^5\,b \,.\, 5\,a^2\,b^3 = 20\,a^7\,b^4$
4. $7\,a\,b^2\,d^3 \,.\, 4\,a^3\,b\,d^2 = 28\,a^4\,b^3\,d^5.$
5. $(4\,a)^{2\,n+m} = 4\,a^{2n} \,.\, 4\,a^m.$
6. $(9\,a)^{m-x} = 9\,a^m : 9\,a^x.$

II.

7. $\frac{a^4}{a^2} = a^2$.

8. $\frac{15 a^2 b^4 c}{5 a b^3 c} = 3 a b$.

9. $\frac{6 a^7}{3 a^4} = 2 a^3$.

10. $\frac{9 a^3 b^3 c^3 d}{18 a^2 b^3 c^4} = \frac{a d}{2 b c} = \frac{1}{2} a b^{-1} c^{-1} d$.

11. $\frac{a^4 c^3 d}{a^6 c^4} = \frac{d}{a^2 c} = a^{-2} c^{-1} d$.

12. $4 a^3 b c^4 : \frac{1}{2} a^2 b c^5 = 8 a c^{-1} = \frac{8 a}{c}$.

III.

13. $(a b)^3 = a^3 b^3$.

14. $(4 a)^2 = 4^2 a^2 = 16 a^2$.

15. $9 b^2 = (3 b)^2$.

16. $27 d^3 = (3 d)^3$.

17. $8 a^3 b^3 = (2 a b)^3$.

18. $(4 a b^3 c^2)^2 = 16 a^2 b^6 c^4$.

IV.

19. $\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$.

20. $\left(\frac{7 a}{9 b}\right)^2 = \frac{49 a^2}{81 b^2}$.

21. $\left(\frac{2 b}{3 c}\right)^3 = \frac{8 b^3}{27 c^3}$.

22. $\left(\frac{3 a b}{4 c d}\right)^4 = \frac{(3 a b)^4}{(4 c d)^4} = \frac{81 a^4 b^4}{256 c^4 d^4}$

V.

23. $(a^4)^3 = a^4 . a^4 . a^4 = a^{4+4+4} = a^{4 . 3} = a^{12}$.

24. $(2 a^3)^3 = 8 a^9$.

25. $(2 b^3 c^2 d)^4 = 16 b^{12} c^8 d^4$.

26. $\left(\frac{2 c^2}{3 d^3}\right)^5 = \frac{32 c^{10}}{243 d^{15}}$.

27. $(16 a^2)^{m n} = [(16 a^2)^m]^n = [(16 a^2)^n]^m$.

## §. 75.

**Erklärung.** Der Dignand einer formellen Potenz kann eine positive und negative Zahl sein. Und da man die entwickelte Potenz dadurch gewinnt, dass man den Dignanden so oft mit sich selbst multiplicirt als der Exponent Einheiten hat (§. 66), so ist der Werth der entwickelten Potenz nicht blos vom Vorzeichen des Dignanden, sondern auch vom Potenzexponenten abhängig. (§. 42, 1. 2. 3.)

Hat der Dignand ein negatives Vorzeichen, so kommt es für das Vorzeichen der entwickelten Potenz darauf an, ob der Exponent eine gerade oder ungerade Zahl ist (§. 42, Erkl. 6).

Der allgemeine Ausdruck für eine gerade Zahl ist 2n, weil jede beliebige Zahl mit 2 multiplicirt auf eine gerade führt. Bezeichnet

man mit 2n eine gerade Zahl, so muss $2n \pm 1$ eine **ungerade** bedeuten.

**Lehrsatz 1.** Potenzen mit positiven Dignanden und ganzen Exponenten sind immer positiv:

$$(+a)^m = +a^m = a^m.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$(+a)^m = (+a)(+a)(+a)\ldots m \text{ mal}, \quad \text{cf. §. 66.}$$
$$= +a^m = a^m. \quad \text{cf. §. 42, 1.}$$

**Lehrsatz 2.** Potenzen mit negativen Dignanden sind positiv, wenn der Exponent eine gerade und negativ, wenn er eine ungerade Zahl ist:

$$\text{I. } (-a)^{2n} = +a^{2n} = a^{2n}.$$
$$\text{II. } (-a)^{2n\pm 1} = -a^{2n\pm 1}.$$

**Beweis.**

Es ist I.:

$$(-a)^{2n} = [(-a)^2]^n = [(-a)(-a)]^n, \quad \text{cf. §. 73.}$$
$$= [(+a)^2]^n = +a^{2n}. \quad \text{cf. §. 42, 2.}$$

Es ist II.:

$$(-a)^{2n+1} = [(-a)^{2n}](-a), \quad \text{cf. §. 79.}$$
$$= (+a)^{2n}(-a) = -a^{2n+1}. \quad \text{cf. §. 42, 3 und Bew. I.}$$

Anmerkung. Aus dem Vorstehenden ist ersichtlich, dass ein grosser Unterschied ist zwischen dem Ausdruck $(-a)^m$ und dem Ausdruck $-a^m$. **Dieser** ist eine **entwickelte** Potenz mit **negativem** Werth; **jener** kann bei seiner Entwicklung zur Potenz entweder **positiv** oder **negativ** werden. Der Anfänger hat diesen Unterschied genau zu beachten.

**Zusatz.** Die Dignanden 0 und 1 geben immer wieder 0 und 1 zur entwickelten Potenz. Diese ist bei negativen Vorzeichen des Dignanden positiv, wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, und negativ, wenn er eine ungerade Zahl ist:

$$\text{I. } (+0)^m \text{ und } (+1)^m = +0^m \text{ und } +1^m.$$
$$\text{II. } (-0)^{2n} \text{ „ } (-1)^{2n} = +0^{2n} \text{ „ } +1^{2n}.$$
$$\text{III. } (-0)^{2n\pm 1} \text{ „ } (-1)^{2n\pm 1} = -0^{2n\pm 1} \text{ „ } -1^{2n\pm 1}.$$

## §. 76.

**Erklärung.** Unter der Voraussetzung, dass die **Dignanden** positive Zahlen sind, lassen sich noch nachstehende Sätze aufstellen.

**Lehrsatz 1.** Grösseres mit Gleichem potenzirt, gibt Grösseres:

Es sei $a > b$, so ist:

$$a^m > b^m \text{ (condit. } + m).$$

**Beweis.**

Ist $a > b$, so ist:

$$a \,.\, a \,.\, a \ldots m \text{ mal} > b \,.\, b \,.\, b \ldots m \text{ mal}, \quad \text{cf. §. 43, 2.}$$

d. h.

$$a^m > b^m.$$

**Zusatz.** Gleiches mit Grösserem potenzirt, gibt Grösseres.

Es sei $m > n$, so ist:

$$a^m > a^n.$$

**Lehrsatz 2.** Die Potenz eines ächten Bruches wird um so kleiner, je grösser der Exponent wird.

Es bezeichne a einen ächten Bruch, d. h. $a < 1$, und es sei $x > x - n$, so ist:

$$a^x < a^{x-n}.$$

**Beweis.**

Da $x > x - 1$, so ist offenbar:

$$a^x < a^{x-1},$$
$$a^{x-1} < a^{x-2},$$
$$a^{x-2} < a^{x-3};$$

demnach auch:

$$a^x < a^{x-\cdots n}.$$

**Lehrsatz 3.** Die Potenz eines unächten Bruches wird um so grösser, je grösser der Exponent wird.

Es bezeichne b einen unächten Bruch, d. h. $b > 1$, und es sei $x > x - n$, so ist:

$$b^x > b^{x-n}.$$

**Beweis.**

Es ist offenbar:

$$b^x > b^{x-1},$$
$$b^{x-1} > b^{x-2},$$
$$b^{x-2} > b^{x-3};$$

demnach auch:

$$b^x > b^{x-\cdots n}.$$

Denn wenn $a = \frac{1}{3}$ und $b = \frac{3}{2}$ und $x = 7$ und $n = 6$ ist, so ist:

$$\text{I. } \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187} < \frac{1}{729} < \frac{1}{243} < \frac{1}{81} < \frac{1}{27} < \frac{1}{9} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{II. } \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{2187}{128} > \frac{729}{64} > \frac{243}{32} > \frac{81}{16} > \frac{27}{8} > \frac{9}{4} > \frac{3}{2}.$$

**Zusatz.** Die Potenz eines Bruches gibt nie eine ganze Zahl, sondern immer einen Bruch.

## §. 77.

**Erklärung 1.** In einer Potenz kann der Dignand eine Summa, eine Differenz, ein Product, ein Quotient und eine Potenz sein. Dieselben Zahlenverbindungen können aber auch im Exponenten vorkommen. Nur kann der Exponent selbst nie eine Potenz sein, weil sich Exponent und Dignand in einer formellen Potenz nicht vertauschen lassen.

Um die beiden ersten Fälle, wonach der Dignand eine Summa oder Differenz sein kann $(a \pm b)$, wissenschaftlich behandeln zu können, fehlen hier noch die Voraussetzungen. Sie kommen desshalb erst später zur Behandlung. (Binomischer Lehrsatz.)

**Erklärung 2.** Sollen gleichwohl Summen und Differenzen potenzirt werden, so hat man sie so lange mit sich selbst zu multipliciren als der Exponent bestimmt (§. 40).

Es soll das Binomium $a \pm b$ auf verschiedene Potenzen erhoben werden:

$$\text{I } (a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$\text{II. } (a \pm b)^3 = (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b) = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Das heisst:

Das Quadrat eines Binomium besteht 1) aus dem Quadrate des ersten Gliedes, 2) aus dem doppelten Producte des ersten und zweiten Gliedes und 3) aus dem Quadrat des zweiten Gliedes.

Der Cubus eines Binomium besteht 1) aus dem Cubus des ersten Gliedes, 2) aus dem dreifachen Quadrat des ersten Gliedes multiplicirt mit dem zweiten Gliede, 3) aus dem dreifachen Quadrat des zweiten Gliedes multiplicirt mit dem ersten Gliede, und 4) aus dem Cubus des zweiten Gliedes.

III. $(a \pm b)^4 = (a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3)(a \pm b) = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$.

IV. $(a \pm b)^5 = (a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4)(a \pm b) = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$.

V. $(a \pm b)^6 = (a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5)(a \pm b) = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$.

VI. $$(a \pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} a^{n-4} b^4 \pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} a^{n-5} b^5 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6} a^{n-6} b^6.$$

Aus den vorstehenden entwickelten Potenzen von I—VI ist ersichtlich, dass die Exponenten und Coëfficienten aller Glieder von Potenz zu Potenz in einer unverkennbaren Gesetzmässigkeit sich darstellen; denn

der Exponent ist im ersten und letzten Gliede immer gleich dem Exponenten der Summe oder Differenz, die zu potenziren ist. In den übrigen Gliedern ist der Exponent des Summanden oder Minuenden a immer um 1 kleiner, der Exponent des andern Summanden oder Subtrahenden b ist immer um 1 grösser.

Der Coëfficient des ersten und letzten Gliedes ist immer gleich 1, jeder folgende Coëfficient ist gleich dem Producte aus dem Exponenten von a und dem Coëfficienten des unmittelbar vorhergehenden Gliedes dividirt durch die Anzahl der schon entwickelten Glieder derselben Potenz oder = der Summa der Coëfficienten des entsprechenden Gliedes in der nächst niedern Potenz und des unmittelbar vorangehenden Gliedes. Z. B.: Aus dem Gliede $6a^5b$ ist der Coëfficient für das nächste Glied $6.5:2 = 15$; oder in der fünften Potenz findet man den Coëfficienten für das dritte Glied, wenn man den Coëfficienten des dritten und zweiten Gliedes der vierten Potenz addirt: $6 + 4 = 10$.

1. $(4a^2 - 5x^3)^2 = 16a^4 - 40a^2x^3 + 25x^6$.
2. $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = x^2 + xy + \frac{y^2}{4}$.
3. $(m^2 - 1)^2 = m^4 - 2m^2 + 1$.
4. $(1 - y)^2 = 1 - 2y + y^2$.
5. $(99)^2 = (90 + 9)^2 = 8100 + 1620 + 81 = 9801$.
   $= (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$; d. h. $2.2 = 4$ Zifferstellen.
6. $(22)^2 = (20 + 2)^2 = 400 + 80 + 4 = 484$; d. h. $(2.2) - 1 = 3$ Zifferstellen.
7. $(3a^2 + 2b)^3 = 27a^6 + 54a^4b + 36a^2b^2 + 8b^3$.
8. $(1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$.
9. $(2ac - c^2)^3 = 8a^3c^3 - 12a^2c^4 + 6ac^5 - c^6$.

10. $(22)^3 = (20+2)^3 = 8000 + 2400 + 240 + 8 = 10648$; d. h. $(3.2) - 1 = 5$ Zifferstellen.

11. $(99)^3 = (90+9)^3 = 729000 + 218700 + 21870 + 729 = 970299.$
$= (100-1)^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 970299$; d. h. $3.2 = 6$ Zifferstellen.

**Zusatz 1.** Sollen Polynome potenzirt werden, so sind sie auf Binome zu reduciren und wie diese zu behandeln:

I. $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$

$(a+b+c+d)^2 = [(a+b+c)+d)]^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2.$

Das heisst:

Das Quadrat eines Polynomium besteht 1) aus dem Quadrate eines jeden Gliedes und 2) aus dem zweifachen Product eines jeden Gliedes und aller nachfolgenden Glieder.

II. $(a+b+c)^3 = [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 . c + 3(a+b)c^2 + c^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 . c + 3(a+b)c^2 + c^3.$

$(a+b+c+d)^3 = [(a+b+c)+d]^3 = (a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c)d^2 + d^3.$
$= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3b^2c + 3b^2d + 3c^2d + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 + 3bc^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + 6abc + 6abd + 6acd + 6bcd.$

Das heisst:

Der Cubus eines Polynomium besteht 1) aus dem Cubus jedes einzelnen Gliedes; 2) aus den dreifachen Producten eines jeden Gliedes in das Quadrat der Summa aller vorhergehenden Glieder; 3) aus den dreifachen Producten des Quadrates eines jeden Gliedes in die Summa aller vorhergehenden Glieder.

1. $(1+y-y^2)^3 = 1 + 3y + 3y^2 + y^3 - 3y^2 - 6y^3 - 3y^4 + 3y^4 + 3y^5 - y^6$
$= 1 + 3y - 5y^3 + 3y^5 - y^6.$

2. $(999)^3 = (900+90+9)^3 = 729000000 + 218700000 + 21870000 + 729000 + 26462700 + 240570 + 729 = 997002999$; d. h. $3.3 = 9$ Zifferstellen.

3. $(222)^3 = 21882096$, d. h. $(3.3) - 1 = 8$ Zifferstellen.

**Zusatz 2.** Das Quadrat einer m zifferigen Zahl hat entweder $(2m-1)$ oder $2m$, der Cubus dagegen wenigstens $(3m-2)$ und höchstens $3m$ Zifferstellen.

## §. 78.

### Beispiele und Aufgaben.

### I. Addition und Subtraction.

1. $2\,a\,m^2x^2b^4 + a\,m^2x^2b^4 = 3\,a\,b^4m^2x^2.$

2. $4\,a^2b^4 + 9\,a^2b^4 - 10\,a^2b^4 = 3\,a^2b^4.$

3. $2\,a^3b^5 - 6\,a^3b^3 + 4\,a^3b^5 - 2\,a^2c^4 + 3\,a^3b^3 = 6\,a^3b^5 - 3\,a^3b^3 - 2\,a^2c^4.$

4. $(3\,a + 7\,a^3 - 2\,a^2 - 3\,a^4) - (-8\,a + 4\,a^5 + 3\,a^3 - 2\,a^2 - 5\,a^4) = 3\,a + 7\,a^3$
$- 2\,a^2 - 3\,a^4 + 8\,a - 4\,a^5 - 3\,a^3 + 2\,a^2 + 5\,a^4 = 11\,a + 4\,a^3 + 2\,a^4 - 4\,a^5.$

5. $2\,b^mc^nd^x - 15\,b^yc^zd + 4\,b^yc^zd - b^mc^nd^x = b^mc^nd^x - 11\,b^yc^zd.$

6. $a^2b - [5\,a\,b^2 - [2\,a^2b - (4\,a^2b - 4\,a\,b^2) + 10\,a^2b^2] - 4\,a^2b] + 12\,a\,b$
$= a^2b - [5\,a\,b^2 - 2\,a^2b + 4\,a^2b - 4\,a\,b^2 - 10\,a^2b^2 - 4\,a^2b] + 12\,a\,b$
$= a^2b - 5\,a\,b^2 + 2\,a^2b - 4\,a^2b + 4\,a\,b^2 + 10\,a^2b^2 + 4\,a^2b + 12\,a\,b$
$= 12\,a\,b + 3\,a^2b - a\,b^2 + 10\,a^2b^2.$

7. $$3\,a^5b - \Big(\frac{a^6}{2} - (2 - a^3b^3 - a^2b^4)\Big) + 3\,a^2b^4 - \Big[\Big(\frac{3}{2}a^4b^2 + 1 - a^5b\Big)$$
$$- 2\frac{1}{2}a^6\Big] - \Big[2\frac{1}{2}a^3b^3 - \Big(3\frac{1}{2}a^3b^3 - (a^6 + 2\,a^2b^4) + 1\frac{1}{2}a^4b^2\Big)$$
$$+ 4\,a^5b\Big] - (a^6 + 1 - y^4) = y^4.$$

8. $$a^2 - \Big(\frac{+5\,a^5 + a^3d^2}{3}\Big) + 11\,a^5 - \Big\{\frac{7}{3}a^3d^2 + \Big[-\frac{21}{8}a^3d^2 + \frac{9\,a^4d}{2}$$
$$- \Big(\frac{21}{8}a\,d^4 - \frac{9}{4}a^4d^3 + \frac{a^5}{2}\Big)\Big] - \frac{27}{8}a^4d\Big\} - \Big\{\frac{27}{7}a^2d^3 - \Big[\frac{9}{4}a\,d^4$$
$$+ \Big(\frac{9}{5}a^3d^2 + \frac{4}{5}a^5 - \frac{9}{5}a^4d\Big) - \frac{12}{5}a^2d^3\Big] - \frac{15}{4}a^5\Big\} - \Big[2\,a^3d^2 - \frac{15}{8}a^2d^3$$
$$+ \Big(\frac{2}{3}a\,d^4 + \frac{9}{2}a^2d^3\Big) - 4\,a\,d^4 + \Big(-5\frac{7}{40}a^4d + 8\frac{5}{24}a\,d^4\Big)\Big]$$
$$- \Big(1\frac{1}{20}a^5 - 2\frac{109}{120}a^3d^2 + \frac{33}{280}a^2d^3\Big) = a^2 + 13\frac{1}{3}a^5 + \frac{51}{60}a^3d^2.$$

9. $5{,}5\,a^mb^n - (c^4d^2 + 5{,}05\,a^mb^n) + c^4d^2 + 3{,}09\,a^xb^y =$

10. $$[[10\,a^3b^2c - (2\frac{1}{2}a\,c\,d - 5\,a^3b^2c - 14\,a^2b^3) + 1\frac{1}{2}a\,c\,d$$
$$- 7\,a^2b^3] - 6\,a^2b^3] + \Big(2\frac{1}{2}a^3b^2c - d^4 + \frac{a^3b^2c}{2}\Big) =$$

11. $$\Big\{7\frac{4}{5}b^3c^2 + 21\,d\,e - 7\frac{1}{9}d^2e^2 - \Big[\frac{3}{5}b^3c^2 + 18\,d\,e - \frac{7}{9}d^3e^2$$
$$- \Big(\frac{1}{9}a\,b + 2\frac{1}{4}b^3c^2\Big)\Big] + \Big(4 - 3\,d\,e - \frac{7}{9}d^3e^2\Big)$$
$$+ \frac{1}{5}b^3c^2 + 8\frac{1}{9}d^2e^2\Big\} =$$

12. $a^4 - 5a^2b^3d + 2b^3d^2 - [(5\frac{1}{5}a^2b^3d - \frac{1}{9}b^3d^2 + 4\frac{1}{4}abc$
$+ 16a^2b^3d] - (9a^2b + \frac{19}{9}b^3d^2 - 3\frac{3}{4}abc - 4\frac{1}{5}a^2b^3d) =$

Anmerkung. Zur weiteren Uebung siehe Hofmann, II. Thl. S. 41—45.

## II. Multiplication und Division.

1. $b^2 . b^3 = b^5$.
2. $5a^4 . -3a^2 = -15a^6$.
3. $-11b^4 . -4b^2 = 44b^6$.
4. $6a^2b^3c . -2a^3bc^2 = -12a^5b^4c^3$.
5. $a^m . -ab^n = -a^{m+1}b^n$.
6. $-3a^2b^3c^4 . -3a^mb^nc^x = 9a^{m+2}b^{n+3}c^{x+4}$.
7. $-\frac{3}{5}d^4 . -4d^2 = \frac{12}{5}d^6$.
8. $12ab^{n-1} . 4a^xb = 48a^{x+1}b^n$.
9. $\frac{4}{9}a^2b^3c . -\frac{3}{8}a^mb^n . c^{x-1} = -\frac{1}{6}a^{m+2}b^{n+3}c^x$.
10. $a^2b^3c . -9a^mb^2c^n . -\frac{1}{3}abc = 3a^{m+3}b^6c^{n+2}$.
11. $-\frac{3}{4}a^md^x . -\frac{1}{4}a^md^xp . -10\frac{2}{3}ad^2p = -2a^{2m+1}d^{2x+2}p^2$.
12. $-10a^xb^2 . 7a^2b^3c =$
13. $-\frac{2}{3}a^2b^3c^4 . -7\frac{1}{2}abc . -\frac{3}{9}a^mb^nc^x . -\frac{4}{5}a^2bc =$
14. $4a^{2x-3}b^{2m+1} . -5a^2b^3c . -\frac{1}{2}abc^2 =$
15. $(a^2 - 3a^2b + 4\frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}a^3bc) . ab^2 =$
16. $(2a^{2m} - 4ab^n + \frac{3}{2}a^2b - \frac{1}{4}a^3b^2c) . -\frac{1}{2}a^mb^nc = -a^{3m}b^nc$
$+ 2a^{m+1}b^{2n}c - \frac{3}{4}a^{m+2}b^{n+1}c + \frac{1}{8}a^{m+3}b^{n+2}c^2$.
17. $a^3b^2 : -a^2b = -ab$.
18. $12ad^4 : 4ad^2 = 3d^2$.
19. $15a^{m+2} : -3a^m = -5a^2$.
20. $64a^2x^3 : -8a^2x = -8x^2$.
21. $49a^2b^3c^m : 35a^xb^3c^2 =$
22. $729a^{2m+1}b^{n+4} : -9a^mb^n : -3ab =$
23. $3\frac{1}{2}b^{x+2}d^3 : 2b^xd^2 : -7b^2d =$

24. $(14\,d^2 x^{n-1} - 7\,a\,b + 21\,d^2 x^4 - 28\,d^{4m} + 7\,d\,e\,x^2) : -7\,a\,d\,x =$

25. $a^2 b^2 c^3 (3\,b\,c - 5\,a) - 2\,a\,b\,c\,(2\frac{1}{2}\,a^2 b\,c^2 - 3\frac{1}{2}\,a^3 c)$

$+ 3\,a\,c^2 (a\,b^3 c^2 - 3\frac{1}{2}\,a^3 b) - 2\frac{1}{2}\,a\,b^2 c\,(2\,a\,b\,c^3 - 3\,a^2 c^2 + 4\,a^4)$

$+ 1\frac{1}{2}\,a^2 b\,c\,(5\,a\,b\,c^2 - 3\,a^2 c - 2\,a^3 b) = 3\,a^2 b^3 c^4 - 5\,a^3 b^2 c^3 - 5\,a^3 b^2 c^3$

$+ 7\,a^4 b\,c^2 + 3\,a^2 b^3 c^4 - 10\frac{1}{2}\,a^4 b\,c^2 - 5\,a^2 b^3 c^4 + 7\frac{1}{2}\,a^3 b^2 c^3 - 10\,a^5 b^2 c$

$+ 7\frac{1}{2}\,a^3 b^2 c^3 - 4\frac{1}{2}\,a^4 b\,c^2 - 3\,a^5 b^2 c = a^2 b^3 c^4 + 5\,a^3 b^2 c^3 - 8\,a^4 b\,c^2$

$- 13\,a^5 b^2 c.$

26. $17\,a^3 b^{2m} x - a^2 b^m x\,(-9\,a\,b^m + 4\,b^2 x) - 23\,a^3 b^{2m} x =$

27. $b^8 c^4 d^5 - 5\,b^2 c^4 d^5 [13\,b^2 c^2 d^2 - 6\,b^4 (4\,c\,d - 7\,b^2) + 9\,c^3 d^3]$

$+ 6\,b\,c^2 d^4 [7\,b\,c^5 d^4 - 7\,b^3 c^2 d\,(2\,b^4 - 4\,c^2 d^2 + 3\,b^2 c\,d)$

$+ 16\,b^5 c^3 d^2] - c^3 d^2 [13\,b^8 c\,d^3 + b^2 c^3 d^4 (3\,b^2 d - 3\,c\,d^2)] = b^8 c^4 d^5$

$- 5\,b^2 c^4 d^5 (13\,b^2 c^2 d^2 - 24\,b^4 c\,d + 42\,b^6 + 9\,c^3 d^3)$

$+ 6\,b\,c^2 d^4 (7\,b\,c^5 d^4 - 14\,b^7 c^2 d + 28\,b^3 c^4 d^3 - 21\,b^5 c^3 d^2$

$+ 16\,b^5 c^3 d^2) - c^3 d^2 (13\,b^8 c\,d^3 + 3\,b^4 c^3 d^5 - 3\,b^2 c^4 d^6)$

$= b^8 c^4 d^5 - 65\,b^4 c^6 d^7 + 120\,b^6 c^5 d^6 - 210\,b^8 c^4 d^5 - 45\,b^2 c^7 d^8$

$+ 42\,b^2 c^7 d^8 - 84\,b^8 c^4 d^5 + 168\,b^4 c^6 d^7 - 126\,b^6 c^5 d^6$

$+ 96\,b^6 c^5 d^6 - 13\,b^8 c^4 d^5 - 3\,b^4 c^6 d^7 + 3\,b^2 c^7 d^8$

$= 100\,b^4 c^6 d^7 - 306\,b^8 c^4 d^5 + 90\,b^6 c^5 d^6.$

28. $3\,a^4 b^3 c^3 (2\,a\,b\,c^2 - 4\,b^3 c) - 3\,a\,b\,c^2 [-7\,a^3 b^4 c - a^2 b^3 c\,(4\,a\,b^2 c - 7\,a\,b)]$

$+ [6\,a^3 b^8 c\,(-8\,a\,b^2 c^2 + 14\,c + 9\,a^{-1} b\,c^3) - 4\,a^2 b\,c^2 (21\,a\,b\,c$

$+ 14\,b^2 c^2 - 7\,a^2 b^3 c) + 2\,a^2 b^3 c^4] - 6\,a^4 b^2 c^4 (a\,b^2 c + b^2 c^3$

$- 42\,a^2 b^3 c) + 7\,a^2 b^3 [a^2 b\,c^7 - 6\,a^2 b\,c^2 (6\,a^2 c^3)] = a^4 b^4 c^7.$

---

29. $\frac{3\,b\,c^2}{4\,a\,d^2} \cdot 4\,a\,d = \frac{12\,a\,b\,c^2 d}{4\,a\,d^2} = 3\,b\,c^2 d^{-1}$ oder $\frac{3\,b\,c^2}{4\,a\,d^2 : 4\,a\,d} = \frac{3\,b\,c^2}{d}.$

30. $\frac{b^3 c^2 d}{9\,a\,m^3} \cdot 3\,a\,m^2 = \frac{b^3 c^2 d}{3\,m} = \frac{1}{3}\,b^3 c^2 d\,m^{-1}.$

31. $\frac{5\,a^2 b^2 c}{9\,d\,x^2} \cdot -\frac{3\,d\,x^3}{5\,a\,b\,c} = -\frac{1}{3}\,a\,b\,x.$

32. $-\frac{7\,a^2 c\,d^4}{4\,b^2 x^3} \cdot \frac{3\,b^2 x^4}{7\,a^2 c} = -\frac{3}{4}\,d^4 x.$

33. $\frac{18\,a^4 b^3}{27\,c^2 d^3} \cdot -\frac{9\,b\,c\,d^3}{6\,a^2 d^3} = a^2 b^4 c^{-1} d^{-3}.$

34. $\frac{3\,a^2 b\,c}{7\,d\,e\,m} \cdot -\frac{21\,d^2 e}{b\,c} =$

35. $-\frac{17\,b^3c^4}{19\,a^2d}\cdot -\frac{38\,a\,d^2}{2\,b\,c^3} =$

36. $\frac{23\,a^2b\,c^3}{24\,d\,m^2}\cdot -\frac{12\,a^2m^2}{18\,b\,c^3} =$

37. $\frac{2\,c^2d^4}{7\,a\,b}\cdot\frac{7\,a^2b^2}{9\,c^2d^2}\cdot\frac{9\,d^3}{12\,d} =$

38. $\frac{12\,a^5b^6}{15\,d\,e}\cdot\frac{7\,d^2e^2}{21\,a^3b^2}\cdot -\frac{1}{a\,b^3} =$

39. $\frac{d^4}{m^3}:\frac{d^3}{m^4} = \frac{d^4m^4}{d^3m^3} = d\,m.$

40. $\frac{a^2m^3}{b^2n^4}:\frac{a\,m^2}{b^4n^2} = \frac{a^2b^4m^3n^2}{a\,b^2m^2n^4} = \frac{a\,b^2m}{n^2} = a\,b^2m\,n^{-2}.$

41. $\frac{9\,a^4b\,c}{7\,d\,x^2}: -\frac{3\,a^3b^2c}{7\,b\,d\,x} = -\frac{3\,a}{x} = 3\,a\,x^{-1}.$

42. $\frac{24\,a^3b^2}{6\,d\,m\,n}:\frac{8\,a\,b}{d\,m^2n^2} =$

43. $\frac{17\,x\,y^2}{19\,a\,c}: -\frac{x\,y}{c} =$

44. $\left(\frac{12\,a\,c^2}{7\,b^2d^3}+\frac{3\,d^2}{2\,a^2b}-\frac{28\,b^2c\,d}{35\,a\,b^2d^3}\right):\frac{14\,a\,b^2c\,d}{3\,a^2b\,d^3} =$

45. $\left(\frac{-a^4}{7\,x^2}+\frac{15\,d\,y}{23\,a^2x}-\frac{17\,c^2d\,m^2}{29\,a\,m\,x}-\frac{c\,d^2}{x\,y^2}\right):\frac{x^2d\,m\,y}{-a\,m\,x\,y} =$

46. $-\frac{21\,a^2d^2c}{36\,c^2}:\left(\frac{7\,a^4b^2}{28\,c^2d^3}: -\frac{a^4b^2}{7\,c\,d^4}\right) = \frac{1}{3}\,a^2d.$

47. $-\frac{9\,d}{7\,c\,m}:\left[\left(\frac{3\,b^2}{14\,c^2}:\frac{2\,m^2}{3\,d^3}\right): -\frac{b^2d^2}{4\,c\,m}\right] = 1.$

---

48. $(5\,a^2b+3\,a\,c-4\,c^3+d)\,.\,(2\,a^2b+3\,a\,c-d)$
$= 10\,a^4b^2+21\,a^3b\,c-8\,a^2b\,c^3-3\,a^2b\,d+9\,a^2c^2-12\,a\,c^4+4\,c^3d-d^2.$

49. $(4\,a^3b-15\,d\,m^2-9\,m^2x+21\,b^2d^3-11\,n\,y^2)\,.\,(-2\,a\,b+3\,d\,m$
$-4\,m\,x+7\,b\,d-n\,y) =$

50. $(a^3b)\,(-3\,a\,b+c)\,(3\,c-a^2b) =$

51. $(14\,a^2b^3d^2-7\,a\,b^4+13\,a^3b^2d-14\,a^2b\,d^2)\,.\,(7\,a\,b\,d^2-a^2b+3\,a\,b\,d^2$
$-7\,a\,b^2d) =$

52. $\left(\frac{d^2}{2\,m^2}-\frac{3\,m}{5\,d}\right)\left(\frac{2\,d}{7\,m}-\frac{5\,m^2}{2\,d^2}\right) = \frac{2\,d^3}{14\,m^3}-\frac{6\,d\,m}{35\,d\,m}-\frac{5\,d^2m^2}{4\,d^2m^2}+\frac{15\,m^3}{10\,d^3}$
$= \frac{d^3}{7\,m^3}-1\frac{59}{140}+1\frac{1}{2}\,d^{-3}\,m^3.$

53. $\left(\frac{4\,b^3\,d^2}{7\,m^2\,n} + \frac{d^2\,k}{3} - d\,k\right) \cdot \left(\frac{m\,n}{d^2\,k} - \frac{1}{d\,k}\right) = \frac{4\,b^3}{7\,k\,m} + \frac{m\,n}{3}$
$- \frac{m\,n}{d} - \frac{4\,b^3\,d}{7\,k\,m^2\,n} - \frac{d}{3} + 1.$

54. $\left(\frac{4\,b^2}{7\,c^3} - \frac{2}{5\,b^2\,c^2} + \frac{6}{7\,b^2} + \frac{1}{6\,c^3}\right)\left(\frac{7\,b^2}{10} - \frac{4\,c^3}{9\,b^2} + \frac{6\,c^2}{7\,b^2}\right) =$

---

55. $(a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3) : (a + b) = a^2 + 2\,a\,b + b^2.$

56. $(a^6 + 6\,a^5\,b + 15\,a^4\,b^2 + 20\,a^3\,b^3 + 15\,a^2\,b^4 + 6\,a\,b^5 + b^6) :$
$(a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 + b^5) = a + b.$

57. $(12\,a^7\,b - 23\,a^6\,b^2 - 19\,a^5\,b^3 + 47\,a^4\,b^4 - 15\,a^3\,b^5 - 12\,a^2\,b^6) :$
$(4\,a^4 - 5\,a^3\,b - 3\,a^2\,b^2) = 3\,a^3\,b - 2\,a^2\,b^2 - 5\,a\,b^3 + 4\,b^4.$

58. $6\,b^{13}\,c^4 - b^{11}\,c^5 - 13\,b^9\,c^6 + 23\,b^7\,c^7 - 55\,b^5\,c^8 + 36\,b^3\,c^9) :$
$(2\,b^7\,c + 3\,b^5\,c^2 - 4\,b^3\,c^3) = 3\,b^6\,c^3 - 5\,b^4\,c^4 + 7\,b^2\,c^5 - 9\,c^6.$

59. $\left(\frac{c^3\,m}{d^5} + \frac{c^4\,m}{d^4} - \frac{7\,c^5\,m}{d^3} - \frac{3\,c^6\,m}{d^2} + \frac{c^2\,m^3}{d} - c^4\,m^3\right) :$
$\left(\frac{c}{d^3} + \frac{3\,c^2}{d^2} + m^2\right) = \frac{c^2\,m}{d^2} - \frac{2\,c^3\,m}{d} - c^4\,m.$

60. $\left(\frac{15\,a^5\,b^2}{c^7} + \frac{34\,a^4}{b^3\,c} - \frac{31\,b^6}{c^6} - \frac{77\,a^2\,c^5}{b^8} + \frac{89\,b}{a} - \frac{24\,b^{10}}{a^5\,c^5}\right) :$
$\left(\frac{3\,a^2\,b}{c^4} + \frac{11\,a\,c^2}{b^4} - \frac{8\,b^5}{a^3\,c^3}\right) = \frac{5\,a^3\,b}{c^3} - \frac{7\,a^2\,c^3}{b^4} + \frac{3\,b^5}{a^2\,c^2}.$

61. $\left(d^2\,e - \frac{2\,d\,e^4}{m\,n^2} + \frac{4\,e^4\,m}{3\,d^3} - \frac{e^3\,m}{d\,n} + \frac{d^3\,m\,n}{e^2} - \frac{2\,d}{n} + \frac{4\,m^2\,n}{3\,d^3} - \frac{m^3}{d\,e}\right.$
$\left. - \frac{2\,d^4}{e\,m\,n} + \frac{4\,d^3\,e^2}{m^2\,n^3} - \frac{16\,e^2}{6\,d\,n} + \frac{2\,d\,e}{n^2}\right) : \left(\frac{d^3}{e^2} - \frac{2\,d^2\,e}{m\,n^2} + \frac{4\,e\,m}{3\,d^2} - \frac{m}{n}\right)$
$= \frac{e^3}{d} + \frac{m\,n}{d\,e} - \frac{2\,d\,e}{m\,n}.$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 45—51; 51—57; 58—64; Heis §. 34—36.

## III. Potenzirung.

1. $(3\,a\,c)^2 = 3^2\,a^2\,c^2 = 9\,a^2\,c^2.$
2. $(m^2)^3 = m^6.$
3. $(4\,a^2\,d^3)^2 = 16\,a^4\,d^6.$
4. $(2\,a\,b^2\,c^3)^3 = 8\,a^3\,b^6\,c^9.$
5. $(-3\,d^2\,c)^3 = -27\,d^6\,c^3.$
6. $[(-2\,d^2)^3]^3 = -512\,d^{18}.$
7. $(-4\,a^{2m+1})^2 = 16\,a^{4m+2}.$
8. $\left(\frac{b\,d}{a}\right)^3 = \frac{b^3\,d^3}{a^3}.$
9. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$
10. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}.$
11. $\left(-\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}.$

12. $\left[\left(\frac{-b^2 c}{2 d^5}\right)^2\right]^3 = \frac{b^{12} c^6}{64 d^{30}}$.

13. $\left[-\left(-\frac{2 b^2 c^3}{3 d^2 m}\right)^2\right]^3 = -\frac{64 b^{12} c^{18}}{729 d^{12} m^6}$.

14. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2 d}{c^2}\right)^3\right]^2 =$

15. $\left\{\left[\left(\frac{d^3 m}{b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{n^2}{d}\right)^3\right]^3\right\} : \left[\left(\frac{m^2}{b n^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^2 n^2}{a b^2}\right)^4\right] =$

---

16. $(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2$. (!)

17. $(d + e)^2 = d^2 + 2 d e + e^2$.

18. $(3 c^2 + 4 d^3)^2 = 9 c^4 + 24 c^2 d^3 + 16 d^6$.

19. $(2 b^x - 3 c^y)^2 = 4 b^{2x} - 12 b^x c^y + 9 c^{2y}$.

20. $(3 b - 5 c + 2 d)^2 = [(3 b - 5 c) + 2 d]^2 = (3 b - 5 c)^2 + 2 (3 b - 5 c) 2 d + (2 d)^2 = 9 b^2 - 30 b c + 25 c^2 + 12 b d - 20 c d + 4 d^2$.

21. $(3 a^2 b - 4 a^3 c + 4 a c^2)^2 =$

22. $\left(\frac{2 a^3 b}{3 c d^2} - \frac{5 a d}{6 b^2}\right)^2 =$

23. $\left(\frac{5 d^2}{6 m^3} - \frac{3 n}{4 x^3} + \frac{n^2}{5 d}\right)^2 =$

$326^2 =$

$5456^2 =$

$9065^2 =$

$0,54^2 =$

$35,5^2 =$

$144,5^2 =$

---

24. $(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$. (!)

25. $(2 d^x - 7 d^y)^3 = 8 d^{3x} - 84 d^{2x+y} + 294 d^{x+2y} - 343 d^{3y}$.

26. $3 a^2 + 2 b^3)^3 = 27 a^6 + 54 a^4 b^3 + 36 a^2 b^6 + 8 b^9$.

27. $\left(\frac{2 a^2}{3 d} + \frac{7 c}{8 a^3}\right)^3 =$

28. $\left(\frac{7 a^2 b^3}{9 c^2 d} - \frac{3 c^3 b^2}{4 a^3 y^2}\right)^3 =$

29. $(3 a + 2 b - d + 4 m)^3 =$

30. $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c^2} + \frac{3 a b^2}{b^3}\right)^3 =$

31. $65^3 =$

32. $2156^3 =$

33. $4862^3 =$

34. $45,3^3 =$

35. $217,5^3 =$

36. $14,876^3 =$

**Anmerkung.** Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 65—69; 69—71; Heis §. 37—38; 40.

## IV. Reductionen.

1. $3a^3b - 9a^2b^3 = 3a^2b(a - 3b^2)$.
2. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
3. $b^6 + b^9 = b^6(1 + b^3)$.
4. $m^4n^2 - n^2 = n^2(m^4 - 1)$.
5. $7a^2c^3d - 14a^3c^2 + 21a^2c^3d = 7a^2c^2(cd - 2a + 3cd)$.
6. $36a^7b^3c^2 - 18a^6b^2c^2 + 72a^4b^3c^3 = 18a^4b^2c^2(2a^3b - a + 4bc)$.
7. $15a^4c^3d^7 + 45a^5c^2d^5 - 75a^4c^2d^5 = 15a^4c^2d^5(cd^2 + 3a - 5)$.
8. $216b^{10}c^7d^3 - 264b^{12}c^{10}d + 24b^{14}c^{15}d^4 =$
   $24b^{10}c^7d(9d^2 - 11b^2c^3 + b^4c^8d^3)$.
9. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$.
10. $x^4 - 2x^2 + 1 = [(x + 1)(x - 1)][(x + 1)(x - 1)] = [(x + 1)(x - 1)]^2$.
11. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = [(x + y)(x - y)][(x + y)(x - y)] = [(x + y)(x - y)]^2$
    $= (x^2 - y^2)(x^2 - y^2)$.
12. $1 - 49a^8 = (1 + 7a^4)(1 - 7a^4)$.
13. $64x^2 - y^2 = (8x + y)(8x - y)$.
14. $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$.
15. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
16. $16x - 64xy + 64y^2 = (4x - 8y)^2$.
17. $\frac{4a^8b^4c^6}{9d^4m^2n^6} - \frac{9x^4y^2}{16d^6n^4} =$

$$\left(\frac{2a^4b^2c^3}{3d^2mn^3} + \frac{3x^2y}{4d^3n^2}\right)\left(\frac{2a^4b^2c^3}{3d^2mn^3} - \frac{3x^2y}{4d^3n^2}\right) =$$

---

18. $\frac{12a^3b^2 + 20bm^4n}{15a^3bc + 25cm^4n} = \frac{4b + 4b}{5c + 5c} = \frac{8b}{10c} = \frac{4b}{5c} = \frac{4}{5}bc^{-1}$.
19. $\frac{9a^2m^2 + 3a^5m^3}{81am + 27a^4m^2} = \frac{1}{9}am$.
20. $\frac{24a^3bc^2 + 8a^4c^3}{30a^2bc^3 + 10a^3c^4} = \frac{4a}{5c} = \frac{4}{5}ac^{-1}$.
21. $\frac{60d^4m^2n^3 + 10d^3m^3e}{120d^2me^2n^4 + 20dm^2e^3n} = \frac{d^2m}{2e^2n} = \frac{1}{2}d^2e^{-2}mn^{-1}$.
22. $\frac{40a^6b^3c - 8ab^4m + 12a^4b^7x^2}{30a^5b^2c^2 - 6b^3cm + 9a^3b^6cx^2} = \frac{4ab}{3c} = \frac{4}{3}abc^{-1}$.
23. $\frac{x - y}{x^2 - y^2} = \frac{x - y}{(x - y)(x + y)} = \frac{1}{x + y}$.
24. $\frac{4x + 1}{16x^2 - 1} = \frac{1}{4x - 1}$.

25. $\frac{4y^2-1}{16y^4-1}=\frac{(2y+1)(2y-1)}{[(2y+1)(2y-1)](4y^2+1)}=\frac{1}{4y^2+1}.$

26. $\frac{12a^5b+12a^3b^3}{a^4-b^4}=\frac{12a^3b(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}=\frac{12a^3b}{a^2-b^2}.$

27. $\frac{12b^2c+75c^3}{16b^4-625c^4}=\frac{3c(4b^2+25c^2)}{(4b^2-25c^2)(4b^2+25c^2)}=\frac{3c}{4b^2-25c^2}.$

28. $\frac{m^3+mn(1+m)+n^2}{m^3+mn(1-3x^2)-3m^3x^2}=$

29. $\frac{30b^2c^4-48b^3c^2d^4-8b^4c^2+144bc^2m}{3bc^2d^3-54b^2d^7-9b^3d^3+9d^3m}=$

---

30. $\frac{3a^2b}{4cn}-\frac{7ac}{3d^2}-\frac{a^2b^3c}{6dn}=\frac{9a^2bd^2-28ac^2n-2a^2b^3c^2d}{12cd^2n}=$
$\frac{a(9abd^2-28c^2n-2ab^3c^2d)}{12cd^2n}.$

31. $\frac{2abx}{x^2}+\frac{4a}{x^3}+\frac{3ab}{x}=\frac{2abx^2+4a+3abx^2}{x^3}=\frac{4a+5abx^2}{x^3}.$

32. $\frac{14d^2-10b^2}{3d^2}-\frac{4m^2-2n^2}{2n^2}+\frac{2b^2n^2+2d^2m^2}{d^2n^2}-\frac{1}{3}=$
$\frac{28d^2n^2-20b^2n^2-12d^2m^2+6d^2n^2+12b^2n^2+12d^2m^2-2d^2n^2}{6d^2n^2}=$
$\frac{32d^2n^2-8b^2n^2}{6d^2n^2}=\frac{16d^2-4b^2}{3d^2}.$

33. $x-\frac{(x-1)^2}{x}=x-\frac{(x^2-2x+1)}{x}=$
$\frac{x^2-x^2+2x-1}{x}=\frac{2x-1}{x}.$

34. $4m-\frac{(3-2m)^2}{m}=4m-\frac{9-12m+4m^2}{m}=$
$\frac{4m^2-9+12m-4m^2}{m}=\frac{12m-9}{m}.$

35. $30d-\frac{(10m+6d)^2}{4m}=30d-\frac{(100m^2+120dm+36d^2}{4m}=$
$\frac{120dm-100m^2-120dm-36d^2}{4m}=\frac{25m^2+9d^2}{-m}.$

36. $10d+14m-\frac{50d^2-100m^2}{10d-14m}=$
$\frac{100d^2-196m^2-50d^2+100m^2}{10d-14m}=\frac{25d^2-48m^2}{5d-7m}.$

37. $\frac{3a}{b+3a} - \frac{b}{b-3a} = \frac{3a(b-3a) - b(b+3a)}{(b+3a)(b-3a)} =$

$\frac{3ab - 9a^2 - b^2 - 3ab}{b^2 - 9a^2} = \frac{9a^2 + b^2}{9a^2 - b^2}.$

38. $\frac{8m^2 + 14n^2}{4m^2 + 8n^2} - \frac{10m^2 + 14n^2}{6m^2 + 18n^2} =$

39. $\frac{a+6}{2a-3} - \frac{a^2 - 10}{8a^2 - 8a + 2} - \frac{2a^3 - a - 6}{4a^3 - 6a^2 + 3a - 1} =$

---

40. $\left(m - \frac{n^2}{m}\right) : \left(1 + \frac{n}{m}\right) = \frac{m^2 - n^2}{m} : \frac{m+n}{m} = \frac{m^2 - n^2}{m+n} =$

$\frac{(m+n)(m-n)}{m+n} = m - n.$

41. $\left[(m^2 - n^2)\frac{p}{q}\right] : \left((m-n)\frac{m^2}{q}\right) = \frac{p(m^2 - n^2)}{q} : \frac{m^2(m-n)}{q} =$

$\frac{p(m^2 - n^2)}{m^2(m-n)} = \frac{p(m+n)}{m^2}.$

42. $\frac{m^2}{m^2 - n^2} - \frac{n^2}{m^2 + n^2} = \frac{m^2(m^2 + n^2) - n^2(m^2 - n^2)}{(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)} =$

$\frac{m^4 + m^2n^2 - m^2n^2 + n^4}{m^4 - n^4} = \frac{m^4 + n^4}{m^4 - n^4}.$

43. $\left(\frac{a^2c^2}{2d} - \frac{ac}{4b^2c} - \frac{ab}{2b^2d}\right) : \frac{ac}{2b^2d} = \frac{2a^2b^2c^3 - acd - 2abc}{4b^2cd} : \frac{ac}{2b^2d} =$

$\frac{ac(2ab^2c^2 - d - 2b}{4b^2cd} : \frac{ac}{2b^2d} = \frac{2ab^2c^2 - d - 2b}{2c}.$

44. $\left[\frac{a}{b^2} \cdot \frac{a}{(b+1)^2} \cdot \left(\frac{1+a}{2}\right)^2\right] : \left[\left(\frac{a}{b^2} - \frac{a}{(b+1)^2}\right)\left(\frac{1+a}{2}\right)\right] =$

$\left[\frac{a^2}{b^2(b^2 + 2b + 1)} \cdot \frac{1 + 2a + a^2}{4}\right] :$

$\left[\left(\frac{a}{b^2} - \frac{a}{b^2 + 2b + 1}\right) \cdot \frac{1+a}{2}\right] \ldots = \frac{a(1+a)}{2(2b+1)}.$

45. $\left\{\frac{6d + 18dm}{4d^2m - 12cm^2} : \left[\frac{(1 - 9m^2)c}{8d^2m^3} : \left(\frac{d^4 - 9c^2m^2}{4d^2m^2} :\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left.[d^3 + 3dcm : (\frac{m}{3} - m^2)]\right)\right] : \frac{m}{c^2}\right\} = c.$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite: 72—73; 73—78; 79—88; 88—94.

# II. Wurzeln.

## b. Wurzeln mit positiven ganzen Exponenten.

### §. 79.

**Erklärung 1.** Wurzel oder radix bezeichnet einen Ausdruck, nach welchem man eine gegebene Zahl in so viel gleiche Factoren zu zerlegen hat, als eine andere Zahl angibt. Daher heisst Radiciren (Wurzelausziehen) eine Zahl in soviel gleiche Factoren zerlegen als eine andere gleichfalls gegebene Zahl Einheiten hat und den gleichen Factor als Resultat ansetzen.

Die Zahl, welche radicirt werden soll, heisst Radicand, und die Zahl, mit welcher radicirt wird, heisst Radicator oder Wurzelexponent und das durch Wurzelausziehen gewonnene Resultat heisst Wurzel oder Dignand.

**Erklärung 2.** Das Zeichen für eine Wurzelgrösse ist ein verzogenes r (Anfangsbuchstabe von radix) vor dem Radicanden mit dem Wurzelexponenten in der Mitte. Es sei der Radicand a und der Wurzelexponent m, so ist:

$$\sqrt[m]{a}$$

— sprich m^te^ Wurzel aus a — der allgemeine Ausdruck einer Wurzel. Der Radicand mit dem Radicator radicirt, gibt die radix. Diese Wurzel sei eine Zahl b, da eine Zahl radicirt, immer wieder eine Zahl gibt, so ist

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b\,.\,b\,.\,b \ldots m \text{ mal}} = b.$$

Der Ausdruck $\sqrt[m]{a}$ heisst die formelle und b die entwickelte Wurzel.

**Erklärung 3.** Die erste Wurzel aus einer Zahl ist die Zahl selbst:

$$\sqrt[1]{a} = a;$$

die zweite Wurzel heisst auch Quadratwurzel und wird ohne Exponent (Radicator) geschrieben:

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a};$$

die dritte und vierte heisst Kubik- und Biquadratwurzel:

$$\sqrt[3]{a},\ \sqrt[4]{a}.$$

**Erklärung 4.** Radiciren heisst auch eine Zahl suchen, die mit dem Radicator potenzirt, den Radicanden gibt (cf. §. 66):

$$\sqrt[m]{a} = b \text{ und } b^m = a.$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ und } 2^3 = 8.$$

**Zusatz 1.** Die Wurzel mit dem Radicator potenzirt, gibt den Radicanden:

$$(\sqrt[m]{a})^m = a;$$

denn setzen wir aus der Gleichung $\sqrt[m]{a} = b$ den Werth von b in die Gleichung $b^m = a$, so ist:

$$(\sqrt[m]{a})^m = a.$$

**Zusatz 2.** Die Potenz durch den Exponenten radicirt, gibt den Dignanden:

$$\sqrt[m]{(b^m)} = b;$$

denn setzen wir aus der Gleichung $b^m = a$ den Werth von a in die Gleichung $\sqrt[m]{a} = b$, so ist:

$$\sqrt[m]{(b^m)} = b.$$

**Erklärung 5.** Das Potenziren lehrt aus dem Dignanden und Exponenten den Potenzwerth; das Radiciren aber aus dem Potenzwerth und Exponenten den Wurzelwerth bestimmen. Radiciren und Potenziren sind entgegengesetzte Operationen; werden sie mit demselben Exponenten vollzogen, so heben sie sich gegenseitig auf.

Anmerkung. Aus der Umkehrung der analogen Sätze über die Potenzen ergeben sich die Lehrsätze für die Wurzelgrössen.

## §. 80.

**Grundsatz 6.** Gleiches durch Gleiches radicirt, gibt Gleiches: Es sei $x = y$, so ist:

$$\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{y}.$$

§. 81.

**Lehrsatz.** Ein Product wird radicirt, wenn man jeden Factor radicirt:

$$\sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}.$$

**Beweis.**

Man potenzirt beide Seiten mit m, so ist:

$$(\sqrt[m]{a \cdot b})^m = a \cdot b, \quad \text{cf. §. 79.}$$

$$(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m, \quad \text{cf. §. 71.}$$

$$= a \cdot b. \quad \text{cf. §. 79.}$$

Daher auch:

$$(\sqrt[m]{a \cdot b})^m = (\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m,$$

und nach §. 79:

$$\sqrt[m]{(\sqrt[m]{a \cdot b})^m} = \sqrt[m]{(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m},$$

d. h.

$$\sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}.$$

**Zusatz 1.** Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden multiplicirt, wenn man das Product der Radicanden durch den gemeinschaftlichen Exponenten radicirt:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a\,b}.$$

**Zusatz 2.** Radicirbare Factoren eines Products werden gleich radicirt:

$$\sqrt[m]{a^m b} = a \sqrt[m]{b}; \qquad \sqrt{a^2 b c} = a \sqrt{b c}.$$

$$\sqrt[n]{a\, b^n\, c^n} = b\, c \sqrt[n]{a}; \quad \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3 \sqrt[3]{2}.$$

§. 82.

**Lehrsatz.** Ein Quotient wird radicirt, wenn man Dividend und Divisor radicirt:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

**Beweis.**

Potenzirt man beide Seiten mit m, so ist:

$$\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m = \frac{a}{b}, \quad \text{cf. §. 79.}$$

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}, \quad \text{cf. §. 72 Zusatz.}$$

$$= \frac{a}{b}. \quad \text{cf. §. 79.}$$

Daher auch:

$$\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m = \left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m,$$

folglich auch:

$$\sqrt[m]{\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m} = \sqrt[m]{\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m},$$

d. h.

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

**Zusatz.** Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden dividirt, wenn man den Quotienten der Radicanden durch den gemeinschaftlichen Exponenten radicirt:

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

## §. 83.

**Lehrsatz.** Eine Potenz wird durch eine Zahl radicirt, wenn man ihren Exponenten durch die Zahl dividirt;

oder:

wenn man den Dignanden durch die Zahl radicirt und die entwickelte Wurzel mit dem Exponenten potenzirt:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n. \quad \text{(condit. n ein Vielfaches von m.)}$$

**Beweis.**

Potenzirt man beide Seiten mit m, so ist:

$$(\sqrt[m]{a^n})^m = a^n, \quad \text{cf. §. 79.}$$

$$(a^{\frac{n}{m}})^m = a^{\frac{n}{m} \cdot m}, \quad \text{cf. §. 73.}$$

$$= a^n. \quad \text{cf. §. 46.}$$

Demnach auch:

$$(\sqrt[m]{a^n})^m = (a^{\frac{n}{m}})^m,$$

folglich auch:

$$\sqrt[m]{(\sqrt[m]{a^n})^m} = \sqrt[m]{(a^{\frac{n}{m}})^m},$$

d. h.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Dasselbe lässt sich auch vom Ausdrucke

$$(\sqrt[m]{a})^n$$

beweisen; denn

$$(\sqrt[m]{a})^{n \cdot m} = (\sqrt[m]{a})^{m \cdot n} = a^n. \quad \text{(cf. §. 33.)}$$

**Zusatz 1.** Soll man einen Ausdruck durch eine Zahl potenziren und durch eine andere radiciren, so ist es gleichgiltig, in welcher Ordnung dies geschieht:

$$\sqrt[m]{(a^n)} = (\sqrt[m]{a})^n.$$

**Zusatz 2.** Es lassen sich aus diesem Lehrsatze noch weitere Sätze ableiten, wenn man vom zweiten oder dritten Ausdrucke ausgeht und auf die übrigen schliesst.

## §. 84.

**Lehrsatz.** Eine Wurzel wird durch eine Zahl radicirt, wenn man die Wurzelexponenten mit einander multiplicirt:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}.$$

**Beweis.**

Potenzirt man beide Seiten mit mn, so ist:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = a.$$

$$(\sqrt[m.n]{a})^{mn} = \left[(\sqrt[m.n]{a})^m\right]^n = (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Demnach auch:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = (\sqrt[m.n]{a})^{mn};$$

folglich auch:

$$\sqrt[mn]{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}} = \sqrt[m.n]{(\sqrt[mn]{a})^{mn}},$$

d. h.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

**Zusatz 1.** Eine Zahl wird durch ein Product radicirt, wenn man die Zahl durch jeden Factor radicirt:

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

**Zusatz 2.** Es ist gleichgiltig, in welcher Ordnung ein Ausdruck mit mehreren Factoren nach einander radicirt wird:

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n.m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

## §. 85.

**Lehrsatz.** Eine Wurzel aus einer Potenz bleibt unverändert, wenn man beide Exponenten durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mx]{a^{nx}} = \sqrt[m:x]{a^{\frac{n}{x}}}.$$

### Beweis.

Potenzirt man jeden Ausdruck mit $\frac{m}{x}$, so ist:

$$(\sqrt[m]{a^n})^{\frac{m}{x}} = \sqrt[x]{(\sqrt[m]{a^n})^m} = \sqrt[x]{a^n}, \quad \text{cf. §. 83; 79.}$$

$$(\sqrt[mx]{a^{nx}})^{\frac{m}{x}} = \sqrt[x]{(\sqrt[mx]{a^{nx}})^m} = \sqrt[x]{(\sqrt[mx]{a^{mx}})^n} = \sqrt[x]{a^n}, \quad \text{cf. §. 83; 73, 2.}$$

$$\left(\sqrt[m:x]{a^{\frac{n}{x}}}\right)^{\frac{m}{x}} = a^{\frac{n}{x}} = \sqrt[x]{a^n}. \quad \text{cf. §. 79; 83.}$$

Daher auch:

$$(\sqrt[m]{a^n})^{\frac{m}{x}} = (\sqrt[mx]{a^{nx}})^{\frac{m}{x}} = \left(\sqrt[m:x]{a^{\frac{n}{x}}}\right)^{\frac{m}{x}};$$

folglich auch:

$$\sqrt[\frac{m}{x}]{(\sqrt[m]{a^n})^{\frac{m}{x}}} = \sqrt[\frac{m}{x}]{(\sqrt[mx]{a^{nx}})^{\frac{m}{x}}} = \sqrt[\frac{m}{x}]{\left(\sqrt[\frac{m}{x}]{a^{\frac{n}{x}}}\right)^{\frac{m}{x}}},$$

d. h.

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mx]{a^{nx}} = \sqrt[\frac{m}{x}]{a^{\frac{n}{x}}}.$$

**Zusatz.** Unter Anwendung dieses Satzes werden Wurzelgrössen mit verschiedenen Exponenten auf gleiche Benennung gebracht: (cf. §. 58).

$$\sqrt[d]{a^x}\,.\,\sqrt[m]{b^y}\,.\,\sqrt[n]{c^z} = \sqrt[dmn]{a^{mnx}}\,.\,\sqrt[dmn]{b^{dny}}\,.\,\sqrt[dmn]{c^{dmz}}$$
$$= \sqrt[dmn]{a^{mnx}\,b^{dny}\,c^{dmz}}.$$

**Erklärung.** Dieser Satz findet bei der Multiplication und Division mit Wurzelgrössen häufig Anwendung, weil nur solche Wurzeln multiplicirt und dividirt werden können, die gleiche Wurzelexponenten haben. Haben die Wurzeln verschiedene Exponenten, so sind sie erst auf gleiche Benennung zu bringen.

Anmerkung. Wurzelgrössen haben gleiche Benennung, wenn sie gleiche Wurzelexponenten haben.

## §. 86.

**Erklärung.** Wurzelgrössen können nur dann wirklich addirt und subtrahirt werden, wenn sie gleichartig sind. Wurzelgrössen sind gleichartig, wenn sie gleiche Radicanden und gleiche Wurzelexponenten haben.

Ungleichartige Wurzelgrössen können nur durch Additions- und Subtractionszeichen verbunden werden, falls sie nicht gleichartig gemacht werden können. Wurzelgrössen werden gleichartig gemacht, wenn man nach §. 85 gleiche Exponenten und nach §. 81, 2 gleiche Radicanden herstellt. Z. B.

1. $\sqrt{8} + 2\sqrt{8} + 9\sqrt{8} - 10\sqrt{8} = 2\sqrt{8}.$
2. $\sqrt[3]{ac} + 4\sqrt[3]{ac} - 2\sqrt[3]{ac} = 3\sqrt[3]{ac}.$
3. $\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{256} - 3\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{4} + \sqrt[6]{64.4} - 3\sqrt[6]{4} = -2\sqrt[6]{4} + 2\sqrt[6]{4} = 0.$
4. $\sqrt[3]{16a^3b} + \sqrt{4a^2b} - \sqrt{a^2b} - \sqrt[3]{54a^3b} = 2a\sqrt[3]{2b} + 2a\sqrt{b} - a\sqrt{b} - 3a\sqrt[3]{2b}$
   $= a\sqrt{b} - a\sqrt[3]{2b}.$

## §. 87.

### Beispiele zur Einübung der vorangehenden Lehrsätze.

I.

1. $\sqrt{9} = 3$, denn $(3)^2 = 9$.

2. $\sqrt[3]{a^3} = a$, denn $(a)^3 = a^3$.

3. $\sqrt[3]{8a^3c^3} = 2ac$, denn $(2ac)^3 = 8a^3c^3$.

4. $\sqrt{25a^2b^2} = 5ab$, denn $(5ab)^2 = 25a^2b^2$.

II.

5. $\sqrt[x]{8ab} = \sqrt[x]{8}\sqrt[x]{a}\sqrt[x]{b}$.

6. $\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b}$.

7. $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27.3} = 3\sqrt[3]{3}$.

8. $\sqrt[3]{27d^3} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{d^3} = 3d$.

9. $\sqrt[3]{16a^4c} = \sqrt[3]{2.8a^3.a.c} = 2a\sqrt[3]{2ac}$.

10. $3\sqrt{8b^3c^5} = 3\sqrt{2.4.b^2.b.c^4.c} = 6bc^2\sqrt{2bc}$.

III.

11. $\sqrt[3]{\frac{ab}{cd}} = \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{cd}} = \frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}\sqrt[3]{d}}$.

12. $\sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$.

13. $\sqrt[3]{\frac{27ab}{8cm}} = \frac{\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{c}\sqrt[3]{m}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{ab}{cm}}$.

14. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{x}$.

15. $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[12]{x^5}} = \sqrt[4]{x}$.

16. $\frac{\sqrt[3]{d^2}}{\sqrt[4]{d}} = \sqrt[12]{d^8} : \sqrt[12]{d^3} = \sqrt[12]{d^5}$.

17. $\frac{\sqrt[3]{b^n}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{b^n}{b}} = \sqrt[3]{b^{n-1}}$.

18. $\frac{3\sqrt[4]{b^2c^3d^{-2}}}{4\sqrt[4]{b^3c^3d^m}} = \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{b^2c^3d^{-2}}{b^3c^3d^m}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{b\,d^{m+2}}}$.

IV.

19. $\sqrt{a^8} = a^{\frac{8}{2}} = a^4.$

20. $\sqrt[3]{c^9 d} = c^3 \sqrt[3]{d}.$

21. $\sqrt{a^4 b^6 c^8} = a^2 b^3 c^4.$

22. $\sqrt[4]{a^{12} b^{16}} = a^3 b^4$

23. $y^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{y}.$

24. $a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[y]{b^x}.$

V.

25. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^x}} = \sqrt[mn]{a^x}.$

26. $\sqrt{\sqrt{9^2}} = \sqrt[4]{81} = 3.$

27. $\sqrt[3m]{a c^m} = \sqrt[3]{\sqrt[m]{a c^m}} = \sqrt[3]{c \sqrt[m]{a}}.$

28. $\sqrt[8]{c d} = \sqrt[4]{\sqrt{c d}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{c d}}}.$

29. $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{27^8}}} = \sqrt[3]{27^{\frac{8}{2 \cdot 4}}} = \sqrt[3]{27} = 3.$

VI.

30. $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} + \sqrt[3]{64 \cdot 5} = 2 \sqrt[3]{5} + 4 \sqrt[3]{5} = 6 \sqrt[3]{5}.$

31. $\sqrt{a^3} + 2 \sqrt{a^3} + 9 \sqrt{a^3} = 12 \sqrt{a^3}.$

32. $\sqrt[4]{c} \cdot \sqrt[8]{c^3} = \sqrt[8]{c^2} \cdot \sqrt[8]{c^3} = \sqrt[8]{c^5}.$

33. $\sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[12]{b^5} = \sqrt[12]{b^8} \cdot \sqrt[12]{b^5} = \sqrt[12]{b^{13}} = \sqrt[12]{b^{12} \cdot b} = b \cdot \sqrt[12]{b}.$

34. $\sqrt[5]{a^3 c^3} \cdot \sqrt[3]{a^2 c^2} = \sqrt[15]{a^9 c^9} \cdot \sqrt[15]{a^{10} c^{10}} = \sqrt[15]{a^{19} c^{19}} = \sqrt[15]{a^{15} c^{15} \cdot a^4 \cdot c^4}$
$= a c \sqrt[15]{a^4 c^4}.$

35. $5 \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{6} = 5 \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{6^3} = 5 \sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[6]{216} = 5 \sqrt[6]{1944}.$

36. $\sqrt{36} : \sqrt{4} = \sqrt{9} = 3.$

37. $2 \sqrt{6} : 3 \sqrt[3]{9} = \dfrac{2 \sqrt[6]{216}}{3 \sqrt[6]{81}} = \dfrac{2}{3} \sqrt[6]{\dfrac{8}{3}}.$

## §. 88.

**Erklärung.** Der Radicand einer Wurzelgrösse kann eine positive und negative Zahl sein. Unter der Voraussetzung, dass der Radicand eine positive Zahl ist, ergeben sich folgende Sätze.

**Lehrsatz 1.** Grösseres durch Gleiches radicirt, gibt Grösseres.

Es sei $a > b$, so ist:

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}.$$

**Beweis.**

Denn wenn

$$\sqrt[m]{a} \leqq \sqrt[m]{b}$$

wäre, so wäre auch:

$$(\sqrt[m]{a})^m \leqq (\sqrt[m]{b})^m, \quad \text{cf. §. 76;}$$

d. h.

$$a \leqq b, \quad \text{cf. §. 79;}$$

condit.

$$a > b,$$

folglich:

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}.$$

**Lehrsatz 2.** Die Wurzel aus einem ächten Bruche wird um so grösser, je grösser der Radicator wird.

Es sei a ein ächter Bruch, d. h. $a < 1$, und es sei $x > x - n$, so ist:

$$\sqrt[x]{a} > \sqrt[x-n]{a}.$$

**Beweis.**

Ist $a < 1$ und $x > (x-1) > (x-2) > (x-3) > (x \ldots - n)$, so ist:

$$a^{x-n} > a^x, \quad \text{cf. §. 76, 2;}$$

also auch:

$$\sqrt[x(x-n)]{a^{x-n}} > \sqrt[x(x-n)]{a^x}, \quad \text{cf. vorig. Satz;}$$

d. h.

$$\sqrt[x]{a} > \sqrt[x-n]{a}. \quad \text{cf. §. 85.}$$

**Lehrsatz 3.** Die Wurzel aus einem unächten Bruche wird um so kleiner, je grösser der Radicator wird.

Es sei b ein unächter Bruch, d. h. $b > 1$, so ist:

$$\sqrt[x]{b} < \sqrt[x-n]{b}.$$

**Beweis.**

Ist $b > 1$, so ist auch nach §. 76, 3:

$$b^x > b^{x-n},$$

also auch

$$\sqrt[x(x-n)]{b^x} > \sqrt[x(x-n)]{b^{x-n}},$$

d. h.

$$\sqrt[x-n]{b} > \sqrt[x]{b},$$

oder

$$\sqrt[x]{b} < \sqrt[x-n]{b}.$$

Denn wenn $a = \frac{1}{64}$ und $b = \frac{4096}{729}$ und $x = 6$ und $n = 3$, so ist:

$$\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2} > \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4},$$

und

$$\sqrt[6]{\frac{4096}{729}} = \frac{4}{3} < \sqrt[3]{\frac{4096}{729}} = \frac{16}{9}.$$

**Zusatz.** Die Wurzel aus einem Bruche gibt nie eine ganze Zahl, sondern immer wieder einen Bruch.

## §. 89.

### Irrationale Grössen.

**Erklärung 1.** Da nur die Brüche potenzirt und radicirt wieder Brüche geben (§. 88, 76), so kann die Wurzel aus einer ganzen Zahl nie ein Bruch sein. Und doch gibt es viele ganze Zahlengrössen, deren Wurzelwerth auch keine ganze Zahl ist. Dies findet bei jenen Zahlen statt, die sich nicht in so viele gleiche Factoren zerlegen lassen als der Wurzelexponent Einheiten hat. Wurzelgrössen mit nicht radicirbaren Radicanden heissen irrational. Irrational ist bei Weitem die grössere Mehrzahl der Wurzeln, insonderheit ist es jede Quadratwurzel aus einer Nicht-Quadratzahl und jede Kubikwurzel aus einer Nicht-Kubikzahl. Z. B.

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{7},\ \sqrt{a},\ \sqrt[3]{b},\ \sqrt[m]{a}.$$

Für irrationale Grössen lassen sich nur Grenzen angeben, zwischen denen der wirkliche Wurzelwerth liegt, und da man diese Grenzen so eng bestimmen kann, als man will, durch Anwendung unendlicher nicht periodischer Decimalbrüche, so heissen diese Wurzeln Näherungswerthe. Z. B.

$$\sqrt{6} \text{ ist nicht } = 2 \text{ und nicht } = 3, \text{ weil } (2)^2 = 4 \text{ und } (3)^2 = 9.$$

Der Näherungswerth liegt zwischen 2 und 3 und ist $= 2,4494$; denn $(2,4494)^2 = 5,99956\ldots.$ Die Wurzel 2,4494 ist nicht einmal um $\frac{1}{10000}$ vom wirklichen Werthe entfernt, denn

$$2{,}4494 + \frac{1}{10000} = 2{,}4495;\ (2{,}4495)^2 = 6{,}00005.$$

**Erklärung 2.** Alle Wurzelgrössen, bei welchen sich der Wurzelwerth entweder durch eine ganze Zahl oder durch einen Bruch genau bestimmen lässt, heissen im Gegensatz zu den irrationalen Grössen rational. Z. B.

$$\sqrt{4} = 2;\ \sqrt[3]{27} = 3;\ \sqrt{a^2} = a;\ \sqrt[3]{c^3 d^3} = c\,d;\ \sqrt[3]{27\,a^3} = 3\,a.$$

Anmerkung. Die irrationalen Grössen werden behandelt wie die rationalen.

**Erklärung 3.** Finden sich bei der Division von Wurzelgrössen im Divisor irrationale Ausdrücke, so können diese rational gemacht werden, indem man Dividend und Divisor mit dem irrationalen Ausdruck multiplicirt (§. 56) und die Producte radicirt.

Ist der Divisor zweigliedrig, so hat man vor der Multiplication ein Operationszeichen in sein entgegengesetztes zu verwandeln, und ist er dreigliedrig, so hat man zwei Zeichen umzuwandeln.

I. $\frac{a}{\sqrt{r}} = \frac{a\sqrt{r}}{\sqrt{r}\,.\,\sqrt{r}} = \frac{a\sqrt{r}}{r}.$

II. $\frac{a}{p + \sqrt{u}} = \frac{a\,(p - \sqrt{u})}{(p + \sqrt{u})\,(p - \sqrt{u})} = \frac{a\,(p - \sqrt{u})}{p^2 - u}.$

III. $\frac{\sqrt{p} + \sqrt{u}}{\sqrt{p} - \sqrt{u}} = \frac{(\sqrt{p} + \sqrt{u})\,(\sqrt{p} + \sqrt{u})}{(\sqrt{p} - \sqrt{u})\,(\sqrt{p} + \sqrt{u})} = \frac{p + 2\sqrt{pu} + u}{p - u}.$

Anmerkung. Dieses Verfahren heisst irrationale Nenner in rationale umformen und kommt nicht selten in der Geometrie zur Anwendung.

### Beispiele.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

2. $\frac{2 + \sqrt{6}}{4 - \sqrt{6}} = \frac{(2 + \sqrt{6})\,(4 + \sqrt{6})}{(4 - \sqrt{6})\,(4 + \sqrt{6})} = \frac{8 + 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 6}{10} = \frac{7 + 3\sqrt{6}}{5}.$

3. $\frac{3}{\sqrt{15} + 2} = \frac{3\sqrt{15} - 2}{\sqrt{15} + 2\,.\,\sqrt{15} - 2} = \frac{3\sqrt{15} - 2}{15 - 4} = \frac{3\sqrt{15} - 2}{11}.$

4. $\frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{10}}{3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{6} + 3\sqrt{10})\,(3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{(3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})\,(3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})} =$

$$= \frac{6\sqrt{12} + 2\sqrt{18} + 9\sqrt{20} + \sqrt{30} - 3\sqrt{50}}{9\sqrt{4} - \sqrt{9} + 2\sqrt{15} - \sqrt{25}} =$$

$$\frac{6\sqrt{4\,.\,3} + 2\sqrt{9\,.\,2} + 9\sqrt{4\,.\,5} + \sqrt{30} - 3\sqrt{25\,.\,2}}{10 + 2\sqrt{15}} =$$

$$\frac{12\sqrt{3} + 18\sqrt{5} + \sqrt{30} - 9\sqrt{2}}{10 + 2\sqrt{15}} =$$

$$\frac{(12\sqrt{3} + 18\sqrt{5} + \sqrt{30} - 9\sqrt{2})\,(10 - 2\sqrt{15})}{(10 + 2\sqrt{15})\,(10 - 2\sqrt{15})} =$$

$$\frac{120\sqrt{3}+180\sqrt{5}-90\sqrt{2}-24\sqrt{45}-36\sqrt{75}-2\sqrt{450}+28\sqrt{30}}{100-4\sqrt{225}}=$$

$$\frac{120\sqrt{3}+180\sqrt{5}-90\sqrt{2}-24\sqrt{9.5}-36\sqrt{25.3}-2\sqrt{25.9.2}+28\sqrt{30}}{40}=$$

$$(108\sqrt{5}-60\sqrt{3}-120\sqrt{2}+28\sqrt{30}):40=(27\sqrt{5}-15\sqrt{3}-30\sqrt{2}+7\sqrt{30}):10.$$

## §. 90.

**Erklärung.** Der Radicand einer Wurzelgrösse kann eine positive und negative Zahl sein. Da aber die entwickelte Wurzel aus der Zerlegung des Radicanden in so viel gleiche Factoren, als der Exponent Einheiten hat, gewonnen wird (§. 79), so ist der Werth der entwickelten Wurzel nicht blos vom Vorzeichen des Radicanden, sondern auch vom Radicator abhängig (§. 75).

Daraus ergeben sich folgende Lehrsätze:

**Lehrsatz 1.** Jede gerade Wurzel aus einem positiven Radicanden ist entweder positiv oder negativ: *

$$\sqrt{(+a^2)}=\pm\sqrt{a^2}=\pm a.$$

$$\sqrt[2n]{(+a)}=\pm\sqrt[2n]{a}=\pm a^{\frac{1}{2n}}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$(+a)^2 \text{ und } (-a)^2=+a^2, \quad \text{cf. §. 75; 1, 2; §. 79, Erkl. 4.}$$

und

$$\left((+a)^{\frac{1}{2n}}\right)^{2n} \text{ und } \left((-a)^{\frac{1}{2n}}\right)^{2n}=+a. \quad \text{cf. §. 73.}$$

**Lehrsatz 2.** Jede ungerade Wurzel aus einem positiven Radicanden ist nur positiv:

$$1.\ \sqrt[3]{(+a^3)}=+\sqrt[3]{a^3}=+a.$$

$$2.\ \sqrt[2n+1]{(+a)}=+\sqrt[2n+1]{a}=+a^{\frac{1}{2n+1}}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$(+a)^3=+a^3 \text{ und } \left((+a)^{\frac{1}{2n+1}}\right)^{2n+1}=+a.$$

---

* Dieser Satz gilt nur, so lange man nicht weiss, wie die Wurzelgrösse entstanden ist. Ist das bekannt, dann hat die Zweideutigkeit der Wurzel ein Ende; denn

$$\sqrt{(+a)^2}=a \text{ und } \sqrt{(-a)^2}=-a.$$

**Lehrsatz 3.** Jede ungerade Wurzel aus einem negativen Radicanden ist nur negativ:

$$\sqrt[3]{(-a^3)} = -\sqrt[3]{a^3} = -a.$$

$$\sqrt[2n+1]{(-a)} = -\sqrt[2n+1]{a} = -a^{\frac{1}{2n+1}}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$(-a)^3 = -a^3 \text{ und } \left(-a^{\frac{1}{2n+1}}\right)^{2n+1} = -a.$$

**Lehrsatz 4.** Jede gerade Wurzel aus einem negativen Radicanden ist imaginär, d. h. sie ist weder positiv, noch negativ, sie ist überhaupt keine algebraische Zahl:

$\sqrt{-p^2}$ ist nicht $= +p$ und nicht $= -p$, und $\sqrt{-64}$ nicht $= +8$ und nicht $= -8$.

**Zusatz 1.** Jede gerade Wurzel aus positiv 1 ist entweder positiv oder negativ, jede ungerade Wurzel ist nur positiv:

$$\sqrt[2n]{(+1)} = \pm 1; \quad \sqrt[2n+1]{(+1)} = +1.$$

**Zusatz 2.** Jede ungerade Wurzel aus negativ 1 ist negativ, jede gerade Wurzel aus negativ 1 ist imaginär:

$$\sqrt[2n+1]{(-1)} = -1; \quad \sqrt[2n]{-1} = \text{imaginär}.$$

## §. 91.

### Imaginäre Grössen. *

**Erklärung 1.** Alle Wurzelgrössen mit negativen Radicanden und geraden Exponenten heissen imaginär, unmöglich, weil es keine algebraische Zahl gibt, die zu einer geraden Potenz erhoben, ein negatives Resultat gibt (§. 75 und 90).

Der allgemeine Ausdruck einer imaginären Grösse ist:

$$\sqrt[2n]{-1} \text{ oder } \sqrt{-1},$$

Für

$$\sqrt[2n]{-1} \text{ oder } \sqrt{-1},$$

hat man die kurze Bezeichung:

$$i.$$

---

* Direct lateral und invers lateral für positiv und negativ imaginär wäre weit richtiger. Gauss.

Mit i bezeichnet man die imaginäre Einheit. Alle Producte aus der positiven oder negativen imaginären Einheit heissen imaginäre Zahlen. Im Gegensatz zu den imaginären Zahlen, die eine eigene Art für sich bilden, heissen alle algebraische Zahlen (positive und negative) reelle Zahlen. Bei den reellen hat man wieder zu unterscheiden irrationale und rationale (§. 89).

**Erklärung 2.** Die imaginären Zahlen finden erst in der höhern Mathematik (Analysis) ihre Verwendung. Behandelt werden sie, wie die reellen Quadratwurzeln.

**Lehrsatz 1.** Die imaginäre Quadratwurzel ist gleich einem Producte aus dem reellen Factor und der imaginären Einheit:

$$\sqrt{-p} = \sqrt{p} . \sqrt{-1} = \sqrt{p . -1}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$-p = p . -1$$

$$\sqrt{-p} = \sqrt{p . -1} = \sqrt{p}\sqrt{-1} = i\sqrt{p}.$$

**Lehrsatz 2.** Das Quadrat der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist negativ:

$$(\sqrt{-p})^2 = (\sqrt{-p})(\sqrt{-p}) = -p. \quad \text{cf. §. 79, 5.}$$

**Lehrsatz 3.** Das Product aus zwei imaginären Ausdrücken ist negativ reell:

$$(\sqrt{-p})(\sqrt{-q}) = -\sqrt{pq}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$\sqrt{-p} = \sqrt{p} . \sqrt{-1}, \quad \text{cf. Satz 1.}$$

und

$$\sqrt{-q} = \sqrt{q} . \sqrt{-1}.$$

$$(\sqrt{p} . \sqrt{-1})(\sqrt{q} . \sqrt{-1}) = \sqrt{p} . \sqrt{q} . \sqrt{-1} . \sqrt{-1}.$$

$$= -\sqrt{pq}.$$

**Zusatz.** Das Product aus mehreren imaginären Factoren ist reell bei $2n$ Factoren und imaginär bei $(2n+1)$ Factoren.

**Lehrsatz 4.** Ein Quotient aus zwei imaginären Ausdrücken ist positiv reell:

$$\frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{-q}} = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Beweis.

Es ist:

$$\sqrt{-p} : \sqrt{-q} = (\sqrt{p} . \sqrt{-1}) : \sqrt{q} . \sqrt{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{p} . \sqrt{-1}}{\sqrt{q} . \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}.$$

**Lehrsatz 5.** Ein Quotient mit imaginären Dividenden ist positiv imaginär:

$$\frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{q}} = \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right) . \sqrt{-1} = i\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Beweis.

Es ist:

$$\frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{q}} = \frac{\sqrt{p} . \sqrt{-1}}{\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{p}{q}} . \sqrt{-1} = i\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

**Lehrsatz 6.** Ein Quotient mit imaginärem Divisor ist negativ imaginär:

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{-q}} = \left(-\sqrt{\frac{p}{q}}\right) . \sqrt{-1} = -i\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Beweis.

Es ist:

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{-q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q} . \sqrt{-1}} = (\sqrt{p} . \sqrt{-1}) : \sqrt{q} . -1 = -\sqrt{\frac{p}{q}}\sqrt{-1} = -i\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

**Lehrsatz 7.** Von der imaginären Einheit (i) sind die Potenzen periodisch:

$$\sqrt{-1} = i; \quad i^0 = 1.$$

$$i^1 = \sqrt{-1}.$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1.$$

$$i^3 = (\sqrt{-1})^2 . (\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1} = -i.$$

$$i^4 = (\sqrt{-1})^2 . (\sqrt{-1})^2 = -1 . -1 = 1, \text{ wie } i^0 \text{ am Anfang.}$$

$$i^5 = (\sqrt{-1})^4 . \sqrt{-1} = 1 . \sqrt{-1} = \sqrt{-1}, \text{ wie } i^1 \ldots$$

Anmerkung. Aus dem Vorangehenden ist zu entnehmen, dass eine imaginäre Grösse bei der Lösung einer Aufgabe im Verlaufe der nothwendigen Operationen eine reelle Grösse werden kann. Ist das nicht der Fall, so stellt die Aufgabe eine imaginäre Forderung, der in keiner Weise zu entsprechen ist. Nur hat man bei Behandlung der imaginären Grössen ganz besonders auf die Zeichen zu achten, um jeder Irrung vorzubeugen.

## §. 92.

**Erklärung.** Verbindungen von reellen und imaginären Zahlengrössen zu Summen oder Differenzen heissen complexe Grössen:

$$p + q\sqrt{-1}; \quad m - n\sqrt{-1}.$$

Complexe Grössen heissen conjugirt complex, wenn ein und derselbe Ausdruck als Summa und Differenz zugleich auftritt:

$$p + q\sqrt{-1} \text{ und } p - q\sqrt{-1}.$$

**Lehrsatz 1.** Producte aus zwei conjugirt complexen Grössen sind gleich der Summa der Quadrate ihrer reellen Glieder:

$$(p + q\sqrt{-1})\,(p - q\sqrt{-1}) = p^2 + q^2;$$

Denn es ist:

$$(p + q\,i)\,(p - q\,i) = p^2 - q^2 \,.\, -1 = p^2 + q^2.$$

**Lehrsatz 2.** Jeder complexe Divisor eines Quotienten kann durch Multiplication in eine conjugirt complexe Grösse verwandelt und dadurch reell werden. (cf. vorig. Satz.)

$$\text{I.} \quad \frac{m}{p + \sqrt{-q}} = \frac{m(p - \sqrt{-q})}{(p + \sqrt{-q})\,(p - \sqrt{-q})} = \frac{m(p - \sqrt{-q})}{p^2 + q}. \quad \text{cf. §. 89, 2.}$$

$$\text{II.} \quad \frac{\sqrt{p} + \sqrt{-q}}{\sqrt{p} - \sqrt{-q}} = \frac{(\sqrt{p} + \sqrt{-p})\,(\sqrt{p} + \sqrt{-q})}{(\sqrt{p} - \sqrt{-q})\,(\sqrt{p} + \sqrt{-p})} = \frac{p + 2\sqrt{-pq} - p}{p + p}.$$

**Zusatz.** Quotienten, die eine Summa oder Differenz aus zwei imaginären Grössen zum Divisor haben, erhalten auf dieselbe Weise reelle Divisoren:

$$\text{I.} \quad \frac{m}{\sqrt{-p} + \sqrt{-q}} = \frac{m(\sqrt{-p} - \sqrt{-q})}{(\sqrt{-p} + \sqrt{-q})(\sqrt{-p} - \sqrt{-q})} = \frac{m(\sqrt{-p} - \sqrt{-q})}{-p + q}.$$

$$\text{II.} \quad \frac{\sqrt{-p} + \sqrt{-q}}{\sqrt{-p} - \sqrt{-q}} = \frac{(\sqrt{-p} + \sqrt{-q})\,(\sqrt{-p} - \sqrt{-q})}{(\sqrt{-p} - \sqrt{-q})\,(\sqrt{-p} + \sqrt{-q})} = \frac{-p - 2\sqrt{pq} - q}{-p + q}$$

$$= \frac{p + 2\sqrt{pq} + q}{p - q}. \quad \text{cf. §. 42, Erkl. 5.}$$

### Beispiele zur Einübung der vorstehenden Lehrsätze.

I.

1. $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \,.\, -1} = 2\sqrt{-1} = 2\,i.$
2. $\sqrt{-c^2} = \sqrt{c^2 \,.\, -1} = c\sqrt{-1} = c\,i.$

3. $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \,.\, -1} = 3\sqrt{-1} = 3\,i.$

4. $\sqrt[4]{-ab} = \sqrt[4]{ab \,.\, -1} = \sqrt[4]{ab} \,.\, \sqrt[4]{-1} = i\sqrt[4]{ab}.$

5. $\sqrt[4]{-16\,c^4} = \sqrt[4]{16\,c^4 \,.\, -1} = 2\,c\sqrt[4]{-1}.$

6. $\sqrt{-81\,a^2 b^2 c^4} = \sqrt{81\,a^2 b^2 c^4 \,.\, -1} = 9\,a\,b\,c^2\sqrt{-1}.$

II.

7. $(\sqrt{-1})^2 = -1.$

8. $(\sqrt{-1})^4 = 1.$

9. $(\sqrt{-a})^7 = -\sqrt{-a}.$

10. $(\sqrt{-ab})^2 = -ab.$

11. $(2 + \sqrt{-3})^2 = 1 + 4\sqrt{-3}.$

12. $(-1 + \sqrt{-3})^2 = -2\sqrt{-3} - 2.$

III.

13. $(\sqrt{-ac})(\sqrt{-b}) = -\sqrt{abc}.$

14. $(1 + \sqrt{-x})(1 - \sqrt{-x}) = 1 + \sqrt{-x} - \sqrt{-x} - \sqrt{-x^2} = 1 + x.$

15. $\sqrt{-d} \,.\, \sqrt{-m} \,.\, \sqrt{-n} = -\sqrt{dmn} \,.\, \sqrt{-1}.$

16. $(4 - \sqrt{-3})(4 + \sqrt{-3}) = 16 + 3 = 19.$

IV.

17. $\dfrac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{-a}} = \sqrt{\dfrac{-ab}{-a}} = \sqrt{b}.$

18. $\dfrac{\sqrt{-mn}}{\sqrt{n}} = \sqrt{-\dfrac{mn}{n}} = \sqrt{-m} = \sqrt{m \,.\, -1} = \sqrt{m} \,.\, \sqrt{-1} = i\sqrt{m}.$

19. $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{-y}} = \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y} \,.\, \sqrt{-1}} = \dfrac{\sqrt{xy} \,.\, \sqrt{-1}}{\sqrt{y} \,.\, \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-1}} = \dfrac{\sqrt{xy}\sqrt{-1}}{\sqrt{y} \,.\, -1} = -\sqrt{x}\sqrt{-1}.$

20. $i^{4n+1} = \sqrt{-1}.$

21. $i^{4n+4} = 1.$

22. $\sqrt{\sqrt{-1}} = \sqrt[4]{-1}.$

23. $\sqrt[m]{p\sqrt{-q}} = \sqrt[m]{p}\,\sqrt[2m]{-q}.$

24. $(1 - \sqrt{-3})^3 = 1 - 3\sqrt{-3} + 9 + 3\sqrt{-3} = 8.$

25. $\dfrac{3 + \sqrt{-5}}{-3 + \sqrt{-5}} = \dfrac{(3 + \sqrt{-5})(-3 - \sqrt{-5})}{(-3 + \sqrt{-5})(-3 - \sqrt{-5})} = \dfrac{-9 - 6\sqrt{-5} + 5}{9 + 5} =$

$$\frac{-4 - 6\sqrt{-5}}{14} = \frac{-2 - 3\sqrt{-5}}{7} = (2 + 3\sqrt{-5}) : -7.$$

## c. Potenzen mit allgemeinen Exponenten.

### §. 93.

**Erklärung.** Alle über Potenzen und Wurzeln bisher aufgestellten Sätze haben unter der Bedingung, dass die Exponenten positive ganze Zahlen sind, allgemeine Geltung.

Bei zwei Sätzen jedoch ist diese allgemeine Giltigkeit noch an eine weitere Bedingung geknüpft.

I.

Bei dem Satze §. 70:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

war die Bedingung, dass $m > n$ vorausgesetzt. Nun kann aber $m = n$, d. h. $= 0$ sein. (§. 20.)

Es kann aber auch $m < n$ sein. In diesem Falle ist der Quotient eine Potenz mit negativen Exponenten: (§. 70, 2)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{-d}.$$

Lässt man unentschieden, ob $m > n$, oder $m = n$ oder $m < n$ und stellt ganz allgemein hin:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

so heisst der Ausdruck: $a^{m-n}$ Differenzpotenz.

### §. 94.

**Lehrsatz.** Jede Potenz mit dem Exponenten Null ist gleich 1:

$$a^0 = 1.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$a^0 = a^{m-m} \quad \text{cf. §. 20;}$$

$$= \frac{a^m}{a^m} = 1. \quad \text{cf. §. 70.}$$



Bayerische Staatsbibliothek München

## §. 95.

**Lehrsatz.** Jede Potenz mit negativen Exponenten ist gleich dem reciproken Werthe derselben Potenz mit positiven Exponenten.

$$\text{I. } a^{-d} = \frac{1}{a^d}.$$

$$\text{II. } \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$\text{I. } a^{-d} = a^{0-d} = \frac{a^0}{a^d} \quad \text{cf. §. 22 u. 70.}$$

$$= \frac{1}{a^d}. \quad \text{cf. vorigen Satz.}$$

$$\text{II. } \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{(a:b)^m} \quad \text{cf. Bew. I.}$$

$$= \frac{1}{a^m : b^m} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m. \quad \text{cf. §. 72 und 53.}$$

**Zusatz 1.** Der reciproke Werth einer Potenz mit negativen Exponenten ist gleich derselben Potenz mit positiven Exponenten:

$$\frac{1}{a^{-d}} = 1 \,.\, a^d = a^d.$$

**Zusatz 2.** In einem Quotienten kann man beliebige Factoren vom Divisor in Dividenden und vom Dividenden in Divisor versetzen, wenn man die Vorzeichen ihrer Exponenten entgegengesetzt nimmt:

$$\frac{3\,a^{-3}\,b^{-m}}{4\,c^{-2}\,d^{-n}} = \frac{3\,c^2\,d^n}{4\,a^3\,b^m}.$$

**Zusatz 3.** Potenzen mit negativen Exponenten werden wie Potenzen mit positiven Exponenten behandelt:

$$1.\; a^{-d} \,.\, a^{-e} = \frac{1}{a^d} \,.\, \frac{1}{a^e} = \frac{1}{a^{d+e}} = a^{-d-e}. \quad \text{cf. §. 69 und 95, 1–2.}$$

$$2.\; a^{-d} : a^e = \frac{1}{a^d} : a^e = \frac{1}{a^d \,.\, a^e} = \frac{1}{a^{d+e}} = a^{-d-e}. \quad \text{cf. §. 52.}$$

$$3.\; a^d : a^{-e} = a^d : \frac{1}{a^e} = a^d \,.\, a^e = a^{d+e}. \quad \text{cf. §. 53.}$$

u. s. w.

## §. 96.

**Lehrsatz.** Differenzpotenzen werden wie die Potenzen mit positiven ganzen Exponenten behandelt:

1. $a^{m-n} \cdot a^{x-y} = a^{(m-n)+(x-y)} = a^{(m+x)-(n+y)}$. cf. §. 69 und 16.

2. $a^{m-n} : a^{x-y} = \frac{a^m}{a^n} : \frac{a^x}{a^y} = \frac{a^m}{a^n} \cdot \frac{a^y}{a^x}$ cf. §. 55.

$$= \frac{a^{m+y}}{a^{n+x}} = a^{(m+y)-(n+x)}. \quad \text{cf. §. 70.}$$

3. $a^{m-n} \cdot b^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \cdot \frac{b^m}{b^n} = \frac{a^m \cdot b^m}{a^n \cdot b^n} = \frac{(a\,b)^m}{(a\,b)^n} = (a\,b)^{m-n}$. cf. §. 71.

4. $\frac{a^{m-n}}{b^{m-n}} = a^{m-n} : b^{m-n} = (a:b)^{m-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$. cf. §. 72.

5. $(a^{m-n})^{x-y} = a^{(m-n)(x-y)}$ cf. §. 73.

$$= a^{(m\,x+n\,y)-(m\,y+n\,x)}. \quad \text{cf. §. 39, 3.}$$

---

## II.

Bei dem Satze §. 83:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

war als Bedingung vorausgesetzt, dass n ein Vielfaches von m ist. Ist das nun aber nicht der Fall, so ist:

$$\frac{n}{m}$$

ein Bruch (§. 57). Lässt man behufs Operationen mit allgemeinen Zeichen unberücksichtigt, ob m in n aufgeht und setzt allgemein

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}},$$

so heisst der Ausdruck $a^{\frac{n}{m}}$ eine gebrochene Potenz zur Unterscheidung von einer ganzen Potenz.

## §. 97.

**Lehrsatz.** Gebrochene Potenzen werden wie die ganzen behandelt:

$$1.\quad a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{ny+mx}{my}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{x}{y}}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \text{ und } a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}.$$

Demnach:

$$a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[y]{a^x} = \sqrt[my]{a^{ny}} \cdot \sqrt[my]{a^{mx}} \quad \text{cf. §. 85.}$$

$$= \sqrt[my]{a^{ny+mx}} = a^{\frac{ny+mx}{my}} \quad \text{cf. §. 81.}$$

$$= a^{\frac{ny}{my}+\frac{mx}{my}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{x}{y}}.$$

$$2.\quad a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{ny-mx}{my}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{x}{y}}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \text{ und } a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}.$$

Demnach:

$$a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[m]{a^n} : \sqrt[y]{a^x} = \sqrt[my]{a^{ny}} : \sqrt[my]{a^{mx}}$$

$$= \sqrt[my]{a^{ny-mx}} \quad \text{cf. §. 82 und 70.}$$

$$= a^{\frac{ny-mx}{my}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{x}{y}}.$$

$$3.\quad a^{\frac{x}{y}} \cdot b^{\frac{x}{y}} = (a\,b)^{\frac{x}{y}}.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} \text{ und } b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x}.$$

Demnach:

$$a^{\frac{x}{y}} \cdot b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} \cdot \sqrt[y]{b^x}$$

$$= \sqrt[y]{a^x b^x} = \sqrt[y]{(a\,b)^x}$$

$$= (a\,b)^{\frac{x}{y}}.$$

$$4. \quad a^{\frac{x}{y}} : b^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{y}}.$$

Beweis.

Es ist:

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} \text{ und } b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x}.$$

Demnach:

$$a^{\frac{x}{y}} : b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} : \sqrt[y]{b^x} = \sqrt[y]{a^x : b^x}$$

$$= \sqrt[y]{(a:b)^x} = \sqrt[y]{\left(\frac{a}{b}\right)^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{y}}.$$

$$5. \quad \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{nx}{my}}.$$

Beweis.

Es ist:

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{x}{y}} = \left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^x} = \sqrt[y]{\sqrt[m]{a^{nx}}}$$

$$= \sqrt[my]{a^{nx}} = a^{\frac{nx}{my}}. \quad \text{cf. §. 84.}$$

## §. 98.

**Lehrsatz.** Jede negative gebrochene Potenz ist gleich dem reciproken Werthe einer Wurzel, die zum Wurzelexponenten den Nenner des Bruches hat und zum Radicanden den Dignanden derselben Potenz mit dem Zähler des Bruches als positiven Exponenten:

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}.$$

Beweis.

Es ist:

$$a^{-\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} \quad \text{cf. §. 95.}$$

$$= \frac{\sqrt[m]{1}}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}. \quad \text{cf. §. 82.}$$

## §. 99.

**Lehrsatz.** Grösseres mit gleichen negativen Exponenten potenzirt, gibt Kleineres:

Es sei $a > b$, so ist:

$$a^{-m} < b^{-m}. \quad [\text{condit. } (-m)].$$

**Beweis.**

Es ist:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ und } b^{-m} = \frac{1}{b^m}.$$

Da $a > b$, so ist:

$$a^m > b^m. \quad \text{cf. §. 76, 1.}$$

Daher

$$\frac{1}{a^m} < \frac{1}{b^m}. \quad \text{cf. §. 76, 2.}$$

d. h.

$$a^{-m} < b^{-m}.$$

Anmerkung. Wurzeln mit gebrochenen Exponenten lassen sich leicht in gebrochene Potenzen umwandeln. Desshalb werden sie hier nicht besonders behandelt.

## §. 100.

**Beispiele zur Einübung der vorstehenden Lehrsätze.**

I.

1. $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01.$
2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16.$
3. $\left(\frac{3a}{4b}\right)^{-3} = \left(\frac{4b}{3a}\right)^3 = \frac{64\,b^3}{27\,a^3}.$
4. $\frac{1}{a^{-3m}} = a^{3m}.$
5. $a^{-5} \cdot a^6 = a.$
6. $a^{-3} \cdot a^{-5} = a^{-8}.$
7. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}.$
8. $5a^3b^4c^{-3} \cdot 4a^{-2}b^{-3}c^4 = 20abc.$
9. $\frac{b^{-5}}{b^2} = b^{-7} = \frac{1}{b^7}.$
10. $\frac{b^{-3}}{b^{-5}} = b^{-3+5} = b^2.$
11. $\frac{c^{2m}}{c^2} = c^{2m-2}.$
12. $\frac{8^{-2}}{4^{-3}} = \frac{4^3}{8^2} = \frac{64}{64} = 1.$
13. $(c^{-4})^4 = c^{-16} = \frac{1}{c^{16}}.$
14. $(c^{-3})^{-2} = c^6.$
15. $(-4^{-3})^2 = -4^{-6} = +\frac{1}{4^6}.$
16. $(-3^{-2})^{-3} = -3^6.$
17. $(-2c^{-3})^3 = -2c^{-9}.$

18. $(-2ac^{-3})^5 = -2^5 a^5 c^{-15} = -\frac{32a^5}{c^{15}}$.

19. $\frac{2a^{-2m}b^{-3n}c^{-3}}{3d^{-y}k^{-4}} = \frac{2d^y k^4}{3a^{2m}b^{3n}c^3}$.

20. $c^{2x-4} \cdot c^{x+3} = c^{3x-1}$.

21. $c^{m-2n} \cdot c^{-n} = c^{m-3n}$.

22. $\frac{c^{3x-4}}{c^4} = c^{3x-8}$.

23. $\frac{c^{3n-5}}{c^{5n-3}} = \frac{c^{-2}}{c^{2n}} = \frac{1}{c^{2n+2}}$.

24. $a^{x-3} \cdot b^{x-3} = (ab)^{x-3}$.

25. $(a^{q-2})^{q+2} = a^{q^2-4}$.

II.

26. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$.

27. $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{17}{12}}$.

28. $a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$.

29. $d^{-\frac{1}{3}} \cdot d^{-\frac{2}{5}} = d^{-\frac{11}{15}}$.

30. $d^{\frac{1}{4}} \cdot d^{-\frac{3}{5}} = d^{-\frac{7}{20}}$.

31. $b : b^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{1}{3}}$.

32. $b^{\frac{2}{3}} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{2}}$.

33. $b^{\frac{3}{7}} : b^{\frac{2}{3}} = b^{-\frac{5}{21}}$.

34. $\frac{d^{-\frac{3}{4}}}{d^{\frac{1}{8}}} = d^{-\frac{7}{8}}$.

35. $\frac{d^{\frac{4}{5}}}{d^{-\frac{3}{4}}} = d^{\frac{13}{20}}$.

36. $(c^3)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{3}{2}} = \sqrt{c^3}$.

37. $\left(c^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{7}} = c^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{c}$.

38. $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$.

39. $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \sqrt{\sqrt{\frac{16}{81}}} = \frac{2}{3}$.

40. $\left(d^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{4}} = d^{\frac{1}{6}}$.

41. $\sqrt[3]{p^{-\frac{3}{2}}} = p^{-\frac{3}{6}} = p^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{p}}$.

42. $\sqrt[7]{p^{-\frac{14}{3}}} = p^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{p^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{p^2}} = 1 : \sqrt[3]{p^2}$.

43. $\sqrt[-\frac{14}{3}]{p} = \sqrt[14]{p^{-3}} = \sqrt[14]{\frac{1}{p^3}} = 1 : \sqrt[14]{p^3}$.

## d. Quadrat- und Kubikwurzeln.

§. 101.

**Erklärung 1.** Sollen mehrgliedrige algebraische Summen radicirt werden, so hat man den umgekehrten Weg zu verfolgen, auf dem man durch Potenziren zu algebraischen Summen gelangte (§. 77, Erkl. 2); denn Radiciren ist das entgegengesetzte Verfahren vom Potenziren.

**Erklärung 2.** Da es sich hier nur um das Radiciren von Quadrat- und Kubikgrössen handelt, so hat man sich besonders mit den Quadrat- und Kubikzahlen aus 1—10 vertraut zu machen.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | = | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $a^2$ | = | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| $a^3$ | = | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1000 |

**Erklärung 3.** Beim Radiciren werden mehrzifferige Zahlen wie algebraische Summen behandelt, weil sich jede mehrzifferige Zahl nach ihrer dekadischen Ordnung in mehrere Theile zerlegen und so in eine mehrgliedrige Grösse verwandeln lässt:

$$11 = 10 + 1 = 16 - 5,$$
$$22 = 20 + 2 = 25 - 3,$$
$$99 = 90 + 9 = 100 - 1,$$
$$111 = (100 + 10) + 1 = \text{u. s. w.},$$
$$222 = (200 + 20) + 2 = \text{u. s. w.},$$
$$999 = (900 + 90) + 9 = \text{u. s. w.}$$

Man quadrirt und kubirt nun die vorstehenden Zahlen und zwar nach ihren einzelnen Gliedern (§. 77), um genau darzustellen, aus welchen Theilen die entwickelte Quadrat- oder Kubikzahl einer mehrzifferigen Grösse zusammengesetzt ist:

Entwickelte | Formelle Wurzelzahlen:

1. $(10 + 1)^2 = 10^2 + 2.10.1 + 1^2$
$= 100 + 20 + 1 = 121 = (11)^2.$

2. $(20 + 2)^2 = 20^2 + 2.20.2 + 2^2$
$= 400 + 80 + 4 = 484 = (22)^2.$

Entwickelte | Formelle Wurzelzahlen:

3. $(90+9)^2 = 90^2+2.90.9+9^2$
$= 8100+1620+81 = 9801 = (99)^2.$

4. $[(100+10)+1]^2 = (100+10)^2+2(100+10)1+1^2$
$= 10000+2000+100+200$
$+20+1 = 12321 = (111)^2.$

5. $[(200+20)+2]^2 = (200+20)^2+2(200+20)2+2^2$
$= 40000+8000+400+800$
$+80+4 = 49284 = (222)^2.$

6. $[(900+90)+9]^2 = (900+90)^2+2(900+90)9+9^2$
$= 810000+162000+8100$
$+16200+1620+81 = 998001 = (999)^2.$

---

1. $(10+1)^3 = 10^3+3.10^2.1+3.10.1^2+1^3$
$= 1000+300+30+1 = 1331 = (11)^3.$

2. $(20+2)^3 = 20^3+3.20^2.2+3.20.2^2+2^3$
$= 8000+2400+240+8 = 10648 = (22)^3.$

3. $(90+9)^3 = 90^3+3.90^2.9+3.90.9^2+9^3$
$= 729000+218700+21870+729 = 970299 = (99)^3.$

4. $[(100+10)+1]^3 = (100+10)^3+3(100+10)^2.1$
$+3(100+10).1^2+1^3$
$= 1000000+300000+30000$
$+1000+30000+6000+300$
$+300+30+1 = 1367631 = (111)^3.$

5. $[(200+20)+2]^3 = (200+20)^3+3(200+20)^2.2$
$+3(200+20)2^2+2^3 = 10941048 = (222)^3.$

6. $[(900+90)+9]^3 = (900+90)^3+3(900+90)^2.9$
$+3(900+90)9^2+9^3 = 997002999 = (999)^3.$

**Erklärung 4.** Aus den 2.6 Beispielen ist zu entnehmen, dass jede Quadrat- und Kubikzahl genau den einzelnen Gliedern der ihr unmittelbar vorangehenden Summa entspricht. Sollen nun diese Quadrat- und Kubikzahlen radicirt werden, so hat man die ihnen vorangehenden Glieder zu bilden und nach und nach von links nach rechts vorwärts schreitend, abzuziehen.

Jeder Rest, der sich bei diesem Verfahren ergibt, enthält die dekadischen Einheiten höherer Ordnung, welche sich beim Summiren der einzelnen Glieder aus der nächst niederen Ordnung ergaben.

**Erklärung 5.** Aus der Vergleichung der formellen und entwickelten Wurzelzahlen ersieht man:

eine zweizifferige Wurzel gibt eine drei- oder vierzifferige Quadratzahl, dagegen eine vier-, oder fünf-, oder sechszifferige Kubikzahl;

eine dreizifferige Wurzel gibt eine fünf- oder sechszifferige Quadratzahl, dagegen eine sieben-, oder acht-, oder neunzifferige Kubikzahl.

Aus dieser Wahrnehmung ergeben sich nachfolgende Sätze:

**Zusatz 1.** Das Quadrat einer nzifferigen Zahl hat entweder 2n oder 2n — 1 Zifferstellen.

Anmerkung. Auf diesen Satz gründet sich die Eintheilung der Quadratzahlen von rechts nach links in Klassen von je zwei Ziffern. Ist die Quadratzahl eine ungerade, so bleibt links in der dem Werthe nach höchsten Klasse nur eine Ziffer stehen. Die Anzahl der Klassen gibt die Anzahl der Ziffern in der Wurzel.

**Zusatz 2.** Der Kubus einer nzifferigen Zahl hat entweder 3n oder 3n — 1 oder 3n — 2 Zifferstellen.

Anmerkung. Auf diesen Satz gründet sich die Eintheilung der Kubikzahl von rechts nach links in Klassen von je drei Ziffern. Die höchste Klasse kann auch nur zwei, oder gar nur eine Ziffer haben. Soviel Klassen, soviel Ziffern in der Wurzel.

**Zusatz 3.** Die Quadratzahl hat am Ende zweimal so viel Nullen und die Kubikzahl dreimal so viel Nullen als ihre Wurzel:

$$(200)^2 = 40000; \quad \sqrt{40000} = 200.$$

$$(900)^3 = 729000000; \quad \sqrt[3]{729000000} = 900.$$

---

# I. Quadratwurzeln.

## §. 102.

**Erklärung 1.** Soll eine algebraische Summa, die das Quadrat einer zweigliedrigen Wurzel ist, radicirt werden, so müssen sich:

1) das Quadrat des ersten Gliedes,
2) das doppelte Product des ersten und zweiten Gliedes, und
3) das Quadrat des zweiten Gliedes der Wurzel vom Radicanden abziehen lassen und als Rest Null bleiben.

**Zusatz.** Ebenso verfährt man mit einer algebraischen Summa, die das Quadrat eines Polynomium ist, weil sich jedes Polynomium als Binomium betrachten und so quadriren lässt.

**Erklärung 2.** Die allgemeine Formel für das Radiciren eines Quadrates ist desshalb:

$$\text{I. } \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b,$$

oder

$$\text{II. } \sqrt{a^2 + sb} = a + b;$$

denn es ist:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b)b.$$

Setzen wir für $2a + b$ kürzer $s$, so ist:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + sb.$$

## §. 103.

$$\sqrt{(25a^6b^4 - 70a^5b^6 + 129a^4b^8 - 112a^3b^{10} + 64a^2b^{12})} = \underbrace{\overset{a}{\overbrace{5a^3b^2}} - \overset{b}{\overbrace{7a^2b^4}}}_{a} + \underbrace{8ab^6}_{b}.$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = & 25a^6b^4 \\
& - \\
\hline
& -70a^5b^6 : 2 \cdot 5a^3b^2 = 2a \\
2ab = & -70a^5b^6 \\
& + \\
\hline
& 129a^4b^8 \\
b^2 = & 49a^4b^8 \\
& - \\
\hline
& 80a^4b^8 - 112a^3b^{10} : 2(5a^3b^2 - 7a^2b^4) = 2a. \\
2ab = & 80a^4b^8 - 112a^3b^{10} \\
& - \qquad + \\
\hline
& 64a^2b^{12} \\
b^2 = & 64a^2b^{12} \\
& - \\
\hline
& 0
\end{array}$$

D. h.:

1) Das erste Glied des Radicanden ($25a^6b^4$) radicirt, gibt das erste Glied der Wurzel ($5a^3b^2$), welches seinen Platz rechts nach dem

Gleichheitszeichen findet (allg. a). Das Quadrat des ersten Gliedes (allg. $a^2$) ist vom Radicanden zu subtrahiren. Es bleibt noch das doppelte Product des ersten und zweiten Gliedes der Wurzel....

2) Durch Division des zweifachen ersten Gliedes der Wurzel ($10a^3b^2$) in das zweite Glied des Radicanden ($-70a^5b^6$) gewinnt man als Quotienten das zweite Glied der Wurzel ($-7a^2b^4$) und (allg. b). Mit diesem zweiten Gliede multiplicirt man den Divisor, so hat man das zweifache Product aus dem ersten und zweiten Gliede (allg. $2ab$); multiplicirt man noch das zweite Glied der Wurzel mit sich selbst, so hat man das Quadrat dieses Gliedes (allg. $b^2$). Zieht man beide Producte vom Radicanden ab und bleibt als Rest Null, so ist das Quadrat einer zweigliedrigen Wurzel vollständig radicirt.

Ist das nicht der Fall, so ist die Wurzel mehrgliedrig.

3) In diesem Falle betrachtet man die zwei schon gefundenen Glieder als den ersten Theil der Wurzel; weil aber das Quadrat dieses Theils schon abgezogen ist, so hat man den Rest durch das Zweifache der schon gefundenen Wurzel ($10a^3b^2 - 14a^2b^4$) zu dividiren; der Quotient gibt das dritte Glied der Wurzel ($+8ab^6$). Mit diesem Gliede multiplicirt man wiederum den Divisor und subtrahirt dieses Product mit sammt dem Quadrate des nämlichen Gliedes vom Radicanden ab, so hat man das Quadrat einer dreigliedrigen Wurzel vollständig radicirt.

Bleibt noch ein Rest, so betrachtet man die bisher gefundene Wurzel als das erste Glied und sucht auf die in Nr. 3 angegebene Weise ein neues Glied. Auf diese Weise fährt man fort bis der Radicand völlig radicirt ist.

4) Ist der Radicand eine irrationale Grösse (§. 89), so gibt er zur Wurzel eine unendliche Reihe von Gliedern.

Anmerkung. Bei den alg. Grössen ist's einerlei, ob man nach Formel I oder II radicirt.

$$\text{I.}\quad \sqrt{(121x^2 - 154xy + 49y^2)} = 11x - 7y$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = & 121x^2 \\
 & - \\
\hline
 & -154xy : 2 . 11x = 2a \\
2ab = & -154xy \\
 & + \\
\hline
 & 49y^2 \\
b^2 = & 49y^2 \\
 & - \\
\hline
 & 0.
\end{array}$$

Oder nach der Formel $\sqrt{a^2 + s\,b}$:

$$\sqrt{(121\,x^2 - 154\,x\,y + 49\,y^2)} = 11\,x - 7\,y$$

$$a^2 = 121\,x^2$$

$$-$$

$$-\,154\,x\,y + 49\,y^2 : 2\,.\,11\,x = 2\,a$$

$$sb = -\,154\,x\,y + 49\,y^2 \qquad (22\,x - 7\,y)\,.\,-7\,y$$

$$+ \qquad -$$

$$0.$$

II. $$\sqrt{\left(\frac{x^2}{4\,m^2} - \frac{6\,x\,y}{18\,m\,n} + \frac{9\,y^2}{81\,n^2}\right)} = \frac{x}{2\,m} - \frac{3\,y}{9\,n}$$

$$a^2 = \frac{x^2}{4\,m^2}$$

$$-$$

$$-\frac{6\,x\,y}{18\,m\,n} : \frac{x}{m} = 2\,a$$

$$2\,a\,b = -\frac{6\,x\,y}{18\,m\,n}$$

$$+$$

$$\frac{9\,y^2}{81\,n^2}$$

$$b^2 = -\frac{\frac{9\,y^2}{81\,n^2}}{0}\,.$$

III. $$\sqrt{\left(\frac{4\,x^6}{m^2\,n^6} - \frac{28\,x^5}{m^3\,n^4} + \frac{49\,x^4}{m^4\,n^2} + \frac{12\,x^3}{m^4\,n} - \frac{42\,x^2\,n}{m^5} + \frac{9\,n^4}{m^6}\right)} = \frac{2\,x^3}{m\,n^3} - \frac{7\,x^2}{m^2\,n} + \frac{3\,n^2}{m^3}$$

$$a^2 = \frac{4\,x^6}{m^2\,n^6}$$

$$-$$

$$-\frac{28\,x^5}{m^3\,n^4} : \frac{4\,x^3}{m\,n^3} = 2\,a$$

$$2\,a\,b = -\frac{28\,x^5}{m^3\,n^4}$$

$$+$$

$$\frac{49\,x^4}{m^4\,n^2}$$

$$b^2 = \frac{49\,x^4}{m^4\,n^2}$$

$$-$$

$$\frac{12\,x^3}{m^4\,n} - \frac{42\,x^2\,n}{m^5} \qquad : \left(\frac{4\,x^3}{m\,n^3} - \frac{14\,x^2}{m^2\,n}\right) = 2\,a$$

$$2\,a\,b = \frac{12\,x^3}{m^4\,n} - \frac{42\,x^2\,n}{m^5}$$

$$- \qquad +$$

$$\frac{9\,n^4}{m^6}$$

$$b^2 = \frac{9\,n^4}{m^6}$$

$$-$$

$$0.$$

IV. $\sqrt{(25m^{14}n^2+70m^{13}n^4+159m^{12}n^6+244m^{11}n^8+307m^{10}n^{10}+282m^9n^{12}+213m^8n^{14}+108m^7n^{16}+36m^6n^{18})} =$

$$\underbrace{\overbrace{5m^7n}^{a}+\overbrace{7m^6n^3}^{b}}_{a}+\underbrace{11m^5n^5}_{b}+\underbrace{9m^4n^7}_{b}+\underbrace{6m^3n^9}_{b}.$$

(with successive braces a, a, a grouping the preceding terms)

$$a^2 = 25m^{14}n^2$$
$$-$$

$$70m^{13}n^4 : 10m^7n = 2a$$
$$2ab = 70m^{13}n^4$$
$$-$$

$$159m^{12}n^6$$
$$b^2 = 49m^{12}n^6$$
$$-$$

$$110m^{12}n^6+244m^{11}n^8 : (10m^7n+14m^6n^3) = 2a$$
$$2ab = 110m^{12}n^6+154m^{11}n^8$$
$$- \quad -$$

$$90m^{11}n^8+307m^{10}n^{10}$$
$$b^2 = 121m^{10}n^{10}$$
$$-$$

$$90m^{11}n^8+186m^{10}n^{10}+282m^9n^{12} : (10m^7n+14m^6n^3+22m^5n^5) = 2a$$
$$2ab = 90m^{11}n^8+126m^{10}n^{10}+198m^9n^{12}$$
$$- \quad - \quad -$$

$$60m^{10}n^{10}+84m^9n^{12}+213m^8n^{14}$$
$$b^2 = 81m^8n^{14}$$
$$-$$

$$60m^{10}n^{10}+84m^9n^{12}+132m^8n^{14}+108m^7n^{16} : (10m^7n+14m^6n^3+22m^5n^5+18m^4n^7) = 2a.$$
$$2ab = 60m^{10}n^{10}+84m^9n^{12}+132m^8n^{14}+108m^7n^{16}$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$

$$36m^6n^{18}$$
$$b^2 = 36m^6n^{18}$$
$$-$$

$$0.$$

$$\text{V.}\quad \sqrt{(x^2+y^2)} = x + \frac{y^2}{2x} - \frac{y^4}{8x^3} + \frac{y^6}{16x^5} - \ldots \infty.$$

$$\begin{array}{l}
a^2 = \quad x^2 \\
\quad\quad\; - \\
\hline
\quad\quad y^2 : 2x \\
sb = y^2 + \frac{y^4}{4x^2} \\
\quad\quad - \quad - \\
\hline
\quad\quad - \frac{y^4}{4x^2} : 2x + \frac{y^2}{x} \\
sb = -\frac{y^4}{4x^2} - \frac{y^6}{8x^4} - \frac{y^8}{64x^6} \\
\quad\quad + \quad + \quad + \\
\hline
\quad\quad \frac{y^6}{9x^4} + \frac{y^8}{64x^6} : 2x + \frac{y^2}{x} - \frac{y^4}{4x^3} \\
\quad\quad \ldots
\end{array}$$

## §. 104.

**Zusatz.** Mehrzifferige Zahlen werden nach denselben Grundsätzen radicirt, wie algebraische Summen.

Es ist als Radicand die Zahl 49284 gegeben; da diese Zahl drei Klassen gibt (§. 101, Zusatz I), so ist die zu suchende Wurzel dreistellig.

$$\begin{array}{l}
\sqrt{4|92|84} = \overbrace{\underbrace{200}_{a} + \underbrace{20}_{b}}^{a} + \underbrace{2}_{b} = 222 \\
a^2 = 4\,00\,00 \\
\hline
\quad 92\,84 : 2 \,.\, 200 = 2a \\
2ab = 80\,00 \\
\hline
\quad 12\,84 \\
b^2 = \;\; 4\,00 \\
\hline
\quad 8\,84 : 2\,(200+20) = 2a \\
2ab = \begin{cases} 8\,00 \\ \;\;80 \end{cases} \\
\hline
\quad\quad 4 \\
b^2 = 4 \\
\hline
\quad\quad 0.
\end{array}
\quad\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\ \text{cf. §. 101, 5.}$$

**Erklärung 1.** Die den Rang der Ziffern bezeichnenden Nullen lässt man zur Vereinfachung der Operation weg und schreibt nur eine Ziffer der nächsten Klasse zum Reste:

$$\sqrt{8|03|72|25} = \overbrace{\underbrace{\overbrace{\overbrace{2}^{a}\ \overbrace{8}^{b}}^{a}\ 3}_{a}}\ \underbrace{\overbrace{5}^{b}}_{b}$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = & 4 \\
\hline
 & 40 : 2.2 = 2a \\
2ab = & 32 \\
\hline
 & 83 \\
b^2 = & 64 \\
\hline
 & 197 : 2.28 = 2a \\
2ab = & 168 \\
\hline
 & 29\,2 \\
b^2 = & 9 \\
\hline
 & 28\,32 : 2.283 = 2a \\
2ab = & 28\,30 \\
\hline
 & 25 \\
b^2 = & 25 \\
\hline
 & 0.
\end{array}$$

**Erklärung 2.** Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn man mit dem zweifachen Producte der schon gefundenen Wurzel (allgem. $= 2a$) in den Rest des Radicanden, zu dem die ganze nächste Klasse gesetzt ist, dividirt, wobei die letzte Ziffer rechts unberücksichtigt bleibt, um so eine weitere Ziffer der zu suchenden Wurzel zu bestimmen (allgem. $= b$); diese Wurzelziffer zum Divisor setzt und die so entstandene Zahl (allgem. $= 2a + b$) mit der Wurzelziffer (allg. $= b$) multiplicirt und das Product subtrahirt nach der Formel:

$$a^2 + sb. \quad (\S\ 102.)$$

So oft der Divisor im Dividend nicht enthalten ist, erhält man als Ziffer der zu suchenden Wurzel Null. Z. B.:

$$\begin{array}{rll}
 & \sqrt{67|79|87|56} = 8234 & \\
a^2 = & 64 & \\
\hline
 & 379 : 2.8 = 2a & \\
sb = & 324 & 162 = 2a + b \\
\hline
 & 5587 : 2.82 = 2a & \\
sb = & 4929 & 1643 = 2a + b \\
\hline
 & 65856 : 2.823 = 2a & \\
sb = & 65856 & 16464 = 2a + b \\
\hline
 & 0. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
 & \sqrt{2|56|25|60|64} = 16008 & \\
a^2 = & 1 & \\
\hline
 & 156 : 2.1 = 2a & \\
sb = & 156 & 26 = 2a + b \\
\hline
 & 256064 : 2.1600 = 2a & \\
sb = & 256064 & 320008 = 2a + b \\
\hline
 & 0. &
\end{array}$$

**Erklärung 3.** Wo als Rest Null bleibt, ist der Radicand ein vollkommenes Quadrat. Dies findet jedoch selten statt, da bei Weitem die meisten Zahlen unvollkommene Quadrate sind. Wo ein Rest bleibt, ist die Wurzel irrational, d. h. ihr Werth lässt sich nur näherungsweise bestimmen (§. 89). Z. B.:

Ist der Näherungswerth von 27 zu bestimmen, so hat man also zu verfahren: nach §. 46 ist $27 = \frac{27\ b}{b}$, und da für die allgemeine Grösse b jede andere Zahl gesetzt werden kann, etwa $10^{2n}$, so ist:

$$\sqrt{27} = \sqrt{\frac{27 \cdot 10^{2n}}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{27 \cdot 10^{2n}}}{\sqrt{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{27 \cdot 10^{2n}}}{10^n} = \frac{\sqrt{27 \cdot 10000000000}}{100000},$$

denn wir nehmen $n = 5$, also $2n = 10$, also

$$10^{2n} = 10^{10} = 10000000000.$$

Radicirt man nun den Zähler des Bruches und dividirt die gefundene Wurzel durch den Nenner, so hat man den Näherungswerth für die Zahl 27.

$$\sqrt{27|00|00|00|00|00} = 519615$$

$$\begin{array}{lll}
a^2 = & 25 & \\
\hline
 & 200 & : 2 . 5 = 2a \\
sb = & 101 & 101 = 2a + b \\
\hline
 & 9900 & : 2 . 51 = 2a \\
sb = & 9261 & 1029 = 2a + b \\
\hline
 & 63900 & : 2 . 519 = 2a \\
sb = & 62316 & 10386 = 2a + b \\
\hline
 & 158400 & : 2 . 5196 = 2a \\
sb = & 103921 & 103921 = 2a + b \\
\hline
 & 5447900 & : 2 . 51961 = 2a \\
sb = & 5196125 & 1039225 = 2a + b \\
\hline
 & 251775 &
\end{array}$$

$$\sqrt{27} = \frac{519615}{100000} = 5{,}19615\ldots$$

Der Näherungswerth kommt dem wahren Werth um so näher, je grösser man die Ziffer für n nimmt, und da man n so gross nehmen kann als man will, so kann man auch den Näherungswerth möglichst genau bestimmen.

**Zusatz 1.** Irrationale Quadratzahlen werden radicirt, wenn man an Radicanden 2 n Nullen hängt, die so entstandene Zahl radicirt und

bei der gewonnenen Wurzel so viel Decimalstellen abschneidet als man Nullenpaare angehängt hat.

**Zusatz 2.** Decimalbrüche werden wie die unvollkommenen Quadratzahlen radicirt.

Wo es nothwendig, werden durch Beisatz von Nullen doppelt so viel Decimalstellen hergestellt, als die zu bestimmende Wurzel haben soll. Namentlich ist jede ungerade Anzahl von Decimalstellen behufs Eintheilung in Klassen durch Zusatz von Null gerade zu machen.

Anmerkung. Die Eintheilung in Klassen hat vom Komma aus nach rechts und links zu geschehen.

Es sei als Radicand 25,01392 gegeben, so ist:

$$\begin{array}{lll}
 & \sqrt{25{,}01|39|20} = 5{,}00139\ldots & \\
a^2 = & 25 & \\
\hline
 & 1\ 39\ 20 : 2.500 = 2a & \\
sb = & 1\ 00\ 01 \quad 10001 = 2a + b & \\
\hline
 & 39\ 19\ 00 : 2.5001 = 2a & \\
sb = & 30\ 00\ 69 \quad 100023 = 2a + b & \\
\hline
 & 9\ 18\ 31\ 00 : 2.50013 = 2a & \\
sb = & 9\ 00\ 24\ 21 \quad 1000269 & \\
\hline
 & 18\ 06\ 79 &
\end{array}$$

**Zusatz 3.** Gewöhnliche Brüche werden radicirt, wenn man Zähler und Nenner radicirt (§. 82). Gemischte Brüche sind zuvor in unächte umzuwandeln. Z. B.

$$\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7};\ \sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8};\ \sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

**Erklärung 4.** Da aber die wenigsten Brüche vollkommene Quadrate enthalten, so ist es einfacher, einen gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln und diesen zu radiciren. Doch kann man auch den irrationalen Nenner rational machen nach §. 89, 2 und den Zähler radiciren nach §. 104 Zusatz 1. Z. B.

$$\text{I. } \sqrt{\frac{3}{16}} = \sqrt{0{,}1875} = 0{,}43301\ldots$$

$$\text{II. } \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2.3}{3.3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2{,}4494}{3} = 0{,}8164\ldots$$

## §. 105.

**Erklärung.** Das Quadrat einer zweigliedrigen Grösse besteht nicht immer aus drei Gliedern; denn sobald man eine zweigliedrige Grösse,

von der ein Glied irrational oder imaginär ist, ins Quadrat erhebt, bekommt man ein zweigliedriges Quadrat (Binom). Z. B.

$$(5+\sqrt{5})^2 = 25+10\sqrt{5}+5 = 30+10\sqrt{5}$$
$$(2+\sqrt{-3})^2 = 4+4\sqrt{-3}-3 = 1+4\sqrt{-3}.$$

Solche Quadrate lassen sich nicht nach der allgemeinen Formel:

$$a^2+2ab+b^2$$

radiciren. Hiezu bedient man sich häufig der nachstehenden Formeln mit Vortheil.

I. Soll man die Summa oder Differenz zweier derartiger Quadratwurzeln aus der Summa und Differenz zweier Grössen in eine Quadratwurzel verwandeln, so bedient man sich der Formel:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}},$$

denn setzen wir:

$$1.\quad \sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x+y};$$

quadrirt man beide Seiten, so ist:

$$2.\quad 2a \pm 2\sqrt{a^2-b} = x+y;$$

substituiren wir diesen Werth von $x+y$ in Gleichung 1, so ist:

$$3.\quad \sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}}.$$

II. Soll man eine Quadratwurzel aus der Summa oder Differenz zweier Grössen in die Summa oder Differenz zweier Quadratwurzeln verwandeln, so bedient man sich der Formel:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Diese Formel gewinnen wir aus Gleichung 3, indem wir sie in ihre zwei Gleichungen zerlegen:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}$$
$$\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

daraus erhalten wir durch Addition auf beiden Seiten:

$$1.\quad \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{2a+2\sqrt{a^2-b}}{4}} + \sqrt{\frac{2a-2\sqrt{a^2-b}}{4}};$$

ferner durch Subtraction auf beiden Seiten:

$$2.\quad \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{2a+2\sqrt{a^2-b}}{4}}-\sqrt{\frac{2a-2\sqrt{a^2-b}}{4}},$$

d. h.

$$3.\quad \sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

**Beispiele zur Uebung.**

I.

$$1.\quad \sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{14+2\sqrt{49-48}}$$
$$=\sqrt{14+2}$$
$$=4.$$

$$2.\quad \sqrt{2+2\sqrt{-3}}-\sqrt{2-2\sqrt{-3}}=\sqrt{4-2\sqrt{4+12}}$$
$$=\sqrt{4-8}$$
$$=2\sqrt{-1}.$$

II.

$$3.\quad \sqrt{30+10\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{30+\sqrt{900-500}}{2}}+\sqrt{\frac{30-\sqrt{900-500}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{30+20}{2}}+\sqrt{\frac{30-20}{2}}$$
$$=\sqrt{25}+\sqrt{5}=5+\sqrt{5}.$$

$$4.\quad \sqrt{7-6\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49+72}}{2}}-\sqrt{\frac{7-\sqrt{49+72}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{7+11}{2}}-\sqrt{\frac{7-11}{2}}$$
$$=\sqrt{9}-\sqrt{-2}=3-\sqrt{-2}.$$

---

## II. Kubikwurzeln.

### §. 106.

**Erklärung 1.** Soll eine algebraische Summa, die der Kubus einer zweigliedrigen Wurzel ist, radicirt werden, so müssen sich vom Radicanden folgende Theile subtrahiren lassen und zuletzt als Rest Null bleiben:

1) Der Kubus des ersten Gliedes.
2) Das dreifache Product aus dem Quadrate des ersten Gliedes in das zweite.
3) Das dreifache Product aus dem Quadrate des zweiten Gliedes in das erste.
4) Der Kubus des zweiten Gliedes.

**Zusatz.** Ebenso wird eine algebraische Summa radicirt, die der Kubus eines Polynoms ist, weil sich jedes Polynom auf ein Binom reduciren und so kubiren lässt (§. 77 Zus. Nr. II).

**Erklärung 2.** Die allgemeine Formel für das Radiciren einer Kubikwurzel ist desshalb:

$$\text{I.}\ \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b, \text{ oder}$$

$$\text{II.}\ \sqrt[3]{a^3 + sb} = a + b;$$

denn

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)b$$
$$= a^3 + sb,$$

wenn wir

$$s = 3a^2 + 3ab + b^2$$

setzen.

## §. 107.

$$\text{I.}\ \sqrt[3]{(8x^9 - 84x^8 + 294x^7 - 307x^6 - 252x^5 + 441x^4 + 54x^3 - 189x^2 + 27)} = \overset{a}{\overbrace{2x^3}}\underset{a}{\underbrace{-\overset{b}{\overbrace{7x^2}}}}\underset{b}{\underbrace{+3}}$$

$$a^3 = 8x^9$$
$$-$$
$$-84x^8 : 3(2x^3)^2 = 3a^2$$
$$3a^2b = -84x^8$$
$$+$$
$$294x^7$$
$$3ab^2 = 294x^7$$
$$-$$
$$-307x^6$$
$$b^3 = -343x^6$$
$$+$$
$$36x^6 - 252x^5 + 441x^4 : 3(2x^3 - 7x^2)^2 = 3a^2$$
$$3a^2b = 36x^6 - 252x^5 + 441x^4 \quad (12x^6 - 84x^5 + 147x^4)$$
$$- \quad + \quad -$$
$$54x^3 - 189x^2$$
$$3ab^2 = 54x^3 - 189x^2$$
$$- \quad +$$
$$27$$
$$b^3 = 27$$
$$-$$
$$0.$$

D. h.:

1) Das erste Glied des Radicanden ($8x^9$), gibt das erste Glied der Wurzel ($2x^3$) allg. a; der Kubus dieses Gliedes (allg. $a^3$) ist vom Radicanden abzuziehen ($8x^9$).

2) Durch Division des dreifachen Quadrates des ersten Gliedes der Wurzel allg. $3a^2 = 12x^6$ in das zweite Glied des Radicanden ($-84x^8$) erhält man als Quotienten das zweite Glied der zu suchenden Wurzel allgem. $b = -7x^2$; mit diesem zweiten Gliede multiplicirt man den Divisor, so erhält man $-84x^8 =$ allg. $3a^2b$; hierauf multiplicirt man das dreifache Quadrat des gefundenen zweiten Gliedes mit dem ersten Glied der Wurzel, das gibt allgem. $3ab^2 = 294x^7$; endlich erhebt man das zweite Glied ($-7x^2$) zum Kubus, das ist allgem. $b^3 = -343x^6$. Diese drei Producte zieht man vom Reste des Radicanden ab. Bleibt der Rest Null, so ist der Radicand der vollkommene Kubus einer zweigliedrigen Wurzel; wo dies aber nicht stattfindet, wie hier, ist die Wurzel mehrgliedrig.

3) In diesem Falle betrachtet man die schon gefundene Wurzel ($2x^3 - 7x^2$) als das erste Glied der zu suchenden und verfährt wie Nr. 2 i. e. man dividirt den Rest mit dem dreifachen Quadrate der schon gefundenen Wurzel

$$= 12x^6 - 84x^5 + 147x^4;$$

dies gibt als neues Wurzelglied den Quotienten 3. Mit diesem Quotienten multiplicirt man den Divisor und erhält

$$36x^6 - 252x^5 + 441x^4 = \text{allg. } 3a^2b;$$

ferner multiplicirt man das dreifache Quadrat des Quotienten $3 = 27$ mit den vorangehenden Gliedern der Wurzel und erhält

$$54x^3 - 189x^2;$$

endlich erhebt man 3 zum Kubus und zieht die drei Producte vom Rest des Radicanden ab.

Auf diese Weise fährt man fort bis als Rest Null bleibt. Ist zuletzt der Rest Null, so ist der Radicand ein vollständiger Kubus.

4) Setzt man aber diese Operation noch so oft fort und es bleibt zuletzt immer noch ein Rest, dann ist der Radicand ein unvollkommener Kubus (irrationale Grösse §. 89). Eine solche Grösse gibt zur Wurzel eine unendliche Reihe von Gliedern.

Anmerkung. Bei algebraischen Grössen ist's einerlei, ob man nach der ersten oder zweiten Formel radicirt.

$$\text{II. } \sqrt[3]{27a^6 - 27a^5 + 144a^4 - 91a^3 + 240a^2 - 75a + 125} = \overbrace{\underbrace{3a^2 - a}_{a}}^{\overbrace{3a^2}^{a} - \overbrace{a}^{b}} + \underbrace{5}_{b}$$

$$a^3 = 27a^6$$
$$-$$

$$-27a^5 + 144a^4 - 91a^3 : 3(3a^2)^2 = 3a^2$$
$$sb = -27a^5 + 9a^4 - a^3 \quad (27a^4 - 9a^3 + a^2 = s).b.$$
$$+ \quad - \quad +$$

$$135a^4 - 90a^3 + 240a^2 - 75a + 125 : 3(3a^2 - a)^2 = 3a^2$$
$$sb = 135a^4 - 90a^3 + 240a^2 - 75a + 125 \quad (27a^4 - 18a^3 + \overbrace{3a^2 + 45a^2}$$
$$- \quad + \quad - \quad + \quad - \qquad -15a + 25 = s).b.$$

$$0.$$

$$\text{III. } \sqrt[3]{\left(\frac{m^3}{27} - \frac{m^2n}{4} + \frac{9mn^2}{16} - \frac{27n^3}{64} - \frac{m^2x}{6} + \frac{3mnx}{4} - \frac{27n^2x}{32} + \frac{mx^2}{4} - \frac{9nx^2}{16} - \frac{x^3}{8}\right)}$$
$$= \frac{1}{3}m - \frac{3n}{4} - \frac{x}{2}$$

$$a^3 = \frac{m^4}{27}$$
$$-$$

$$-\frac{m^2n}{4} + \frac{9mn^2}{16} - \frac{27n^3}{64} : 3\left(\frac{1}{3}m\right)^2 = 3a^2$$
$$sb = -\frac{m^2n}{4} + \frac{9mn^2}{16} - \frac{27n^3}{64} \quad \left(\frac{1}{3}m^2 - \frac{3mn}{4} + \frac{9n^2}{16} = s\right).b.$$
$$+ \quad - \quad +$$

$$-\frac{m^2x}{6} + \frac{3mnx}{4} - \frac{27n^2x}{32} + \frac{mx^2}{4} - \frac{9nx^2}{16} - \frac{x^3}{8} :$$
$$3\left(\frac{1}{3}m - \frac{3n}{4}\right)^2 \text{u. } 3(3a^2 + 3ab + b^2).b.$$
$$sb = -\frac{m^2x}{6} + \frac{3mnx}{4} - \frac{27n^2x}{32} + \frac{mx^2}{4} - \frac{9nx^2}{16} - \frac{x^3}{8}$$
$$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad +$$

$$0.$$

$$\text{IV. } \sqrt[3]{x^3 \pm y^3} = x \pm \frac{y^3}{3x^2} - \frac{y^6}{9x^5} \pm \frac{5y^9}{81x^8} - \frac{10y^{12}}{243x^{11}} \pm \ldots \infty.$$

## §. 108.

**Zusatz.** Aus mehrzifferigen Zahlen wird nach denselben Grundsätzen die Kubikwurzel gezogen, wie aus algebraischen Summen.

Es sei z. B. als Radicand die Zahl 997002999 gegeben, so ist die zu suchende Wurzel dreistellig, weil der gegebene Radicand drei Klassen gibt (§. 101 Zusatz 2).

$$\text{I. } \sqrt[3]{997|002|999} = \overbrace{900}^{a} + \overbrace{90}^{b} + 9 = 999$$

$$\underbrace{900 + 90}_{a} + \underbrace{9}_{b}$$

$$\begin{array}{rll}
a^3 = & 729\,000\,000 & \\
\hline
& 268\,002\,999 & : 3 \,.\, 900^2 = 3\,a^2 \\
3\,a^2 b = & 218\,700\,000 & \\
\hline
& 49\,302\,999 & \\
3\,a\,b^2 = & 21\,870\,000 & \\
\hline
& 27\,432\,999 & \\
b^3 = & 729\,000 & \\
\hline
& 26\,703\,999 & : 3 \,.\, (900 + 90)^2 = 3\,a^2 \\
3\,a^2 b = & 26\,462\,700 & \\
\hline
& 241\,299 & \\
3\,a\,b^2 = & 240\,570 & \\
\hline
& 729 & \\
b^3 = & 729 & \\
\hline
& 0. &
\end{array}$$

cf. §. 101, 6.

**Erklärung 1.** Zur Vereinfachung dieser Operation lässt man die den Rang der Ziffern bezeichnenden Nullen weg und schreibt zum Rest immer nur die nächste Ziffer von der folgenden Klasse. Z. B.:

$$\text{II. } \sqrt[3]{14|706|125} = 245$$

$$\begin{array}{rll}
a^3 = & 8 & \\
\hline
& 67 & : 3 \,.\, 2^2 = 3\,a^2 \\
3\,a^2 b = & 48 & \\
\hline
& 190 & \\
3\,a\,b^2 = & 96 & \\
\hline
& 946 & \\
b^3 = & 64 & \\
\hline
& 8821 & : 3 \,.\, 24^2 = 3\,a^2 \\
3\,a^2 b = & 8640 & \\
\hline
& 1812 & \\
3\,a\,b^2 = & 1800 & \\
\hline
& 125 & \\
b^3 = & 125 & \\
\hline
& 0. &
\end{array}$$

cf. folgendes Beispiel Nr. III und Erklärung 2.

**Erklärung 2.** Noch einfacher gestaltet sich die Operation, wenn man zum Reste die drei Ziffern der nächsten Klasse auf einmal setzt; diese Zahl durch das dreifache Quadrat der schon gefundenen Wurzel dividirt

(allg. $3a^2$), wobei aber die beiden letzten Ziffern rechts nicht berücksichtigt werden. Der Quotient ist die nächste Ziffer der Wurzel (allg. b). Diese Ziffer multiplicirt man mit dem Divisor $=$ (allg. $3a^2b$) und das dreifache Quadrat dieser Ziffer multiplicirt man mit dem schon gefundenen Theil der Wurzel $=$ (allg. $3ab^2$), endlich erhebt man diese Ziffer (allg. b) zum Kubus $=$ (allg. $b^3$), schreibt die drei Producte so als Summanden unter einander, dass man jedes um eine Stelle weiter nach rechts rückt und zieht ihre Summa vom vorstehenden Theil des Radicanden ab. Formel II. $a^3 + sb$ (§. 106).

Sollte der Divisor im Dividenden nicht enthalten sein, so ist die gesuchte Ziffer der Wurzel Null und die nächste Klasse des Radicanden ist dem Rest noch beizusetzen. Z. B.:

$$\begin{array}{lll}
\text{III.} & \sqrt[3]{127|111|781|952} = 5028 & \\
a^3 = & 125 & \\
\hline
 & 2\,111\,781 : 3 . 50^2 & = 3a^2 \\
 & 1\,500\,0 & = 3a^2b \\
 & \quad 6\,00 & = 3ab^2 \\
 & \qquad 8 & = b^3 \\
\hline
sb = & 1\,506\,008 & \\
\hline
 & 605\,773\,952 : 3 . 502^2 & = 3a^2 \\
 & 604\,809\,6 & = 3a^2b \\
 & \quad 963\,84 & = 3ab^2 \\
 & \qquad 512 & = b^3 \\
\hline
sb = & 605\,773\,952 & \\
\hline
 & 0. &
\end{array}$$

**Erklärung 3.** Wo Null als Rest bleibt, ist der Radicand ein vollkommener Kubus. Ist aber der Radicand kein vollständiger Kubus, so hat man ihn nach §. 104 Erkl. 3 zu behandeln; nur muss es hier statt $2n$ heissen $3n$ cf. §. 101, Zusatz 2. Z. B.:

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{\frac{24 . 10^{3n}}{10^{3n}}} = \frac{\sqrt[3]{24 . 10^{3n}}}{\sqrt[3]{10^{3n}}} = \frac{\sqrt[3]{24 . 10^{3n}}}{10^n}.$$

**Zusatz 1.** Irrationale Kubikzahlen werden radicirt, wenn man an Radicanden $3n$ Nullen hängt, aus dieser Zahl die Wurzel zieht und in der gewonnenen Wurzel n Decimalstellen abschneidet.

**Zusatz 2.** Decimalbrüche werden wie unvollständige (irrationale) Kubikzahlen radicirt.

Anmerkung. Die Eintheilung in Klassen hat vom Komma aus nach links und rechts zu geschehen; fehlen zur Bildung der letzten Klasse Ziffern, so werden sie durch Nullen ersetzt.

Es sei als Radicand 25,9 gegeben, so ist:

$$\text{IV. } \sqrt[3]{25,|900} = 2,95\ldots$$

$$\begin{array}{rll}
a^3 = & 8 & \\
\hline
& 17900 : 3 \,.\, 2^2 & = 3a^2 \\
& 108 & = 3a^2b \\
& 486 & = 3ab^2 \\
& 729 & = b^3. \\
\hline
sb = & 16389 & \\
\hline
& 1511000 : 3 \,.\, 29^2 & = 3a^2 \\
& 12615 & = 3a^2b \\
& 2175 & = 3ab^2 \\
& 125 & = b^3 \\
\hline
sb = & 1283375 & \\
\hline
& 227625. &
\end{array}$$

**Zusatz 3.** Gewöhnliche Brüche werden radicirt, wenn man Zähler und Nenner radicirt (§. 82). Z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{729}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Anmerkung. Gemischte Brüche sind vorher in unächte umzuwandeln. Z. B.

$$\sqrt[3]{3\frac{24}{64}} = \sqrt[3]{\frac{216}{64}} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}.$$

**Erklärung 4.** Weil aber selten Zähler und Nenner eines Bruches Kubikzahlen sind, so ist es am einfachsten jeden Bruch in einen Decimalbruch umzuwandeln und danach zu radiciren wie in Nr. IV. Z. B.:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{0,625} = 0,8549\ldots$$

## §. 109.

**Schlussbemerkung.** Wie für die Quadrat- und Kubikwurzeln, so liesse sich ein ähnliches Verfahren auch für höhere Wurzeln aufstellen; allein dies würde ziemlich weitläufig werden. Und da es keinen praktischen Nutzen hat, weil man durch Anwendung der Logarithmen jede Wurzel bestimmen kann, so kann man hier ganz davon absehen.

Die Logarithmen wird der nächste Theil dieses Abschnitts behandeln.

## §. 110.

### Beispiele und Aufgaben.

#### I. Radiciren.

1. $\sqrt{a^4} = a^2.$

2. $\sqrt[4]{am} = \sqrt[4]{a} \, . \, \sqrt[4]{m}.$

3. $\sqrt[3]{27 \, . \, 8 \, . \, 64} = 3 \, . \, 2 \, . \, 4 = 24.$

4. $\sqrt{\frac{81}{9}} = \frac{9}{3} = 3.$

5. $\sqrt[3]{\frac{3}{64}} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{3}.$

6. $\frac{\sqrt[3]{27}}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$

7. $\sqrt[3]{\frac{2}{125}} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{2}.$

8. $\frac{9}{\sqrt{81}} = 1.$

9. $\sqrt[4]{a^{12} b^4} = a^3 b.$

10. $\sqrt{49 a^4 b^3} = 7 a^2 b \sqrt{b}.$

11. $\sqrt{\frac{4 x^2}{25 y^2}} = \frac{2 x}{5 y}.$

12. $\sqrt[3]{125 x^4} = 5 x \sqrt[3]{x}.$

13. $\sqrt[6]{729 x^6 y^{18}} = 3 x y^3.$

14. $\sqrt[3]{\frac{27 a b}{729 c^3 d^6}} = \frac{3}{9 c d^2} \cdot \sqrt[3]{a b}.$

15. $\sqrt[3]{\frac{27 x^3 y^6 z^9}{64 a^6 b^{15}}} = \frac{3 x y^2 z^3}{4 a^2 b^5}.$

16. $\sqrt[9]{a^6 b^{18}} = b^2 \sqrt[3]{a^2}.$

17. $\sqrt[3]{b^8 c^6 d^7} = b^2 c^2 d^2 \sqrt[3]{b^2 d}.$

18. $\sqrt{162 a^2 b^5 c} = 9 a b^2 \sqrt{2 b c}.$

19. $\sqrt[3]{1536 x^6 y^9} = 8 x^2 y^3 \sqrt[3]{3}.$

20. $\left(\sqrt{9 x^2 y^4 z^6}\right)^3 = 27 x^3 y^6 z^9.$

21. $\sqrt[4]{\left(- \frac{a^4 b^6 c^{10}}{d^{14} m^{12}}\right)^2} = \frac{a^2 b^3 c^5}{d^7 m^6}.$

22. $\sqrt[3]{\frac{y}{8}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{y}.$

23. $\sqrt[5]{\frac{a^{10} b^5}{c^{15}}} = \frac{a^2 b}{c^3}.$

24. $\sqrt[4]{x^{11} y^{13}} = x^2 y^3 \sqrt[4]{x^3 y}.$

25. $\sqrt{81 a^3 b^4 c} = 9 a b^2 \sqrt{a c}.$

26. $\sqrt[4]{\frac{x^9 y^8}{y^{11}}} = x^2 \sqrt[4]{\frac{x}{y^3}}.$

27. $\sqrt[3]{\sqrt[6]{y^9}} = \sqrt[6]{y^3} = \sqrt{y}.$

28. $\sqrt[5]{\sqrt[6]{x^{10}}} = \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}.$

29. $a b \sqrt[3]{d^2} = \sqrt[3]{a^3 b^3 d^2}.$

30. $\sqrt{\sqrt[3]{81 d^4}} = \sqrt[3]{9 d^2}.$

31. $\sqrt[3]{\sqrt{-216 b^9 c^{15}}} = \sqrt{-6 b^3 c^5}.$

32. $x \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{x^6}.$

33. $4 b \sqrt{3 c} = \sqrt{48 b^2 c}.$

34. $2 a^7 \sqrt[3]{8 a^2} = \sqrt[3]{64 a^{23}}.$

35. $\frac{3}{4} \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}.$

36. $\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{27}{9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$

37. $\sqrt{49^3} =$

38. $\sqrt[6]{(a^7 b^4)^3} =$

39. $\sqrt[3]{864\,x^{11}\,y^4}$.

40. $2\,x\sqrt{3\,x\,y} =$

41. $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{8}{9}} =$

42. $\frac{m^3\,n^2}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x^5}{m^5\,n^5}} =$

---

43. $\sqrt{(16\,a^6 + 24\,a^3\,b^2\,c^3 + 9\,b^4\,c^6)} = 4\,a^3 + 3\,b^2\,c^3$.

44. $\sqrt{(9\,x^4 - 24\,x^2\,y^4 + 16\,y^8)} = 3\,x^2 - 4\,y^4$.

45. $\sqrt{(121\,a^2\,b^4 - 154\,a\,b^2\,d^3 + 49\,d^6)} = 11\,a\,b^2 - 7\,d^3$.

46. $\sqrt{(225\,a^{6x}\,b^2 + 330\,a^{3x}\,b\,c^{2n} + 121\,c^{4n})} = 15\,a^{3x}\,b + 11\,c^{2n}$.

47. $\sqrt{\left(\frac{9\,a^2\,b^4}{16\,x^4} - \frac{a^3\,b^2\,c}{3\,b^3\,x^2} + \frac{4\,a^4\,c^2}{81\,b^6}\right)} = \frac{3\,a\,b^2}{4\,x^2} - \frac{2\,a^2\,c}{9\,b^3}$.

48. $\sqrt{\left(\frac{16\,x^4\,y^2}{49\,d^6} + \frac{8\,m\,x^2\,y}{9\,n^2} + \frac{49\,d^6\,m^2}{81\,n^4}\right)} = \frac{4\,x^2\,y}{7\,d^3} + \frac{7\,d^3\,m}{9\,n^2}$.

49. $\sqrt{(4 - 12\,a - 7\,a^2 + 44\,a^3 - 14\,a^4 - 40\,a^5 + 25\,a^6)} = 2 - 3\,a - 4\,a^2 + 5\,a^3$.

50. $\sqrt{(49\,a^2\,x^2 - 42\,a\,x^2\,y^2 + 14\,a\,m^2\,x + 9\,x^2\,y^4 - 6\,m^2\,x\,y^2 + m^4)} =$
$7\,a\,x - 3\,x\,y^2 + m^2$.

51. $\sqrt{(81\,a^2\,c^4 - 306\,a\,b^2\,c^2\,d^3 - 126\,a\,c^2\,x^3 + 289\,b^4\,d^6 + 238\,b^2\,d^3\,x^3 + 49\,x^6)} =$
$9\,a\,c^2 - 17\,b^2\,d^3 - 7\,x^3$.

52. $\sqrt{\left(\frac{a^6}{b^2} + \frac{8\,a^3}{5\,c^2\,d} - \frac{6\,a^3\,x^2}{7\,b\,y^3} + \frac{16\,b^2}{25\,c^4\,d^2} - \frac{24\,b\,x^2}{35\,c^2\,d\,y^3} + \frac{9\,x^4}{49\,y^6}\right)} =$
$\frac{a^3}{b} + \frac{4\,b}{5\,c^2\,d} - \frac{3\,x^2}{7\,y^3}$.

53. $\sqrt{\left(\frac{x^4}{9} + \frac{4\,a\,x^2}{15\,b} - \frac{10\,c\,d^2\,x^2}{21\,a\,b} - \frac{2\,x^2\,y}{3} + \frac{4\,a^2}{25\,b^2} - \frac{4\,c\,d^2}{7\,b^2} - \frac{4\,a\,y}{5\,b}\right.}$
$\left. + \frac{25\,c^2\,d^4}{49\,a^2\,b^2} + \frac{10\,c\,d^2\,y}{7\,a\,b} + y^2\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{2\,a}{5\,b} - \frac{5\,c\,d^2}{7\,a\,b} - y$.

54. $\sqrt{\left(\frac{x^2}{9} - \frac{2\,a\,c^2\,x}{3\,y} + \frac{a^2\,c^4}{y^2}\right)} =$

55. $\sqrt{\left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{2\,a\,c\,x^2}{d^2\,y} - \frac{5\,x^3}{6\,y^3} + \frac{a^2c^2}{d^4} - \frac{5\,a\,c\,x}{6\,d^2\,y^2} + \frac{25\,x^2}{144\,y^2}\right)} =$

56. $\sqrt{(144\,x^4\,y^2 + 72\,a\,x^4\,y - 19\,\frac{x^3\,y}{5\,a\,b} - 24\,x^2\,y^3 + 9\,a^2\,x^4 - 4\,\frac{4\,x^3}{5\,b}}$
$- 6\,a\,x^2\,y^2 + \frac{16\,x^2}{25\,a^2\,b^2} + 1\frac{3\,x\,y^3}{5\,a\,b} + y^4\Big) =$

57. $\sqrt{25 + 3y} =$

58. $\sqrt{1 + \frac{ab}{c}} =$

59. $\sqrt{6889} = 83.$

60. $\sqrt{255025} = 505.$

61. $\sqrt{4639716} = 2154.$

62. $\sqrt{47045881} = 6859.$

63. $\sqrt{2025810081} = 45009.$

64. $\sqrt{351298031616} = 592704.$

65. $\sqrt{34012224} =$

66. $\sqrt{17} = 4{,}123106\ldots$

67. $\sqrt{31} = 5{,}567764\ldots$

68. $\sqrt{83} = 9{,}110434\ldots$

69. $\sqrt{76} = 8{,}717797\ldots$

70. $\sqrt{547} =$

71. $\sqrt{834576} =$

72. $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8.$

73. $\sqrt{0{,}2025} = 0{,}45.$

74. $\sqrt{0{,}013924} = 0{,}118.$

75. $\sqrt{3{,}74809} = 1{,}9359\ldots$
Rest 38119.

76. $\sqrt{52{,}4176} = 7{,}24.$

77. $\sqrt{21{,}076} =$

78. $\sqrt{314{,}00937} =$

79. $\sqrt{5\frac{1}{16}} = 2\frac{1}{4}.$

80. $\sqrt{\frac{3}{7}} = 0{,}65465\ldots$
Rest 44775.

81. $\sqrt{10\frac{5}{11}} = 3{,}2333\ldots$
Rest 27111.

82. $\sqrt{6\frac{1}{4}} =$

83. $\sqrt{\frac{7}{8}} =$

84. $\sqrt{\frac{5}{9}} =$

---

85. $\sqrt[3]{(1 + 6y + 12y^2 + 8y^3)} = 1 + 2y.$

86. $\sqrt[3]{(x^6 + 12x^4y + 48x^2y^2 + 64y^3)} = x^2 + 4y.$

87. $\sqrt[3]{(343a^6 - 1323a^4b^3 + 1701a^2b^6 - 729b^9)} = 7a^2 - 9b^3.$

88. $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3b^3}{d^3} - \frac{3a^4bc^2}{d^2x} + \frac{3a^5b^2c}{dx^2} - \frac{a^6b^3}{x^3}\right)} = \frac{ac}{d} - \frac{a^2b}{x}.$

89. $\sqrt[3]{(64m^{12} - 240m^{20} + 588m^8 - 845m^6 + 882m^4 - 540m^2 + 216)} =$
$4m^4 - 5m^2 + 6.$

90. $\sqrt[3]{(27a^6b^3 + 27a^5c - 18a^7b^3 + \frac{9a^4c^2}{b^3} - 12a^6c + 4a^8b^3 + \frac{a^3c^3}{b^6} - \frac{2a^5c^2}{b^3}}$
$+ \frac{4a^7c}{3} - \frac{8a^9b^3}{27}) = 3a^2b + \frac{ac}{b^2} - \frac{2a^3b}{3}.$

91. $\sqrt[3]{(125x^6y^3 - 150x^4y^6 + 60x^2y^9 - 8y^{12})} =$

92. $\sqrt[3]{(27 y^3 + 216 y^5 + 576 y^7 + 135 y^8 + 512 y^9 + 720 y^{10} + 960 y^{12} + 225 y^{13} + 600 y^{15} + 125 y^{18})} =$

93. $\sqrt[3]{\left(\frac{64 x^6 y^3}{m^3 n^6} - \frac{36 x^5}{n^4 y} + \frac{27 x^4 m^3}{4 n^2 y^5} - \frac{27 x^3 m^6}{64 y^9}\right)} =$

94. $\sqrt[3]{(8 a - 2 b)} =$

95. $\sqrt[3]{1 - b y + 15 y^3} =$

96. $\sqrt[3]{74088} = 42.$

97. $\sqrt[3]{1124864} = 104.$

98. $\sqrt[3]{34645976} = 326.$

99. $\sqrt[3]{82653950016} = 4356.$

100. $\sqrt[3]{2498846293} =$

101. $\sqrt[3]{577385261783} =$

102. $\sqrt[3]{5} = 1{,}709976\ldots$

103. $\sqrt[3]{46} = 3{,}583048\ldots$

104. $\sqrt[3]{79} = 4{,}290840\ldots$

105. $\sqrt[3]{23456} = 28{,}625\ldots$

Rest 943359375.

106. $\sqrt[3]{314} =$

107. $\sqrt[3]{715} =$

108. $\sqrt[3]{0{,}274625} = 0{,}65.$

109. $\sqrt[3]{373{,}248} = 7{,}2.$

110. $\sqrt[3]{6{,}4} = 1{,}85.$

Rest 68375.

111. $\sqrt[3]{3{,}0045} =$

112. $\sqrt[3]{102{,}875} =$

113. $\sqrt[3]{8{,}2584} =$

114. $\sqrt[3]{11 \frac{25}{64}} = 2{,}25.$

115. $\sqrt[3]{5 \frac{23}{64}} = 1{,}75.$

116. $\sqrt[3]{4 \frac{3}{8}} = 1{,}635\ldots$

Rest 44253.

117. $\sqrt[3]{\frac{5}{7}} =$

118. $\sqrt[3]{\frac{7}{10}} =$

119. $\sqrt[3]{\frac{3}{7}} =$

Anmerkung. Zur weiteren Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 93–97; 97–103; 104–112; Heis §. 41; §. 50–54.

---

## II. Addition und Subtraction.

1. $\sqrt{36} + \sqrt{49} - \sqrt{100} = 3.$
2. $\sqrt{245} - \sqrt{80} + \sqrt{45} - 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$
3. $\sqrt{48} - \sqrt{27} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$
4. $\sqrt{294} - 5\sqrt{24} - \sqrt{54} - 2\sqrt{6} + \sqrt{1014} = 5\sqrt{6}.$

5. $\sqrt{175} + 6\sqrt{28} - \sqrt{343} - 2\sqrt{63} - \sqrt{27} = 4\sqrt{7} - 3\sqrt{3}.$

6. $2\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{432} = 6\sqrt[3]{2}.$

7. $4\sqrt[3]{1375} + 5\sqrt[3]{88} - 5\sqrt[3]{297} + \sqrt[3]{1375} - \sqrt[3]{2376} - \sqrt[3]{3773} = 7\sqrt[3]{11}.$

8. $3\sqrt{18} - 2\sqrt[3]{135} + 4\sqrt[3]{40} - 2\sqrt{72} = 2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt{2}.$

9. $12\sqrt{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{\frac{3}{16}} - \sqrt{147} + 3\sqrt[3]{\frac{24}{64}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}.$

10. $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{9^3}{49^3}}} + \sqrt{\sqrt[3]{\frac{64^2}{343^2}}} = 1.$

11. $\sqrt{121\,x^5 y^3} - 2\,x^2\sqrt{4\,x\,y^3} - 3\,y\sqrt{4\,x^5\,y} + 2\sqrt{x^5 y^3} = 3\,x^2 y\sqrt{x\,y}.$

12. $3\,m^2\sqrt[3]{250\,a\,b\,n^3} - 2\,m^2 n\sqrt[3]{16\,a\,b} + 5\,n\sqrt[3]{2\,a\,b\,m^6} - 5\sqrt[3]{16\,a\,b\,m^6 n^3}$

$\quad - 2m^2\sqrt[3]{2\,a\,b\,n^3} = 4\,m^2 n\sqrt[3]{2\,a\,b}.$

13. $\sqrt{\frac{x^4 y}{m^3 n^2}} + \sqrt{\frac{x^2 y^3}{m\,n^4}} - \sqrt{\frac{x^2 y}{n^2 m\,p^2}} = \left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - \frac{1}{p}\right)\frac{x}{n}\sqrt{\frac{y}{m}}.$

14. $\sqrt{\frac{a^3 b^4}{m^2 x}} - \sqrt{\frac{a^3 b^2}{x^3}} - \sqrt{\frac{a\,b^2}{4x}} = \left(\frac{a\,b}{m} - \frac{a}{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{b}{x}\sqrt{a\,x}.$

15. $\sqrt[3]{\frac{8\,x^6 y^6}{27\,a^4 d}} + \sqrt[3]{\frac{x^9 y}{a\,d^7}} - \sqrt[3]{\frac{x^9 y^3}{8\,a\,d}} = \left(\frac{2\,y}{3\,a} + \frac{x}{d^2} - \frac{x\,y}{2}\right)\frac{x^2 y}{a\,d}\sqrt[3]{a^2 d^2}.$

16. $2\sqrt{180} = \sqrt{245} + 3\sqrt{45} - \sqrt{1620} + \sqrt{125} =$

17. $7\sqrt[3]{88} + 2\sqrt[3]{702} - 3\sqrt{18} - 4\sqrt[3]{15125} + \sqrt{98} =$

18. $\sqrt{147\,a^3 b^3} + 3\,a\,b\sqrt{3\,a\,b} - 2\,a\sqrt{12\,a\,b^3} - b\sqrt{12\,a^3 b} =$

19. $\sqrt[3]{3\,m^5 n^4\,y} - \sqrt[3]{81\,m^2\,n\,y^7} - m\sqrt[3]{24\,m^2 n^4\,y} + \sqrt[3]{24\,m^8\,n\,y} =$

20. $\sqrt{\frac{12\,m\,n^4}{36\,a\,y^3}} + \sqrt{\frac{147\,m^3 n^2}{4\,a^5\,y}} + \sqrt{\frac{48\,m\,n^2}{a\,y}} =$

21. $\frac{5}{2}\sqrt[3]{x^2 y} - \frac{3}{x}\sqrt[3]{x^5 y} - 4\sqrt[3]{x\,y^2} + \frac{3}{4x}\sqrt[3]{x^4 y^2} - \frac{x}{2}\sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \frac{25\,x}{4}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} =$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 113—117.

---

## III. Multiplication und Division.

1. $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab} = ab.$

2. $\sqrt{mn} \cdot \sqrt{mx^5} \cdot \sqrt{m^2n^3} = (mnx)^2\sqrt{x}.$

3. $2\sqrt[3]{xy^2} \cdot 6\sqrt[3]{y^2z} \cdot -\sqrt[3]{x^2yz^2} = -12xyz\sqrt[3]{y^2}.$

4. $5\sqrt[3]{a^2b} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt[3]{b^2cd^6} \cdot -\frac{4}{5}\sqrt[3]{ac^7} = 2abc^2d^2\sqrt[3]{c^2}.$

5. $3\sqrt{xy} : 9\sqrt{y} = \frac{1}{3}\sqrt{x}.$

6. $\sqrt{a^6b^2} : -2\sqrt{a^4b} = -\frac{1}{2}a\sqrt{b}.$

7. $21\sqrt[3]{a^7b^4} : 7\sqrt[3]{a^4b^7} = 3\frac{a}{b}.$

8. $5\sqrt[4]{a^5b^4} : 10\sqrt[4]{ab} = \frac{a}{2}\sqrt[4]{b^3}.$

9. $2\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot -4\sqrt{1\frac{1}{3}} = -8.$

10. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot 5\sqrt[3]{1\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{180}.$

11. $5\sqrt[3]{4\frac{2}{3}} : 3\sqrt[3]{\frac{7}{9}} = 1\frac{2}{3}\sqrt[3]{6}.$

12. $3 : \sqrt{3} = \sqrt{3}.$

13. $\frac{3\sqrt{x^5y}}{5m} \cdot \frac{5}{7}\sqrt{xm^2} = \frac{3x^3}{7}\sqrt{y}.$

14. $\sqrt[5]{(xy^3z^7)^3} \cdot \sqrt[5]{(xy^3z^2)^2} = xy^3z^5.$

15. $\frac{a^2}{b^3}\sqrt[3]{\frac{a^9b^4}{x^2y}} : \frac{a^3}{b^3}\sqrt[3]{\frac{a^3b}{x^2y}} = a.$

16. $\frac{\sqrt[3]{(mx^2y^3)^4} \cdot \sqrt[3]{(m^3y^5)^2}}{\sqrt[3]{(m^2x^4y^{11})^2}} = m^2.$

17. $\sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{y^2} = y\sqrt[6]{y}.$

18. $\sqrt[3]{a^5b^2} \cdot \sqrt[4]{a^3b^6} = a^2b^2\sqrt[12]{a^5b^2}.$

19. $x^2y^3 \cdot \sqrt[3]{(x^2y^3)^3} = x^4y^6.$

20. $y : \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y^2}$.

21. $3 : \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

22. $\dfrac{2\sqrt[4]{x^2 y^4} \cdot - 3\sqrt{x^3 y^6}}{-\sqrt[3]{27 x^6 y^9}} = 2\sqrt{y}$.

23. $\sqrt[4]{x y^3 z^2} \cdot \sqrt{x y z} \cdot \sqrt[3]{x^2 y^5} = x y^2 z \sqrt[12]{x^5 y^{11}}$.

24. $2\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 3\sqrt[4]{5} \cdot \frac{1}{3}\sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3\frac{3}{4}}$.

25. $9\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{6}\sqrt[4]{27} = \frac{3}{2}$.

26. $3\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[12]{27648}$.

27. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{a^2 b^4 d}{a^3 c^4}} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a^4 c^6}{b^4 d}} = \frac{1}{4}\sqrt[12]{a^8 b^4 c^2 d}$.

28. $\sqrt{3} : \sqrt[3]{3^2 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{\frac{3}{8}}$.

29. $\sqrt[3]{x^2 y^3} : \sqrt[4]{x y^2} = \sqrt[12]{x^5 y^6}$.

30. $\sqrt[3]{y^2} : \sqrt[12]{y^5} = \sqrt[4]{y}$.

31. $\sqrt[6]{\frac{m^4}{n^3}} \cdot \sqrt{\frac{n}{m^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{8 x^3}} = \frac{1}{2} x$.

32. $\left(\sqrt[3]{x y^2} \cdot \sqrt{\frac{x^3}{y}}\right) : \dfrac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x y \sqrt{x y}}} = x\sqrt[12]{x y^2}$.

33. $\sqrt{x^3 \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^3 \sqrt[3]{x}}}} = \sqrt[9]{x^{19}}$.

34. $\sqrt[3]{\sqrt[6]{x^3 y^8}} \cdot \sqrt{x y \sqrt[9]{y^7}} \cdot \sqrt[3]{y \sqrt{x^9}} = x y \sqrt[6]{x y^4}$.

35. $\sqrt[3]{m n^2 \sqrt[4]{m n^6}} \cdot \sqrt[6]{m^4 n^5 \sqrt[4]{m^6 n^4}} = m n^2 \sqrt[6]{m^2 n}$.

36. $\sqrt{\dfrac{x^2 y \sqrt[4]{x^2 y^3}}{\sqrt{x y \sqrt{y}}}} = x\sqrt{y}$.

37. $\frac{b^3}{3a^2}\sqrt{\frac{x^4}{y^3}} : \frac{b^5}{3a^5}\sqrt[3]{\frac{5x^5}{3m^2}} = \frac{a^3}{b^3 y}\sqrt[6]{\frac{9m^4x^2}{25y^3}}$.

38. $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt{a^3c} \cdot \sqrt[4]{abc} =$

39. $\frac{y}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{xz} \cdot \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[3]{y^2}} =$

40. $\sqrt[4]{20} \cdot 6\sqrt{3} =$

41. $3\sqrt{2\sqrt[3]{10}} \cdot 2\sqrt{5\sqrt[3]{100}} =$

42. $\frac{ac}{b^2d^3}\sqrt[3]{\frac{a^2c}{x}} \cdot \sqrt{\frac{a^4c^3}{bx^5}} \cdot \frac{c}{d^2}\sqrt[4]{\frac{a^3c}{d}} =$

43. $2\sqrt{6} : 3\sqrt[3]{9} =$

44. $9 : \sqrt[3]{6} =$

45. $3\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^2}} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^3}{y^7}} =$

46. $\frac{x^2}{3y^3}\sqrt{\frac{a^2x}{y^4}} : \frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{ax}{y^7}} =$

47. $\sqrt[3]{\frac{a^4c\sqrt[6]{a^9c^3}}{\sqrt[3]{ac\sqrt{ac^2}}}} =$

48. $\frac{mn}{z^4}\sqrt[15]{\frac{x^5m^6q^6}{y^5z}} \cdot \frac{x^2}{n^3y}\sqrt[5]{\frac{z^2m^{13}}{q^{17}}} =$

49. $\left(2\sqrt{3} - 4\sqrt[4]{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{7}} - 2\sqrt[8]{\frac{1}{64}}\right) \cdot 3\sqrt{\frac{1}{3}} =$

$6 - 12\sqrt[4]{\frac{2}{27}} + 2\sqrt{\frac{1}{7}} - 6\sqrt[4]{\frac{1}{72}}$.

50. $\left(\sqrt{x^3y} + y\sqrt[3]{x^4\sqrt{xy^2}} - 5\sqrt[3]{x^2y^4} + \sqrt[3]{x^2\sqrt{y^3}}\right) \cdot \sqrt[3]{xy\sqrt{y}} =$

$xy\sqrt[6]{x^5} + xy\sqrt[6]{x^5y^5} - 5xy\sqrt[6]{y^5} + xy =$

$xy\left(\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[6]{x^5y^5} - 5\sqrt[6]{y^5} + 1\right)$.

51. $(\sqrt[8]{x^6 y^6} + \frac{x}{8}\sqrt[4]{y^3} + 4y\sqrt[8]{x^3} + \frac{x^3 y}{2}\sqrt[4]{xy}) : \frac{1}{2}\sqrt[4]{xy} =$

$2\sqrt{xy} + \frac{1}{4}\sqrt[4]{x^3 y^2} + 8\sqrt[8]{xy^6} + x^3 y.$

52. $\left(\frac{x^3 z}{2}\sqrt[3]{y} - 2x^2 z\sqrt[3]{x^2 y^2} - x^2\sqrt[3]{y^2 z^2}\right) : x\sqrt[3]{x^2 y z^2} =$

$\frac{x}{2}\sqrt[3]{xz} - 2x\sqrt[3]{yz} - \sqrt[3]{xy}.$

53. $\left(\frac{m^2}{n^3}\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}\sqrt{\frac{mx}{n}}} - \frac{x^4}{mn^2}\sqrt{\frac{x}{mn}} - \frac{m}{x}\sqrt[3]{\frac{n}{mx}}\right) : \sqrt[3]{\frac{m^2 x^3}{n^4}\sqrt{\frac{mx}{n^3}}} =$

$\frac{m^2}{n^2 x} - \frac{x^3}{m^2}\sqrt[3]{\frac{x}{mn^2}} - \frac{n^2}{x^2}\sqrt[6]{\frac{n}{mx^3}}.$

54. $(3 + 5\sqrt{3})(3 - 5\sqrt{3}) = -66.$

55. $(-2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(-2\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{5}) = 11\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\sqrt{15}.$

56. $(2\sqrt[3]{4} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{5})(2\sqrt[3]{4} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{5}) = 8\sqrt[3]{2} - \frac{1}{9}\sqrt[3]{25}.$

57. $(5\sqrt[4]{3} + 2\sqrt{\frac{1}{2}})(5\sqrt[4]{3} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 25\sqrt{3} - 2.$

58. $(2\sqrt{7} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{7} - 3\sqrt{2}) = 10.$

59. $(-1 + \sqrt{5}) . -(1 + \sqrt{5}) = -4.$

60. $(-2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) . -(2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) = 16.$

61. $(6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) : 2\sqrt{2} = 1.$

62. $(6 - \sqrt{7}) . (2\sqrt{3} + \sqrt{7}) = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{21} + 6\sqrt{7} - 7.$

63. $(3\sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{16}) . (\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{16}) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} - \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + 12\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - 4\sqrt[3]{4}.$

64. $(2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{16}) . (2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}) = -8\sqrt[3]{2} - 12\sqrt[3]{4} + 32.$

65. $(3\sqrt{12} - \sqrt{45} + \sqrt{63}) . (2\sqrt{105} - 7\sqrt{5} + 5\sqrt{7}) = 210.$

66. $3\sqrt{2\sqrt[3]{10}} . 2\sqrt{5\sqrt[3]{100}} = 60.$

67. $2\sqrt{6 + \sqrt{6}} . \sqrt{6 + \sqrt{6}} = 12 + 2\sqrt{6}.$

68. $5\sqrt{2 - \sqrt{2}} . \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 10 - 5\sqrt{2}.$

69. $\frac{1}{3}\sqrt{4 + \sqrt{3}} . 6\sqrt{4 + \sqrt{3}} = 8 + 2\sqrt{3}.$

70. $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y.$

71. $(x + \sqrt{y}) \cdot (x - \sqrt{y}) = x^2 - y.$

72. $(\sqrt[4]{xy} - \sqrt[4]{mn}) \cdot (\sqrt[4]{xy} + \sqrt[4]{mn}) = \sqrt{xy} - \sqrt{mn}.$

73. $(\sqrt{x^3} - 2\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x^3} + 2\sqrt{y}) = x^3 - 4y.$

74. $(\frac{1}{3}\sqrt[6]{a^3 b^4} + 3\sqrt{ab}) \cdot (6\sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{a\sqrt{b^4}}) = \frac{5b}{3}\sqrt[6]{a^5 b^2} + 15b\sqrt[6]{a^5 b}.$

75. $(\sqrt[5]{xy} + \sqrt[3]{xy^2}) \cdot (\sqrt{xy} - \sqrt[4]{xy^2}) = \sqrt[10]{x^7 y^7} + \sqrt[6]{x^5 y^7} - \sqrt[20]{x^9 y^{14}} - y\sqrt[12]{x^7 y^2}.$

76. $$\left(\sqrt[5]{x^2} + \frac{xy}{\sqrt[5]{x^2}}\right) \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{y^2}{x^2 y}} + \frac{\sqrt[3]{x^2 y^2}}{x\sqrt{x}}\right) =$$
$$\sqrt[30]{x^2 y^5} + y\sqrt[30]{x^8 y^5} + \sqrt[30]{\frac{y^{20}}{x^{13}}} + y\sqrt[30]{\frac{y^{20}}{x^7}}.$$

77. $$\left(\frac{xz}{y^2}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} + \frac{y}{z^2}\sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}}\right) \cdot \left(\frac{xz}{y^2}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} - \frac{y}{z^2}\sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}}\right) =$$
$$\frac{x^3 z^2}{y^4}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} - \frac{y^2}{z^5}\sqrt[3]{\frac{x^2 y^2}{z}}.$$

78. $$\left(\frac{x^2 y}{x}\sqrt{\frac{x^3 y}{x}} + \frac{x^3 y}{3x}\sqrt{\frac{3y^3}{y}}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\sqrt{\frac{xy}{x}} + \frac{3x^2}{xy}\sqrt{\frac{xy}{3x}}\right) =$$
$$x^3 y\,(1 + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{3} + \sqrt{y}).$$

79. $$\left(\sqrt{\frac{a}{2} + b} - \sqrt{c} + \sqrt{\frac{m}{3}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{2} + b} + \sqrt{c} - \sqrt{\frac{m}{3}}\right) =$$
$$\frac{a}{2} + b - c + 2\sqrt{\frac{cm}{3}} - \frac{m}{3}.$$

80. $$(-\sqrt[12]{x} + \sqrt[12]{x^5} + \frac{5}{6}\sqrt[4]{x^3}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt[6]{x^5} + \frac{5}{6}\sqrt[6]{x^7}) =$$
$$-\sqrt[12]{x^7} + 2\sqrt[12]{x^{11}} - x\sqrt[12]{x^3} + \frac{25x}{36}\sqrt[12]{x^{11}}.$$

81. $$\left(-\frac{mp^2}{q}\sqrt[4]{\frac{q^3}{mn^3p^3}} + \frac{mp}{3q}\sqrt[6]{\frac{pq^4}{mn^4}} + \frac{3p}{4n}\sqrt[12]{\frac{m^{11}n^5p}{q^5}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{mn^5}{p^7 q}}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{8}\sqrt[12]{\frac{m^7 n^{31}}{p^{43} q^7}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{m^2 n^8}{p^{11} q^2}}\right) =$$
$$-\frac{mn}{p^2 q}\sqrt[4]{\frac{mn^3 q}{p}} + \frac{11mn}{24p^2}\sqrt[6]{\frac{m^2 n^5}{p^2 q^5}} + \frac{5mn}{24p^2 q}\sqrt[12]{\frac{m^5 n^{11} q}{p^5}}$$
$$+ \frac{7mn^2}{96p^2 q}\sqrt{\frac{m}{p}} + \frac{6mn^2}{16p^2 q}\sqrt[12]{\frac{m^7 n}{p^7 q}}.$$

82. $(m^4\sqrt[3]{n^2x} - m^2n^2\sqrt{m} + 4m^4n\sqrt[6]{nx^5} - 4m^2n^2\sqrt{mnx} + m^2n^4\sqrt[3]{nx^2}$
$- n^5\sqrt[6]{m^3n^4x^2}) : (m^2\sqrt[3]{n^2x} - n^2\sqrt{m}) = m^2 + 4m^2\sqrt{nx} + n^3\sqrt[3]{n^2x}.$

83. $(6x^6\sqrt[6]{x} - 5x^6\sqrt[12]{x} - 29x^6 + 12x^5\sqrt[12]{x^{11}} + 20x^5\sqrt[6]{x^5}) : (3x^2\sqrt[4]{x^3}$
$+ 2x^2\sqrt[3]{x^2} - 4x^2\sqrt[12]{x^7}) = 2x^3\sqrt[12]{x^5} - 3x^3\sqrt[3]{x} - 5x^3\sqrt[4]{x}.$

84. $\left(-\frac{3}{4}x^4\sqrt[6]{\frac{xy^3}{27n}} + \frac{3nx^2}{16}\sqrt[6]{\frac{n^5x}{8y^3}} + \frac{x^4}{2}\sqrt[6]{\frac{nxy}{108}} - \frac{n^2x^2}{8}\sqrt[6]{\frac{nx}{32y^5}}\right):$
$\left(x^2\sqrt{\frac{xy}{3n}} - \frac{n}{4}\sqrt{\frac{nx}{2y}}\right) = -\frac{3}{4}x\sqrt[3]{nx^2} + \frac{x}{2}\sqrt[3]{\frac{n^2x^2}{2y}}.$

85. $\sqrt{x^3y^2}\,.\,\sqrt{x\sqrt{y^3}} =$

86. $\sqrt[3]{a^4b^2}\,.\,\sqrt[6]{ab} =$

87. $3\sqrt{\frac{7}{8}}\,.\,6\sqrt[4]{\frac{1}{4}} =$

88. $2\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\,.\,4\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,.\,2\sqrt[3]{4} =$

89. $4\sqrt[4]{a^6b^5} : 2\sqrt[2]{a^2b} =$

90. $\frac{1}{3}ab\sqrt[6]{ab^2x^4} : 6\sqrt[3]{ab^4x} =$

91. $\frac{xy}{z}\sqrt[3]{\frac{xy}{m^4}}\,.\,\frac{z}{x}\sqrt[6]{\frac{m^3}{x^3y^4}} =$

92. $-\frac{xz}{y^3}\,.\,\sqrt[6]{\frac{y^{10}}{z^2}}\,.\,\sqrt[3]{\frac{y^2}{z}} =$

93. $9\sqrt[6]{\frac{a^4b^7c^9}{m^4n^3}} : 3\sqrt{\frac{abc^3}{mn}} =$

94. $\frac{4mn}{x^2}\sqrt[12]{\frac{m^4n^3x^7}{yz}} : -\sqrt[3]{\frac{m^2n^3x}{x^2yz}} =$

95. $\left(\frac{3a}{4x}\sqrt{\frac{a^3b}{y}}\,.\,\frac{4x}{a^2}\sqrt[4]{\frac{ab^2y}{x^3}}\right) : \sqrt[8]{\frac{a^3b^2y^5}{x^4}} =$

96. $\sqrt[4]{x^2\sqrt{x^3\sqrt[3]{x\sqrt{x^3}}}} =$

97. $\sqrt[4]{x^3\sqrt{xy}}\,.\,\sqrt{y\sqrt[4]{x^3}}\,.\,\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} =$

98. $\sqrt[6]{a^2b^3\sqrt{ac}}\,.\,\sqrt[4]{ac^2\sqrt[3]{b^4}} =$

99. $\sqrt[9]{\frac{x^7y^3\sqrt{x^5y^{10}}}{\sqrt[6]{x^{19}y^6}}}\,.\,\sqrt[12]{\frac{xy\sqrt{y^4}}{\sqrt[3]{y\sqrt{x^2y}}}} =$

100. $(\sqrt{12} + \sqrt{4} - \sqrt[4]{3})\,.\,\sqrt{3} =$

101. $\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - 2\sqrt[6]{\frac{4}{5}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{5}\sqrt{20}}\right)\,.\,3\sqrt[6]{\frac{2}{9}} =$

102. $\left(9\sqrt[6]{\frac{4}{5}}+3\sqrt[3]{\frac{2}{9}}-2\sqrt[6]{\frac{4}{81}}-\sqrt{3}\right).3\sqrt{\frac{3}{5}}=$

103. $\left(x\sqrt[4]{y\sqrt[3]{x}}+8\sqrt[3]{3x\sqrt[4]{y^3}+9x\sqrt[12]{x^9}}\right).8\sqrt[12]{x^4y^3}=$

104. $\left(\frac{x^2}{y}\sqrt{\frac{x\sqrt[3]{xy}}{mn^2}}+\frac{y}{x^3}\sqrt[6]{\frac{m^3n^6}{x^3y^2}}+\sqrt[3]{\frac{mn^2y}{x^4}}\right).\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{m^2n}{x^4y^6}}=$

105. $\left(\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{a}{mn}}-\frac{n^2}{a^4m}\sqrt{\frac{n}{am}}-\frac{x^4}{a^3}\sqrt[3]{\frac{x^2y}{a^4}}\right):x\sqrt[6]{\frac{x^6yn^3}{a^5m^4}}=$

106. $5\sqrt{2}-3\sqrt[6]{8}).(5\sqrt{2}+3\sqrt[6]{8})=$

107. $\left(4\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-3\sqrt[6]{\frac{4}{5}}\right).\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+3\sqrt[4]{\frac{4}{5}}\right)=$

108. $(6-5\sqrt[3]{2}).(3\sqrt{6}-2\sqrt[3]{2})=$

109. $\sqrt{9-2\sqrt{2}}.(3\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{6})=$

110. $\left(\frac{xy}{z^2}\sqrt[3]{\frac{x^2}{z}}-\frac{z}{y^2}\sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}}\right).\left(\sqrt[6]{\frac{x^2y}{z^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xz}{y}}}\right)=$

111. $\left(\frac{a}{y}\sqrt[4]{\frac{a^3b^6}{mn}}+\frac{3y}{4a^2}\sqrt{\frac{a^2b}{m^2}}\right).\left(\frac{a}{3}\sqrt{\frac{ab^3}{n^2}}-\frac{3y}{4a^2}\sqrt[4]{\frac{a}{mn}}\right)=$

112. $(3b^3\sqrt{a^3b}-4a^2\sqrt[3]{ab^2}-3ab\sqrt{ab^7}+b^3\sqrt[3]{a^9}).(ab\sqrt{b}$

$-3a^2b\sqrt[3]{ab^2}+4b^2\sqrt[6]{a^8b})=$

113. $\left(\frac{a^3}{b^2}\sqrt[12]{\frac{a^7c^3}{b^2x^7}}-\frac{3ab}{c^2}\sqrt[6]{\frac{b^2}{x^4}}+\frac{3c^3}{4x}\sqrt[4]{\frac{ac^2}{bx}}\right).$

$\left(\frac{c^2}{3ab}\sqrt[3]{\frac{b}{3}\sqrt{\frac{x^2}{c^3}}}+\frac{4x^2}{5c}\sqrt[3]{\frac{abc}{x^4}}\right)=$

114. $(6x^3y^9\sqrt{xy}-29x^3y^7\sqrt[3]{x^3y^6}+20x^5y^9\sqrt[6]{xy}-11x^6y^9$

$-30x^5y^8\sqrt[6]{x^{11}y^5}):(2x^3y^6-7x^2y^5\sqrt[6]{x^{11}y^5}+6x^4y^5\sqrt[3]{x^2y^2})=$

115. $\left(31\sqrt[4]{\frac{m^7x^5}{n^{17}y^{19}}}-\frac{15m^4x^3}{n^7y^8}\sqrt[3]{\frac{m^2x}{ny^2}}+16mn\sqrt[6]{mnx^5y^5}+\frac{ny^3}{m^4x^2}\sqrt[12]{\frac{n^{11}y}{mx^{11}}}\right.$

$\left.+21\frac{n^5y^7}{m^7x^5}\right):\left(\frac{2}{n^2y^2}\sqrt[12]{\frac{m^7x^5}{n^5y^7}}-\frac{3y}{m^2x}\sqrt[3]{\frac{n^2x}{mx^2}}-\frac{5m^3x^2}{n^5y^6}\sqrt{\frac{mx}{ny}}\right)=$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 117–130; Heis §. 42 u. 43.

## IV. Umformung irrationaler Nenner.

1. $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}.$

2. $\frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$

3. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}.$

4. $\frac{12}{\sqrt[3]{24}} = 2\sqrt[3]{9}.$

5. $\frac{5}{2\sqrt{7} - 3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{7} + 3\sqrt{2}}{2}.$

6. $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{7}} = \frac{8}{41}\sqrt{15} - \frac{2}{41}\sqrt{35}.$

7. $\frac{3}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{25} + 2\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}.$

8. $\frac{2 - \sqrt{6}}{4 + \sqrt{6}} = \frac{7 - 3\sqrt{6}}{5}.$

9. $\frac{3\sqrt{7} - 6\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{8}} = -\sqrt{35} + 2\sqrt{15} - 2\sqrt{14} + 4\sqrt{6}.$

10. $\frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}} = \frac{18 - 5\sqrt{10}}{37}.$

11. $\frac{x^2}{b\sqrt{y}} = \frac{x^2}{by}\sqrt{y}.$

12. $\frac{a^2b}{\sqrt{ab}} = a\sqrt{ab}.$

13. $\frac{a^3b}{\sqrt{a^5b^7}} = \frac{1}{b^2}\sqrt{ab^{-1}}.$

14. $\frac{\sqrt{x}}{y - \sqrt{m}} = \frac{y\sqrt{x} + \sqrt{mx}}{y^2 - m}.$

15. $\frac{2x^2}{3\sqrt[3]{3x}} = \frac{2x}{9}\sqrt[3]{9x^2}$

16. $\frac{x}{\sqrt{y + \sqrt{m}}} = \frac{x\sqrt{(y - \sqrt{m}).(y^2 - m)}}{y^2 - m}.$

17. $\frac{2a^2 - 4b\sqrt{ab}}{3a^2 + 5b\sqrt{a^2b}} = \frac{6a^3 - 12ab\sqrt{ab} - 10a^2b\sqrt{b} + 20b^3\sqrt{a}}{9a^3 - 25ab^3}$

18. $\frac{4}{\sqrt{5 + \sqrt{3}}} = \frac{2}{11}\sqrt{110 - 22\sqrt{3}}.$

19. $\frac{2}{\sqrt{7 - \sqrt{3}}} = \frac{1}{23}\sqrt{322 + 46\sqrt{3}}.$

20. $\frac{2}{\sqrt{3}} =$

21. $\frac{5}{\sqrt{7}} =$

22. $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} =$

23. $\frac{a^2 b}{a \sqrt{b}} =$

24. $\frac{x y^2}{x^2 \sqrt[3]{y}} =$

25. $\frac{5 a \sqrt{7 a b^3}}{3 \sqrt[3]{a b^2}} =$

26. $\frac{x y^2}{x - 3 \sqrt{x y} + 2 y} =$

27. $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}} =$

28. $\frac{13}{\sqrt{3} - \sqrt{10}} =$

29. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5 + \sqrt{2}}} =$

30. $\frac{2 \sqrt{5} - \frac{1}{3} \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \frac{3}{4} \sqrt{3}} =$

31. $\frac{\sqrt{3 a b^2}}{\sqrt{7 a^3 b - \sqrt{a b^3}}} =$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 131—134; Heis §. 43, 28 sq.

---

## V. Potenziren.

1. $(\sqrt[3]{a^4 b^5})^2 = a^2 b^3 \sqrt[3]{a^2 b}.$

2. $(\sqrt[5]{2 x^2 y})^3 = x \sqrt[5]{8 x y^3}.$

3. $(\sqrt[3]{- 4 x^2 y^5})^4 = 4 x^2 y^6 \sqrt[3]{4 x^2 y^2}.$

4. $(3 \sqrt{5 x^3 y})^3 = 135 x^4 y \sqrt{5 x y}.$

5. $(2 \sqrt[4]{8 x^3 y^5})^2 = 8 x y^2 \sqrt{2 x y}.$

6. $\left(\frac{3 x^2 y}{m n^2} \sqrt{\frac{m^4 n^3}{3 x y}}\right)^3 = \frac{3 m^3 x^4 y}{n} \sqrt{\frac{3 x y}{n}}.$

7. $\left(\frac{2 a b}{c^2} \sqrt[3]{- \frac{3 c^2}{a^2 b^2}}\right)^4 = \frac{48 a b}{c^5} \sqrt[3]{\frac{3 a b}{c}}.$

8. $(\sqrt[6]{x^2 y^4})^6 = x^2 y^4.$

9. $\sqrt{a + b})^2 = a + b.$

10. $(\sqrt[4]{x^2 - y^2})^2 = x - y.$

11. $(3 - \sqrt{5})^2 = 14 - 6 \sqrt{5}.$

12. $(2 \sqrt{5} - 5 \sqrt{3})^2 = 95 - 20 \sqrt{15}.$

13. $(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7})^2 = 3\frac{31}{36}+\frac{2}{3}\sqrt{21}.$

14. $(3y-2\sqrt{x^2-y^2})^2 = 5y^2-12y\sqrt{x^2-y^2}+4x^2.$

15. $\left(\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}y^4}\right)^2 = \frac{x^2}{6}-\frac{y^4}{72}-\frac{y^2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}y^4}.$

16. $(3\sqrt{x+y}-5\sqrt{x-y})^2 = 34x-30\sqrt{x^2-y^2}-16y.$

17. $(2\sqrt{3}-5\sqrt{2}+3\sqrt{5})^2 = 107-20\sqrt{6}+12\sqrt{15}-30\sqrt{10}.$

18. $(6\sqrt{3}+5\sqrt{2}-3\sqrt{7})^2 = 221+60\sqrt{6}-36\sqrt{21}-30\sqrt{14}.$

19. $(2\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{2}{3}\sqrt[4]{xy}-3\sqrt{y})^2 = 4\frac{x}{y}-2\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{x^3}{y}}-12\sqrt{x}+\frac{4}{9}\sqrt{xy}$
$+4\sqrt[4]{xy^3}+9y.$

20. $(4\sqrt{2}+2\sqrt{3})^3 = 288\sqrt{2}+224\sqrt{3}.$

21. $\left(\frac{2ab}{x}\sqrt{\frac{m^3}{y}}-\frac{x}{y}\sqrt{\frac{mn}{ab}}\right)^3 = \frac{8a^3b^3m^4}{x^3y}\sqrt{\frac{m}{y}}-\frac{8abm^3}{xy^2}\sqrt{abmn}$
$+\frac{2mnx}{y^2}\sqrt{\frac{m^3}{y}}-\frac{4abm^3}{xy^2}\sqrt{abmn}+\frac{4m^2x}{y^2}\sqrt{\frac{mn^2}{y}}-$
$\frac{mnx^3}{aby^3}\sqrt{\frac{mn}{ab}}.$

22. $(\sqrt{a^3b^2c})^5 =$

23. $(\sqrt[3]{-5x^2y})^5 =$

24. $(3ab\sqrt[4]{a^2m^3x})^3 =$

25. $\left(\frac{3xy^2}{m^3}\sqrt[3]{\frac{xm^2}{4y^2}}\right)^3 =$

26. $(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-5\sqrt{7})^2 =$

27. $(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{5}}-\frac{2}{3}\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2 =$

28. $\left(\frac{3xy}{mn^2}\sqrt[3]{\frac{x}{my}}-\frac{mn}{xy}\sqrt{\frac{x^3y}{m^2n}}\right)^2 =$

29. $\left(\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{x^9}{y^3}}+\frac{3b}{c^2}\sqrt[3]{\frac{ax^2}{b^5}}\right)^3 =$

30. $\left\{\left[\left(\frac{4a}{m}\sqrt{\frac{3ab}{4m^2n}}\right)^2\cdot\frac{a}{m}\sqrt[4]{\frac{m^3}{n^2}}\right]^3\cdot\frac{a}{n}\sqrt[8]{\frac{ab}{m}}\right\}^3 =$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 134—137; Heis §. 45, 1—18.

---

## VI. Radiciren von Wurzelgrössen.

1. $\sqrt{(49y^5-154\sqrt[4]{y^{17}}+121\sqrt{y^7})} = 7\sqrt{y^5}-11\sqrt[4]{y^7}.$

2. $\sqrt{(4x^2y\sqrt[3]{y}-6x^2y+\frac{9}{4}x^2\sqrt[3]{y^2})} = 2x\sqrt[3]{y^2}-\frac{3}{2}x\sqrt[3]{y}.$

3. $\sqrt{\left(\frac{x^2 y^3}{4}\sqrt[3]{y} - \frac{4}{5} x y^3 + \frac{16}{25} y^2 \sqrt[3]{y^2}\right)} = \frac{x}{2}\sqrt[3]{y^5} - \frac{4y}{5}\sqrt[3]{y}.$

4. $\sqrt{\left(\frac{25x}{36y} - \frac{5}{9}\sqrt[4]{\frac{x^3}{y}} - \frac{53}{63}\sqrt{xy} + \frac{8}{21}\sqrt[4]{xy^5} + \frac{16y^2}{49}\right)} =$
$\frac{5}{6}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{3}\sqrt[4]{xy} - \frac{4y}{7}.$

5. $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{16 + \sqrt{256 - 254}}{2}} + \sqrt{\frac{16 - \sqrt{256 - 254}}{2}}$
$= \sqrt{\frac{16+2}{2}} + \sqrt{\frac{16-2}{2}} = 3 + \sqrt{7}.$ cf. §. 105.

6. $\sqrt{126 - 22\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{126 + \sqrt{15876 - 2420}}{2}} - \sqrt{\frac{126 - \sqrt{15876 - 2420}}{2}}$
$= \sqrt{\frac{126 + 116}{2}} - \sqrt{\frac{126 - 116}{2}} = 11 - \sqrt{5}.$

7. $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$

8. $\sqrt{10 + 2\sqrt{21}} = \sqrt{7} + \sqrt{3}.$

9. $\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

10. $\sqrt{47 - 12\sqrt{11}} = 6 - \sqrt{11}.$

11. $\sqrt{66 + 16\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 8.$

12. $\sqrt{98 + 24\sqrt{10}} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{5}.$

13. $\sqrt{327 - 60\sqrt{21}} = -5\sqrt{3} + 6\sqrt{7}.$

14. $\sqrt{63\frac{1}{4} + 3\sqrt{7}} = \frac{1}{2} + 3\sqrt{7}.$

15. $\sqrt{2x - 2\sqrt{x^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{2x + \sqrt{4x^2 - 4x^2 + 4y^2}}{2}} -$
$\sqrt{\frac{2x - \sqrt{4x^2 - 4x^2 - 4y^2}}{2}} = \sqrt{\frac{2x + 2y}{2}} - \sqrt{\frac{2x + 2y}{2}} =$
$\sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}.$

16. $\sqrt{5a^4 + 4a^3\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 b^2} = 2a^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}.$

17. $\sqrt{8n^2 y^4 + 4m^4 y^2 - 16 n y^3 \sqrt{m^4 - 2n^2 y^2}} = 4ny^2 - 2y\sqrt{m^4 - 2n^2 y^2}.$

18. $\sqrt{4xy\sqrt[3]{xy} + 9x^3 y + 12x^2 y\sqrt[6]{xy}} = 2\sqrt[3]{x^2 y^2} + 3\sqrt{x^3 y}.$

19. $\sqrt{\frac{25x^4}{36} + \frac{7x^2y}{36} - \frac{2x^2}{3}\sqrt{x^4 - y^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - y} - \frac{2x}{3}\sqrt{x^2 + y}.$

20. $\sqrt{\left(\frac{25x^2y}{9p^{2n}q^4} - \frac{5x^2y\sqrt[6]{yz^3}}{p^{n+1}q^3} + \frac{9x^2y\sqrt[3]{yz^2}}{4p^2q^2}\right)} = \frac{5x\sqrt{y}}{3p^nq^2} - \frac{3x\sqrt[3]{y^2z}}{2pq}.$

21. $\sqrt[3]{(m^4n\sqrt{mn} - 3m^3n\sqrt[4]{mn^3} + 3m^2n^2 - n^2\sqrt[4]{m^3n})} = m\sqrt{mn} - \sqrt[4]{mn^3}.$

22. $\sqrt{\left(\frac{9}{16}\sqrt[3]{x^7} - \frac{3}{4}\sqrt[6]{x^{13}} - x^2 + \frac{5}{6}\sqrt[6]{x^{11}} + \frac{25}{36}\sqrt[3]{x^5}\right)} =$

23. $\sqrt{\frac{n^3x^4}{my^2} + 2m^2nx + \frac{m^5y^2}{nx^2}} =$

24. $\sqrt[3]{(8m^4n\sqrt{mn} - 36m^3n^2\sqrt[3]{mn^2} + 54mn^2\sqrt[6]{m^5n} - 27mn^5)} =$

25. $\sqrt{10x^4 - 9y^3 - 6x^2\sqrt{x^4 - y^3}} =$

26. $\sqrt{7x - 5y - 4\sqrt{3x^2 - y^2}} =$

27. $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} =$

28. $\sqrt{155 - 24\sqrt{11}} =$

29. $\sqrt{52\frac{1}{3} + 8\sqrt{\frac{13}{3}}} =$

30. $\sqrt{\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{6}} - \frac{4}{6}\sqrt{5}} =$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 137—140; Heis §. 46 u. 55.

---

## VII. Operationen mit imaginären Wurzelgrössen.

1. $(\sqrt{-1})^7 = -i.$
2. $(\sqrt{-1})^{4n} = 1.$
3. $(\sqrt{-1})^6 = -1.$
4. $(\sqrt{-1})^{4n+1} = i.$
5. $(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1.$
6. $(\sqrt{-1})^{4n+3} = -i.$
7. $(\sqrt{-1})^{4n+m} = i^m.$
8. $(3x^2\sqrt{-1})^2 = -9x^4.$
9. $(5x^3\sqrt{-1})^3 = -125x^9i.$
10. $(2x^2\sqrt{-1})^4 = 16x^8.$
11. $(3y^2\sqrt{-1})^5 = 243y^{10}i.$
12. $(ab\sqrt{-1})^{4n+m} = (a^{4n+m}b^{4n+m})i^m.$
13. $3\sqrt{-49} - 2\sqrt{-48} + 2\sqrt{-147} - 2\sqrt{-81} - \sqrt{-12} = (4\sqrt{3} + 3)i.$

14. $5\sqrt{-16}+2\sqrt{-108}+4\sqrt{-162}-\frac{4}{5}\sqrt{-75}-9\sqrt{-18}-3\sqrt{-49}=$
$i(8\sqrt{3}+9\sqrt{2}-1)$.

15. $\sqrt{-x^3y}-\sqrt{-x^2y^3}+\sqrt{-xy^3}+x\sqrt{-y^3}=(x+y)i\sqrt{xy}$.

16. $3x\sqrt{-4x^2y^3}-26y^2\sqrt{-\frac{x^3y}{4}}+7x\sqrt{-4xy^5}-5xy\sqrt{-x^2y}=$
$i(x^2y\sqrt{y}+xy^2\sqrt{xy})$.

17. $3ab\sqrt{-25a^5b^3}+2a\sqrt{4a^3b^7}-2b^2\sqrt{16a^5b^3}-6a^2b\sqrt{-4a^3b^3}$
$+2ab^2\sqrt{9a^3b^3}+a^2b^2\sqrt{-a^3b}=(ab^2+2a^2bi)2ab\sqrt{ab}$.

18. $(3\sqrt{-54}+5\sqrt{8}+5\sqrt{-27}-4\sqrt{-2}).\sqrt{-8}$
$=16-36\sqrt{3}-30\sqrt{6}+40i$.

19. $(\sqrt{-50}+4\sqrt{6}-3\sqrt{-18}+5\sqrt{-4}).3\sqrt{-2}=24+(30\sqrt{2}+24\sqrt{3})i$.

20. $(5\sqrt{-x}-2\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt{-x^3y^2}+\sqrt{4x^3}-6x\sqrt{-1:x}).3\sqrt{-x}=$
$3x+2x^2y+(x-1)6xi$.

21. $(5+4\sqrt{-2})(2-4\sqrt{-2})=42-12i\sqrt{2}$.

22. $(2\sqrt{-3}-\sqrt{-5})(4\sqrt{3}-2\sqrt{-5})=(24-8\sqrt{15})i-10$.

23. $(x\sqrt{-y}+d\sqrt{-k})(x\sqrt{-y}-d\sqrt{-k})=d^2k-x^2y$.

24. $(20\sqrt{3}-18\sqrt{2}+i(15\sqrt{2}-28\sqrt{3}):\sqrt{-6}=$
$2\sqrt{-27}+\sqrt{75}-7\sqrt{8}-5\sqrt{-8}$.

25. $\frac{-10}{\sqrt{-10}+\sqrt{-5}}=\frac{-10(\sqrt{-10}-\sqrt{-5})}{(\sqrt{-10}+\sqrt{-5})(\sqrt{-10}-\sqrt{-5}}=$
$2\sqrt{-10}-2\sqrt{-5}$.

26. $\frac{26}{4\sqrt{-7}+7\sqrt{-6}}=\frac{26(4\sqrt{-7}-7\sqrt{-6})}{(4\sqrt{-7}+7\sqrt{-6})(4\sqrt{-7}-7\sqrt{-6}}=$
$\left(\frac{3}{7}\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)i$.

27. $\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-3}+\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-5}(\sqrt{-3}-\sqrt{-5})}{(\sqrt{-3}+\sqrt{-5})(\sqrt{-3}-\sqrt{-5}}=\frac{5-\sqrt{15}}{2}$
$\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{15}$.

28. $(7+4\sqrt{-3})^2=1+56i\sqrt{3}$.

29. $(\sqrt{-5}-\sqrt{-7})^2=-12-2i\sqrt{35}$.

30. $(-1+\sqrt{-3})^3=8$.

31. $\sqrt{5ab\sqrt{-1}} = i\sqrt{5ab}.$

32. $(2\sqrt{-3}+4\sqrt{-1})^2 = -4+16i\sqrt{3}.$

33. $(x\sqrt[4]{xy}-5a\sqrt{-xy})^2 = x^2\sqrt{xy} - 10ax\sqrt[4]{-x^3y^3} - 25a^2xy.$

34. $\sqrt{7+24\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49+576}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{49+576}}{2}} =$

$\sqrt{\frac{7+25}{2}} + \sqrt{\frac{7-25}{2}} = 4+3i.$

35. $\sqrt{2+2\sqrt{-15}} = \sqrt{5}+i\sqrt{3}.$

36. $\sqrt{7-30\sqrt{-2}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49+1800}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{49+1800}}{2}} =$

$5-3\sqrt{-2}.$

37. $\sqrt{-4-2\sqrt{-77}} = \sqrt{\frac{-4+\sqrt{16+308}}{2}} - \sqrt{\frac{-4-\sqrt{16+308}}{2}} =$

$\sqrt{7}-i\sqrt{11}.$

38. $\sqrt{-10-2\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{-10+\sqrt{100-84}}{2}} - \sqrt{\frac{-10-\sqrt{100-84}}{2}} =$

$(\sqrt{3}-\sqrt{7})i.$

39. $\sqrt{-93-30\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{-93+\sqrt{8649-5400}}{2}} -$

$\sqrt{\frac{-93-\sqrt{8649-5400}}{2}} = (3\sqrt{2}-5\sqrt{3})i.$

40. $\sqrt{\frac{9dx^2}{16y^2}+\frac{3d}{2}\sqrt{-\frac{d}{y}}-\frac{d^2y}{x^2}} = \frac{3x}{4y}\sqrt{d}+\frac{d}{x}\sqrt{-y}.$

41. $\sqrt{\frac{abx^2y^2}{z^2}-10i\sqrt{abx}-\frac{25kz}{x^2y^2}} =$

42. $2x\sqrt{-3}-3y\sqrt[4]{-1}-5x\sqrt{-3}+4y\sqrt[4]{-1} =$

43. $\sqrt{x+y}\,.\,\sqrt{x-y} =$

44. $(3\sqrt{-5}+2\sqrt{-1}-7\sqrt{-11})(2\sqrt{-1}-5\sqrt{-2}) =$

45. $\sqrt{216+90i} =$

46. $\sqrt{37-28i\sqrt{3}} =$

47. $\sqrt{9+2i\sqrt{22}} =$

48. $\sqrt{-1-12i\sqrt{39}} =$

49. $\sqrt{87+12i\sqrt{33}} =$

50. $\frac{\sqrt{-2}}{3\sqrt{-5}+2\sqrt{-1}} =$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, S. 140—145; Heis §. 49.

## VIII. Potenzen mit allgemeinen Exponenten.

### *a) Operationen mit negativen Exponenten.*

1. $x^{-3} . x^4 = x.$

2. $x^{-4} . x^{-2} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}.$

3. $x^4 . x^{-9} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}.$

4. $5 x^{-3} y^{-4} . 2 x^2 y^6 = 10 x^{-1} y^2.$

5. $\frac{3}{4} x^{-2} y^3 . \frac{2}{5} x^{-4} y^{-7} = \frac{3}{10 x^6 y^4}.$

6. $- x^{-3} . - x^2 . - x^{-4} = - x^{-5} = - \frac{1}{x^5}.$

7. $y^3 : y^5 = y^{-2} = \frac{1}{y^2}.$

8. $y^5 : y^5 = y^0 = 1.$

9. $y^9 : y^{12} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}.$

10. $y^{-5} : y^{-4} = y^{-1} = \frac{1}{y}.$

11. $4 y^{-7} : 2 y^2 = 2 y^{-9} = \frac{2}{y^9}.$

12. $x^{-m} : x^{-n} = x^{n-m}.$

13. $x^n : x^{-m} = x^{n+m}.$

14. $5^2 : 5^2 = 1.$

15. $x^5 y^3 z : x^5 y^3 z = 1.$

16. $21 y^3 : 7 y^5 = 3 y^{-2} = \frac{3}{y^2}.$

17. $\frac{15}{16} y^{-2} : \frac{5}{8} y^{-5} = \frac{3 y^3}{2}.$

18. $x^{3n} : x^{-4} = x^{3n+4}.$

19. $x^{-2n} : x = x^{-(2n+1)} = \frac{1}{x^{2n+1}}.$

20. $x^{-4m} : x^n = x^{-(4m+n} = \frac{1}{x^{4m+n}}$

21. $x^{2n-4} : x^{n-5} = x^{n+1}.$

22. $15 x^{-3} y^2 : - 5 x^{-2} y^3 = - 3 x^{-1} y^{-1} = - \frac{3}{xy}.$

23. $x^5 y^3 z : - \frac{3}{4} x y^5 z^4 = - \frac{4}{3} x^4 y^{-2} z^{-3} = - \frac{4 x^4}{3 y^2 z^3}.$

24. $3 x^{-3} . 9 x^{-2} . - \frac{x^4}{9} . - 4 x^7 . \frac{x^3}{6} = 2 x^9.$

25. $\frac{3}{4} x^{2n+1} y^{-3} . \frac{1}{3} x^{n-2} y^{m+4} . - 12 x^{-2n+3} y^{2m-1} = - 3 x^{n+2} y^{3m}.$

26. $\left[\left(\frac{8}{9} x^{-5} y^2 z^{2m} : \frac{4}{3} x^3 y^{n+2} z^{4m}\right) : \frac{2}{3} x^{-6} y^{-3n} z^{-m}\right] = \frac{y^{2n}}{x^2 z^m}.$

27. $[(x + y)^3 (x + k)^{-4}] : [(x + y)^{-5} (x + k)^{-3}] = (x + y)^8 (x + k)^{-1}.$

28. $(3 x^m y^n z^{-3} + x^2 y^{-3} z^{-2} - 9 x y z^{-3}) . 3 x^m y^2 z^2 =$
$9 x^{2m} y^{n+2} z^{-1} + 3 x^{m+2} y^{-1} z - 27 x^{m+1} y^3 z^{-1}.$

29. $(2 + 3 x^{2m} y^{m-3} z^m + 2 x^2 y^m z^2 - x^{-m} y^{6-n} z) . 6 x^{2m-2} y^{m+3} z^{-4} =$
$12 x^{2m-2} y^{m+3} z^{-4} + 18 x^{4m-2} y^{2m} z^{m-4} + 12 x^{2m} y^{2m+3} z^{-2}$
$- 6 x^{m-2} y^{-(n-m-9)} z^{-3}.$

30. $(21 x^{3m} y^2 - 28 x^{2n} y^{-4} + 49 x^m y^{-5} - 7 x^{-2n} y^{-m}) :$
$7 x^2 y^{-6} = 3 x^{3m-2} y^8 - 4 x^{2n-2} y^2 + 7 x^{m-2} y - x^{-(2n+2)} y^{6-m}.$

31. $(12\,x^4 y^4 + 18\,x^{-3} y^{-7} z^{-3} - 30\,y\,z^{-1} - 6\,x^{m+2} y^4 z^{n-3}):$
$-6\,x^2 y^4 z^{-3} = -2\,x^2 z^3 - 3\,x^{-5} y^{-11} + 5\,x^{-2} y^{-3} z^2 + x^m z^n.$

32. $\frac{3\,a^{-2} b}{5\,x y^{-2}} \cdot \frac{5\,b^{-3}}{7\,x^2 y^{-5}} = \frac{3\,y^7}{7\,a^2 b^2 x^3}.$

33. $\frac{5\,x^{m-1}}{7\,y^{-n}} \cdot \frac{3\,x^2}{5\,y^{-2}} = \frac{3\,x^{m+1}}{7\,y^{-(n+2)}}.$

34. $\frac{7}{5}\,x^{m-2} y^3 z^3 \cdot \frac{10\,y^{-4} z^2}{7\,x^{-3}} = \frac{2\,x^{m+1} z^5}{y}.$

35. $\frac{2\,x^m z^{n-q}}{3\,x\,y^{n-1}} \cdot \frac{3\,x^2 z^{-n}}{7\,y^{-n}} = \frac{2\,x^{m+1} y}{7\,z^q}.$

36. $\frac{11\,x^{-4} b}{12\,a^{-2} y^3} : \frac{3\,x^{-m} b^{-3}}{4\,a\,y^{-2}} = \frac{11\,a^3 b^4}{9\,x^{4-m} y^5}.$

37. $\frac{9\,x^2}{14\,y^2 z^{-1}} : \frac{27\,z^{-4}}{5\,x^{-3} y^2} = \frac{5\,z^5}{42\,x}.$

38. $\frac{4\,b^{-2} x}{5\,a^3 y^{-4}} : \frac{b^{-3} x^2}{10\,a^4 y^{-6}} = 8\,\frac{a\,b}{x\,y^2}.$

39. $\frac{7\,a^3 b^{-4} c^m}{9\,x^{-2} y\,z^{-3}} : \frac{3\,a^2 b^3 c^m}{2\,x\,y^4 z} = \frac{14\,a\,x^3 y^3 z^4}{27\,b^7}.$

40. $-\frac{5\,x^{m-3} y^{-(n-1)}}{21\,z^{-m+1}} : \frac{5\,x^{-2m}}{3\,y^n z^{-m}} = -\frac{x^{3m-3}\,y}{7\,z}.$

41. $\frac{4\,x^{-4m+n} y^{n+1}}{7\,a^{m+n} c^{q+1}} : \frac{4\,a^{-m+n+4} y^{-n+1}}{14\,x^{-(3m-n+1)} c^{q-1}} = 2\,\frac{x^{-(7m-2n+1)} y^{2n}}{a^{2n+4} c^{-2}}.$

42. $\left(\frac{7\,a^3 b^{-5} d^{-2}}{11\,c^{-4} x^3} : \frac{14\,a^{-2} b^{-3} c\,x^{-2}}{4\,y^{-4}}\right) : \left(\frac{3\,a^2 c\,y^{-2}}{4\,d^{-2} x} \cdot \frac{a^{-5} b^{-2} d^{-4}}{11\,c^4}\right) =$
$2\,\frac{2\,a^8 c^6}{3\,y^2}.$

43. $(4\,a^{2m-1} b^{n+2} - 3\,x^4 y^{-3} + 9\,a^{m+2} c^{n-5} + 1)(3\,a^{m+4} x^{-2} - 2\,b^{n-3} y^{-2})$
$= 12\,a^{3m+3} b^{n+2} x^{-2} - 9\,a^{m+4} x^2 y^{-3} + 27\,a^{2m+6} c^{n-5} x^{-2} + 3\,a^{m+4} x^{-2}$
$- 8\,a^{2m-1} b^{2n-1} y^{-2} + 6\,b^{n-3} x^4 y^{-5} - 18\,a^{m+2} b^{n-3} c^{n-5} y^{-2}$
$- 2\,b^{n-3} y^{-2}.$

44. $\frac{x^{-m} y^{n-3}}{a^{-2} b^3} \cdot \frac{a^2 c^{-4}}{y^{n+1}} =$

45. $\frac{13\,x^2 y^{m-3}}{24\,a^{-m} c^{-4}} \cdot \frac{18\,a^{4-2m} c^2}{26\,x^{-4} y^{m+2}} =$

46. $\frac{5\,x^{-(2n-m-1)} y^{-4m}}{14\,a^{-(2m+n)} b^{-n}} \cdot \frac{7\,a^{2m-n} b^3}{10\,x^{2m+2} y^m} =$

47. $\frac{3\,a^{-m} b^{-4} c^3}{8\,x^2 y^{-n+2} z} : \frac{3\,a^m b^{n-2} c}{2\,y^{n-4} z^3} =$

48. $\frac{4\,a^{m-3}\,b^{-(n-1)}}{15\,x^{-m+1}} : \frac{2\,a^{-2m}\,b^{n+4}}{5\,b^n\,x^{-m}} =$

49. $\frac{3\,x^{m+2n-1}\,y^{-4}}{7\,a^{-2m+1}\,b^m} : \frac{6\,x^{-m+2n-3}\,y^2}{14\,a^{-m+1}\,b^{-3m}} =$

50. $\left(\frac{1}{2}\,x^{m-2}\,y^{-4} + \frac{3}{5}\,x^{3m}\,y^2 - \frac{5}{4}\,x^{2m-1}\,y^{-2}\right).$

$$\left(\frac{3}{5}\,x^{m-2}\,y^{+3} + \frac{5\,x^{3m}\,y^2}{4\,b^{-4m}\,c} - \frac{x^{2m-1}\,y^{-2}}{4\,z^{-2}}\right) =$$

---

51. $(x^{-3})^2 = x^{-6} = \frac{1}{x^6}.$

52. $(x^3)^{-2} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}.$

53. $(x^{-5})^{-3} = x^{15}.$

54. $(-x^{-5})^{-3} = -x^{15}.$

55. $[(-2\,x)^{-2}]^{-3} = 64\,x^6.$

56. $(-3\,a^2)^{-4} = \frac{81}{a^8}.$

57. $(-4\,a^3)^{-3} = -\frac{64}{a^9}.$

58. $(-5\,a^{-3})^2 = \frac{25}{a^6}.$

59. $\left[\left(-\frac{3\,a}{4\,b}\right)^3\right]^{-2} = \frac{4096\,b^{+6}}{729\,a^6}.$

60. $\frac{16\,(x^{-2}\,y^3\,z^{-5})^{-2}}{(4\,x^2\,y^{-3}\,z)^3} = \frac{y^3\,z^7}{4\,x^2}.$

61. $\frac{[2\,(2\,x^{-2}\,y)^{-1}]^{-2}}{[3\,(2\,a^{-3}\,b)^{-2})^{-1}} = \frac{4\,a^6\,y^2}{3\,b^2\,x^4}.$

62. $\frac{4\,x^2\,(5^{-2}\,x^{-2}\,y^3)^2}{3^{-3}\,(3\,x^3\,y^{-2})^{-1}} = \frac{36}{625}\,x\,y^4.$

63. $\frac{[2\,(2\,x^{-2}\,y)^{-1}]^{-2}}{[3\,(2\,a^{-3}\,b)^{-2}]^{-1}} = \frac{4\,a^6\,y^2}{3\,b^2\,x^4}.$

64. $\left[\frac{(9\,x^3\,y^{-5})^{-2}}{12\,x\,y^{10}\,(8\,x^{-2}\,y^4)^{-3}} \cdot \frac{3\,x^2\,(4^{-2}\,x^3\,y^{-3})^2}{2^{-3}\,(3\,x^3\,y^{-2})^{-1}}\right]^{-1} = \frac{27\,x^2}{4\,y^4}.$

65. $\frac{(5\,x^{-2}\,y)^3}{3\,(a\,b^{-2})^3} \cdot - \frac{4\,x^2\,(5^{-2}\,x^{-2}\,y^3)^2}{3^{-3}\,(3\,x^3\,y^{-2})^{-1}} = -\frac{3\,b^6\,y^7}{2\,a^3\,x^5}.$

66. $\frac{7\,(3\,x^2)^{-4}}{(3\,y)^{-4}} : \frac{(7\,y)^3}{9\,x^3} = \frac{63\,y}{343\,x^5}.$

67. $\frac{3\,(2\,x^{-2}\,y)^{-4}}{125\,x^{-2}} : \frac{5\,(5\,x\,y^2)^{-3}}{4\,y^{-4}} = \frac{3\,x^{13}}{20\,y^2}.$

68. $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\,x^2\,y^{-m}\right)^2 x\,y^2\,z\right]^3 \cdot \frac{1}{8}\left[3\,x^5\,y^{-2}\,z\,.\,(2\,x^{-3}\,y^2)^3\right]^2\right\} :$

$$\frac{2\,(8\,x^3\,y^{7-3m})^2}{3\,(3\,z^{-2})^3} = 4\,\frac{x}{z}.$$

69. $(2\,x^3\,y^{-4} - 5\,x^{-2}\,y^3)^2 = 4\,x^6\,y^{-8} - 20\,x\,y^{-1} + 25\,x^{-4}\,y^6.$

70. $(5\,x^{-2}\,y^3 - 3\,x^{-4}\,y)^2 = 25\,x^{-4}\,y^6 - 30\,x^{-6}\,y^4 + 9\,x^{-8}\,y^2.$

71. $\left(\frac{2}{3}\,x^{-5}\,y^{-2} - \frac{4}{5}\,x^{-2}\,y^{-3}\right)^2 = \frac{4}{9}\,x^{-10}\,y^{-4} - \frac{16}{15}\,x^{-7}\,y^{-5} + \frac{16}{25}\,x^{-4}\,y^{-6}.$

72. $\left(\frac{x^2}{2} + a^{-1}b - 4a - 1\right)^2 = \frac{x^4}{4} + a^{-2}b^2 + 16a^2 + 1 + a^{-1}bx^2$
$- 4ax^2 - x^2 - 8b - 2a^{-1}b + 8a.$

73. $\left(\frac{2x^{-2}}{3a^{-2}b} - \frac{4a^{-2}b^{-5}}{7x^{-5}}\right)^2 = \frac{4x^{-4}}{9a^{-4}b^2} - \frac{16}{21b^6x^{-3}} + \frac{16x^{10}}{49a^4b^{10}}.$

74. $\sqrt{\frac{16a^{-4}b^{-6}}{25c^{-8}}} = \frac{4c^4}{5a^2b^3}.$

75. $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^{-9}c^{-6}}{27x^6y^{-12}}} = \frac{2ay^4}{3b^3c^2x^2}.$

76. $\sqrt[-3]{\frac{216a^{-6}b^{-3m}}{27c^6d^{-9n}}} = \frac{a^2b^mc^2}{2d^{3n}}.$

77. $\sqrt{xy^5} \cdot \sqrt[m]{x^{-3}y^{-4}} \cdot x\sqrt[m]{x^3y^4} \cdot x^2\sqrt[3]{x^2y^{-m}} = x^4\sqrt[6]{xy^{15-2m}}.$

78. $\sqrt{\sqrt{xy}} \cdot \sqrt[6]{x^3y} \cdot x^2\sqrt{xy^{-3}} \cdot \sqrt[6]{xy^{-3}\sqrt{x^{-9}y^{-3}z^8}} \cdot \sqrt[3]{x^{-2}y^2z} = \frac{x^2z}{y\sqrt[6]{y}}.$

79. $\sqrt[m]{x^{3m+1}y^{-(2m-2)}} \cdot \sqrt[m]{x^{-(1-2m)}y^{m-4}} \cdot \sqrt[m]{x^{4-m}y^{-2}} \cdot$
$\sqrt[m]{x^{-(m-6)}y^3} = \frac{x^3}{y}\sqrt[m]{\frac{x^{10}}{y}}.$

80. $\frac{12}{14}\sqrt[4]{\frac{x^{p-3q}}{y^{-3q}}} \cdot \frac{5}{9x^{-q}}\sqrt{y^{p-2q}} = \frac{10}{21}\sqrt[4]{x^{p+q}y^{2p-q}}.$

81. $\frac{22}{27}\sqrt[2m]{\frac{y^{m+1}}{x^{5+3n}}} \cdot \frac{9}{11}\sqrt[m]{\frac{y^{-1}}{x^{-(1+n)}}} = \frac{2}{3}\sqrt[2m]{x^{-(3+n)}y^{m-1}}.$

82. $x^3y^{-2} : \sqrt{x^{-5}y^{-7}} = x^5y\sqrt{xy}.$

83. $\sqrt{\frac{x^2y^{-1}}{z^{-5}}} : \sqrt{\frac{x^{-1}y^5}{z^3}} = \frac{xz^4}{y^3}\sqrt{x}.$

84. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^{-4}y^{-3}}{z^{-2}}} : \frac{1}{6}\sqrt{\frac{x^3y^{-4}}{z^4}} = 3\frac{z^3}{x^3}\sqrt{\frac{y}{x}}.$

85. $[[(a^{-2})^{-3}]^4]^{-1} \cdot [(2ab^2)^{-3}]^{-4} =$

86. $\frac{(2x^{-2}y)^{-2}}{9a^5b^2} : \frac{(x^{-3}y)^2}{3(2a^3b^4)^2} =$

87. $[2(3ab^{-3})^{-2}]^3 =$

88. $\frac{5a^{-2}b^3}{7x^{-3}y^{-2}} \cdot \frac{12a^{-1}b^{m-2}}{15x^my^{-n}} \cdot \frac{3x^{-(m+3)}y^{-n}}{9ab^{-m}} =$

89. $(5ab^{-2} - 4x^{-m}y)^2 =$

90. $(\frac{1}{2}x^{-2}y^3 - 4ab^{-3})^3 =$

91. $\sqrt{\frac{16\,a^{2m}b^{-4}}{81\,y^{-6n}z^4}} =$

92. $\sqrt[3]{\frac{27\,x^{-9}y^6 z}{64\,a^{-4}b^6}} =$

93. $3\sqrt[2n]{x^{-4}y^2}\,.\,5\sqrt{x^{-3}y}\,.\,\frac{1}{2}\sqrt[2n]{x\,y^{-4}}\,.\,\frac{4}{9}\sqrt[n]{x^{-m}y^{-3}} =$

94. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{x^{2m}}{y^{-4n}}} : \frac{1}{9}\sqrt[4]{\frac{x^{-2m}}{y^{-n}}} =$

95. $\frac{4}{9\,x^{-n}}\sqrt[m]{\frac{y^{n-1}}{z^{n-2}}}\,.\,\frac{3}{4}\sqrt[2m]{\frac{y^{m-1}}{x^{mn+3m}\,y^{-3}}} =$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 146–150; 150–155; Heis §. 39 und 44.

---

*b) Operationen mit gebrochenen Exponenten.*

1. $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = 64.$

2. $81^{1\frac{1}{2}} = 729.$

3. $125^{\frac{2}{3}} = 25.$

4. $x^{\frac{m}{n}}\,.\,x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{x^{mq+np}} = x^{\frac{mq+np}{nq}}.$

5. $x^{-\frac{m}{n}}\,.\,x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\,.\,\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[nq]{x^{mq+np}}} = \frac{1}{x^{\frac{mq+np}{nq}}}.$

6. $x^{-\frac{3}{4}}\,.\,x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{x^{-3}}\,.\,\sqrt{x^{-1}} = \sqrt[4]{x^{-3}}\,.\,\sqrt[4]{x^{-2}} = \sqrt[4]{x^{-5}} = \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$

7. $x^{\frac{-m}{n}}\,.\,x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{x^{np-mq}} = x^{\frac{np-mq}{nq}}.$

8. $x^{\frac{m}{n}} : x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{x^{mq-np}} = x^{\frac{mq-np}{nq}}.$

9. $x^{\frac{-m}{n}} : x^{\frac{-p}{q}} = \sqrt[nq]{x^{np-mq}} = x^{\frac{np-mq}{nq}}.$

10. $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}\,.\,x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{x^{10}y^7}.$

11. $2\,x^{-\frac{4}{9}}y^{\frac{11}{14}}\,.\,10\,x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{3}{7}} = 20\sqrt[126]{x^{28}y^{45}}.$

12. $x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{3}{6}} : x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{3}{5}} = \sqrt[30]{x^{-32} y^{-33}} = \frac{1}{x^{\frac{40}{30}} y^{\frac{33}{30}}}$.

13. $x^{\frac{3}{5}} y^{\frac{4}{8}} : -x^{-\frac{4}{10}} y^{-\frac{1}{4}} z = -\frac{x}{z}\sqrt[4]{y^3}$.

14. $\left(\frac{27\,x^3 y^6}{64\,a^6 y^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{9\,x^2 y^2}{16\,a^4}$.

15. $\left(\frac{y^3 z^6}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{\frac{x^3}{y^6 z^{12}}} = \sqrt{\frac{x}{y^2 z^4}}$.

16. $\left(\frac{49\,x^{-4} y^2}{64\,a^8 b^{-6}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{343\,x^{-6} y^3}{512\,a^{12} b^{-9}} = \frac{343\,b^9 y^3}{512\,a^{12} x^6}$.

17. $\sqrt[3]{\frac{3\,x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}}}{4\,z^{\frac{3}{4}}}}\,\frac{1}{y}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\sqrt[36]{\frac{x^{35}}{y^6 z^9}} = \sqrt[4]{x^3} : z$.

18. $\sqrt[\frac{2}{3}]{64} = 512$.

19. $\sqrt[\frac{2}{3}]{25} = 125$.

20. $\sqrt[\frac{1}{3}]{5} = 125$.

21. $\sqrt[\frac{3}{5}]{27} = 243$.

22. $\sqrt[\frac{2}{3}]{x^{\frac{3}{4}}} = \sqrt[8]{x^9}$.

23. $\sqrt[\frac{5}{4}]{y^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[15]{y^8}$.

24. $(x y - 3\,x^{\frac{2}{3}}) . 2\,x^{\frac{1}{2}} = 2\,x^{\frac{3}{2}}\,y - 6\,x^{\frac{7}{6}} = 2\,y\sqrt{x^3} - 6\sqrt[6]{x^7}$.

25. $(2\,x^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{2}{3}})\,(x^{\frac{1}{3}}\,y^{-\frac{1}{3}} + 3\,x^{-\frac{1}{2}}\,y) = 2\,x^{\frac{5}{6}}\,y^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\,y^{-1}$

$+ 6\,y + 3\,x^{-\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[6]{x^5 y^{-2}} + \sqrt[3]{x\,y^{-3}} + 6\,y + 3\sqrt[6]{x^{-3} y^2}$.

26. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{4}\,x^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{5}\,x\,y^{-\frac{1}{3}}\right) . \left(\frac{2}{3}\,x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\,y^{-\frac{4}{5}}\right) =$

$\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2}\,x - \frac{8}{15}\sqrt[3]{\frac{x^4}{y}} + \frac{\sqrt[3]{x^4}}{4\sqrt[5]{y^4}} + \frac{3}{8}\,\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{y^4}} - \frac{2\,x}{5\sqrt[15]{y^{17}}}$.

27. $(x\,y^3 - y^{-\frac{4}{5}}) : y^{\frac{1}{2}} = x\,y^{\frac{5}{2}} - y^{-\frac{13}{10}} = x\sqrt{y^5} - 1 : \sqrt[10]{y^{13}}$.

28. $(5\,x\,y^{-4} - a\,y^{-\frac{3}{2}}) : x\,y^{-\frac{2}{3}} = 5\,y^{-\frac{10}{3}} - a\,x^{-1}\,y^{-\frac{5}{6}} = \frac{5}{\sqrt[3]{y^{10}}} - \frac{a}{x\sqrt[6]{y^5}}$.

29. $(2x^{\frac{1}{2}} y^{-2} - 5y^{\frac{2}{3}})^2 = 4xy^{-4} - 20x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{4}{3}} + 25y^{\frac{4}{3}}$.

30. $\sqrt{(9x^{\frac{3}{2}} - 42x^{\frac{17}{12}} + 49x^{\frac{4}{3}})} = 3x^{\frac{3}{4}} - 7x^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2}$.

31. $12^{\frac{3}{4}} =$

32. $9^{\frac{4}{5}} =$

33. $a^{-\frac{3}{4}} b \,.\, a^{\frac{1}{2}} =$

34. $a^{-\frac{m}{n}} \,.\, a^{-\frac{x}{y}} =$

35. $a^{-\frac{2}{5}} b^{\frac{4}{7}} : a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{6}{7}} =$

36. $\left(\frac{64x^9y^6}{81a^3b^{12}}\right)^{\frac{4}{3}} =$

37. $\frac{12x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{4}}}{17a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{4}{5}}} \cdot \frac{4y^4}{6b^7} =$

38. $(abc^{-\frac{2}{3}} + ad^{-\frac{1}{4}} - xy^{\frac{2}{3}} + y^{-\frac{4}{5}}) \,.\, a^{-\frac{2}{5}} y^{-\frac{1}{2}} =$

39. $\left(\frac{3}{8}y^{\frac{1}{4}} - \frac{4}{7} - 2\frac{1}{2}y^{-\frac{2}{3}} + 0{,}5y\right)^2 =$

40. $[2 - (3 + 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} =$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 155—159; Heis §. 47.

---

## IX. Reductionen.

1. $\frac{4x}{5} : 4\sqrt{\frac{xy}{8}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2x}{y}}$.

2. $\sqrt[3]{\frac{4x^5}{y^2}\sqrt{\frac{1}{4^2}}} : \sqrt[3]{\frac{8x^5}{y^2}} = \frac{1}{2}$.

3. $\frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$.

4. $\frac{a^2\sqrt{x^2-y^2}}{b^2\sqrt{a^2x - a^2y}} = \frac{a}{b^2}\sqrt{x+y}$.

5. $\frac{x+y}{\frac{1}{4}\sqrt{x^2-y^2}} = 4\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$.

6. $\frac{\sqrt[4]{16x^2 - 25y^2}}{\sqrt[3]{16x^2 - 40xy + 25y^2}} = \sqrt[12]{\frac{(4x+5y)^3}{(4x-5y)^4}}$.

7. $\sqrt[4]{\frac{16x^4y^5 - 32x^5y^4}{81z^3 - 81z^4}} = \frac{2}{3}xyz^{-1}\sqrt[4]{y - 2x : z^{-1} - 1}$.

8. $\left\{\frac{64}{729}\left[\left(3a^2b^xc^{-2}\right)^2 . \frac{3}{4}a^{-3}b^2c^{-2}\right]^3 \left[\left(\frac{4}{5}a^3b^{-x}\right)^2 a^2bc^3\right]^3\right\} :$

$\left(\frac{16a^9b^3}{25c^4}\right)^3 = 27c^3$.

9. $\frac{3x^2}{7y}\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{3d^4}} . \frac{7y}{8x^2}\sqrt{\frac{d}{a-b}} = \frac{3}{8}\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{9d^5(a-b)}}$.

10. $$\sqrt[3]{\left(\frac{2x^7y^2 - \frac{x^3}{2}}{(2y^2+3y+\frac{3}{2}+\frac{1}{4y})\,2x}\right)\left(\frac{(2y+1)^3 . x^2\sqrt[3]{x^5\sqrt{x^2}}}{4x^9y^3 - x^5y}\right)} = \sqrt[3]{x}.$$

11. $$\sqrt[3]{\left[\left(xy^2+y^3-\frac{x^3y^3-z}{x^2y}\right):1+\frac{z}{x^2y^4}\right]} = y.$$

12. $$\frac{xy\sqrt{z}}{\sqrt{x}-\sqrt{z}} + xy = \frac{xy\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{z}}.$$

13. $$\left(x^2y+xy^2-\frac{x^3y^2\sqrt{x^2y^6}-a}{xy^2\sqrt{(xy^2)^2}}\right):x\sqrt{y^4}+\frac{a}{x^2y(\sqrt{y^2})^3}=1.$$

14. $$\sqrt{x^4y^2\sqrt[5]{x^{-3}y\sqrt[-2]{x^4y^2}}} = y\sqrt{x^3} = xy\sqrt{x}.$$

15. $$\sqrt{xy^3\sqrt[-5]{xy^{-3}\sqrt{x^{-1}y\sqrt[3]{x^2y^5}}}} = \sqrt[12]{x^{-7}y^{20}}.$$

16. $$\sqrt[5]{x^2\sqrt{x^4}} - 5\sqrt{x\sqrt[5]{x^3}} - 7\sqrt[5]{x^5\sqrt{x^{-2}}} + \sqrt{81x^3\sqrt[5]{x^{-7}}}$$
$$+ 3\sqrt[5]{x^3\sqrt{x^2}} = \sqrt[5]{x^4}.$$

17. $$2\sqrt[3]{x^3\sqrt[5]{x^{-3}}} - 6\sqrt[5]{x^6\sqrt[3]{x^{-6}}} + 12\sqrt[-3]{x^{-4}\sqrt[5]{x^8}}$$
$$- 7x\sqrt[-5]{x^2\sqrt[3]{x^{-3}}} + 2\sqrt[5]{x^4} = 3\sqrt[5]{x^4}.$$

18. $$\left(\frac{x^{2-\frac{m}{3}}y^{-4}}{5y^{m-2}\sqrt[6]{x^3y^2}}\right)^3 . \left(\frac{x^{3-\frac{m}{2}}y^{-3}}{10\sqrt{y^{3m-6}}}\right)^{-2} . \left(5y^5\sqrt{\frac{y^6}{x^{-3}}}\right) = 4y.$$

19. $$4\left[\left(\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b^2c}}\right)^2\right]^5 - \left(b\sqrt[5]{b^{-3}\sqrt[3]{b^2c}}\right)^5 - \left(5b\sqrt[3]{b\sqrt[6]{c^3}}\right)^2$$
$$+ \left(2\sqrt[3]{b\sqrt[5]{b^3c}}\right)^5 = 10b^2\sqrt[3]{b^2c}.$$

20. $$\frac{12x^2y^{-4}[(\sqrt[7]{y})^{-3}]^{-4}}{y^{-1}\left(\sqrt[7]{x^3y^{-5}\sqrt{x^6y^{-1}}}\right)^2} : \frac{18[(\sqrt[7]{x^{-3}y})^3]^{-2}}{3y^{-2}\sqrt[7]{x^{12}y^6\sqrt{x^4y^2}}\,.\sqrt[3]{y^{-1}\sqrt[7]{x^3y^4}}} =$$
$$2\sqrt[7]{x^3y^2}.$$

21. $$\left(3\sqrt[7]{a\sqrt[3]{b^2}}\right)^3 - \frac{5a^2b^{-4}\left[\left(\sqrt[7]{b}\right)^{-3}\right]^{-4}}{b^{-1}\left(\sqrt[7]{a^3b^{-5}\sqrt{a^5b^{-1}}}\right)^3} - \frac{\left(2\sqrt[7]{a^5b^3}\right)^3}{2ab\sqrt[7]{a^5}}$$
$$+ \frac{9\left[\left(\sqrt[7]{a^{-3}b}\right)^3\right]^{-2}}{\sqrt[3]{b^{-1}\sqrt[7]{a^9b^{-2}}\,.\,3b^{-2}\sqrt[7]{a^{10}b^8\sqrt{a^4b^2}}}} = 3\sqrt[7]{a^3b^2}.$$

22. $$\frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}} - \frac{1}{\sqrt{a-2}} =$$

23. $$\sqrt{x-y} + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-y^2)(x-y)}} - \frac{x^2y-xy^2}{\sqrt{(x-y)^5}} - \frac{x}{\sqrt{x-y}} =$$

24. $$\frac{a^2+3ab}{(a-b)^2}\,.\,\sqrt[3]{a^3-6a^2b+9ab^2}\,.\,\frac{a^3-ab^2}{a^2b-9b^3}\,.\,a^{-2}b\sqrt[3]{a(a-3b)} =$$

25. $$2x - y\sqrt[-r]{x^{r+3}y} + \sqrt[r]{\left(xy^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}} + x^2y^{-1}\sqrt[r]{x^{-(3r+3)}y^{-(1-2r)}}$$
$$+ (xy)^{-1}\sqrt[r]{x^{-(3-r)}y^{-(1-r)}} =$$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 1—21.

---

# III. Logarithmen.

## §. 111.

**Erklärung 1.** Dignand und Exponent lassen sich in einer Potenz nicht vertauschen (§. 66, 4). Desshalb hat das Potenziren zwei entgegengesetzte Operationen: das Radiciren und Logarithmiren. Durch Radiciren wird aus dem gegebenen Potenzwerthe (Radicanden) und aus dem gleichfalls gegebenen Exponenten (Radicator) der Wurzelwerth bestimmt (radix, Dignand). cf. §. 79, 5.

Durch Logarithmiren wird aus dem Potenzwerthe und dem gleichfalls gegebenen Wurzelwerthe (Wurzel, Dignand) der Exponent bestimmt.

Der Logarithmus (*τῶν λόγων ἀριθμός* Verhältnisszahl) ist demnach der gesuchte Exponent einer Potenz.

Logarithmiren heisst also aus einer entwickelten Potenz

für den Dignanden der entsprechenden formellen Potenz den Exponenten suchen.

Die entwickelte Potenz, welche logarithmirt werden soll, heisst Logarithmand oder numerus, der Dignand heisst Grundzahl oder Basis und der gesuchte Exponent Logarithmus.

**Erklärung 2.** Es sei der numerus A und die Basis b, so ist der allgemeine Ausdruck eines Logarithmus

$$^{b}\log A,$$

sprich: b-Logarithmus von A. Da aber der Logarithmus einer Zahl für eine Zahl als Basis wieder eine Zahl gibt, die wir allgemein mit m bezeichnen wollen, so ist:

$$^{b}\log A = m.$$

Ist aber $^{b}\log A = m$, so ist auch:

$$\text{I. } b^{m} = A$$

nach §. 66 und §. 111, 1; und

$$\text{II. } \sqrt[m]{A} = b$$

nach §. 79.

Setzt man in beide Gleichungen für m den Ausdruck $^{b}\log A$, so ergeben sich folgende Sätze:

**Satz 1.** Die Basis potenzirt mit dem Logarithmus, gibt den numerus:

$$b^{^{b}\log A} = A.$$

**Satz 2.** Der numerus radicirt durch den Logarithmus, gibt die Basis:

$$\sqrt[^{b}\log A]{A} = b.$$

**Zusatz 1.** Der Logarithmus ist diejenige Zahl, mit der man die Basis potenzirt, den numerus erhält und durch die der numerus (Logarithmand) radicirt, die Basis gibt.

**Zusatz 2.** Die Logarithmen gleicher numeri für gleiche Basen sind einander gleich.

Es sei

$$A = B,$$

so ist:

$$^{b}\log A = {}^{b}\log B.$$

Anmerkung 1. Wo die Basis als bekannt vorausgesetzt wird, bleibt sie weg; man schreibt statt $^{b}\log A$ und $^{b}\log B$ nur $\log A$ und $\log B$.

Anmerkung 2. Unter der Voraussetzung, dass wir es nur mit Logarithmen von gleichen Basen zu thun haben, ergeben sich noch folgende Sätze.

## §. 112.

## Fundamentalsätze.

1. Der Logarithmus von 1 ist gleich Null:

$$^{b}\log 1 = 0;$$

denn es ist $b^0 = 1$, folglich $^{b}\log 1 = 0$.

2. Der Logarithmus der Basis ist gleich 1:

$$^{b}\log b = 1;$$

denn es ist $b^1 = b$, folglich $^{b}\log b = 1$. cf. §. 66, Erkl. 3.

3. Der Logarithmus von Null ist negativ unendlich:

$$^{b}\log 0 = -\infty;$$

denn es ist $b^{-\infty} = 1 : b^{\infty}$, folglich $^{b}\log 0 = -\infty$. cf. §. 62.

4. Der Logarithmus von unendlich ist positiv unendlich:

$$^{b}\log \infty = \infty;$$

denn es ist $b^{\infty} = \infty$, folglich $^{b}\log \infty = \infty$.

## §. 113.

## Lehrsätze.

1. Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summa der Logarithmen der einzelnen Factoren:

$$\log(A \,.\, B) = \log A + \log B.$$

**Beweis.**

Es sei:

$$^{b}\log A = m \text{ und } ^{b}\log B = n,$$

so ist:

$$A = b^m \text{ und } B = b^n, \text{ cf. §. 111;}$$

folglich:

$$A \,.\, B = b^m \,.\, b^n = b^{m+n} \quad \text{cf. §. 69,}$$

und

$$\log(A \,.\, B) = m + n$$
$$= \log A + \log B.$$

2. Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus dem Logarithmus des Dividenden und dem Logarithmus des Divisors:

$$\log(A : B) = \log A - \log B.$$

**Beweis.**

Es sei:

$$\log A = m \text{ und } \log B = n,$$

so ist:

$$A = b^m \text{ und } B = b^n,$$

folglich:

$$A : B = b^m : b^n = b^{m-n} \quad \text{cf. §. 70},$$

und

$$\log(A : B) = m - n$$
$$= \log A - \log B.$$

**Zusatz.** Der Logarithmus eines ächten Bruches ist negativ.

Anmerkung. $\log(A : B) = \log \frac{A}{B}$; letzteres ist aber nicht zu verwechseln mit $\frac{\log A}{B}$.

3. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus ihres Dignanden multiplicirt mit dem Exponenten:

$$\log A^x = x \log A.$$

**Beweis.**

Es sei:

$$\log A = m,$$

so ist:

$$A = b^m;$$

folglich:

$$A^x = (b^m)^x = b^{m\,x} \quad \text{cf. §. 73},$$

und

$$\log A^x = x \,.\, m = x \log A.$$

**Zusatz.** Dieser Lehrsatz gilt auch für einen negativen Exponenten:

$$\log A^{-x} = -x \log A.$$

**Beweis.**

Es sei:

$$\log A^{-x} = \log \frac{1}{A^x} = \log 1 - \log A^x.$$
$$= 0 - \log A^x \quad \text{cf. 112, 1},$$
$$= -x \log A \quad \text{cf. vorig. Satz.}$$

4. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radicanden dividirt durch den Wurzelexponenten:

$$\log \sqrt[x]{A} = \frac{\log A}{x}.$$

**Beweis.**

Es sei:

$$\log A = m,$$

so ist:

$$A = b^m;$$

folglich:

$$\sqrt[x]{A} = \sqrt[x]{b^m} = b^{\frac{m}{x}} \quad \text{cf. §. 80 u. 83,}$$

und

$$\log \sqrt[x]{A} = \frac{m}{x} = \frac{\log A}{x}.$$

## §. 114.

**Erklärung 1.** Die vorstehenden Lehrsätze umfassen die Theorie der Logarithmen. Durch ihre Anwendung verwandelt sich die Multiplication in Addition, die Division in Subtraction, die Potenzirung in Multiplication und die Radicirung in Division.

Für die Addition und Subtraction können die Logarithmen nicht angewandt werden. Kommen in einem Ausdrucke, dessen Zahlenwerth mittelst Logarithmen bestimmt werden soll, gleichwohl Summen und Differenzen vor, so hat man bei diesen Gliedern die numeri zu suchen, um addiren oder subtrahiren zu können. Von der entwickelten Summa oder Differenz kommt dann wieder der Logarithmus in Rechnung.

**Erklärung 2.** Wenn man in einem gegebenen Ausdrucke von der Verbindung von Zahlen auf die Verbindung ihrer Logarithmen übergeht, so heisst das Logarithmiren im engern Sinne; von der Verbindung der Logarithmen auf die Verbindung ihrer Zahlen übergehen, heisst Delogarithmiren.

## §. 115.

### Beispiele zur Einübung der vorstehenden Lehrsätze.

I.

1. $\log (a\,b\,c) = \log a + \log b + \log c.$
2. $\log \frac{a\,d}{c} = \log a + \log d - \log c.$
3. $\log (a^x\,b^y) = x \log a + y \log b.$

4. $\log \frac{a^x b^y}{c^2 d^3} = x \log a + y \log b - (2 \log c + 3 \log d).$

5. $\log a^x b^{-3} c^{-2} = x \log a - 3 \log b - 2 \log c.$

6. $\log \sqrt[5]{a^4 b^2 c^3} = \frac{4}{5} \log a + \frac{2}{5} \log b + \frac{3}{5} \log c.$

7. $\log b^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{3}{5}} d^{-4} = \frac{1}{2} \log b - \frac{3}{5} \log c - 4 \log d.$

8. $\log \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt[5]{a^m b^n}} = \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y - \left(\frac{m}{5} \log a + \frac{n}{5} \log b\right).$

9. $\log \sqrt[3]{\frac{x^2 y^3 z^{-\frac{1}{2}}}{a^m b^n c}} = \frac{2}{3} \log x + \log y - \frac{1}{6} \log z - \left(\frac{m}{3} \log a\right.$

$\left. + \frac{n}{3} \log b + \frac{1}{3} \log c\right).$

II.

10. $x \log a - 3 \log b - 2 \log c = \log \frac{a^x}{b^3 c^2} = \log a^x b^{-3} c^{-2}.$

11. $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{x}{3} \log a - \frac{4}{3} \log b = \log \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{a^x b^4}}.$

12. $\log (x + y) + \log (x - y) = \log [(x + y)(x - y)] = \log (x^2 - y^2).$

13. $-\frac{1}{m} \log (x + y) - \frac{1}{m} \log (x - y) = \frac{1}{\sqrt[m]{x^2 - y^2}}.$

## §. 116.

**Erklärung 1.** Berechnet man für irgend eine Basis die Logarithmen aller andern Zahlen von 1 bis zu einer bestimmten Grenze, so bekommt man ein logarithmisches System. Es sind unendlich viele logarithmische Systeme möglich, weil man jede reelle positive Zahl, die grösser als 1 ist, zur Basis nehmen kann. Eins kann man nicht als Basis gebrauchen, weil 1 auf jede mögliche Potenz erhoben, immer wieder 1 gibt.

**Erklärung 2.** Unter den verschiedenen logarithmischen Systemen befinden sich zwei im Gebrauche: das gemeine und das natürliche. Das gemeine Logarithmen-System, von dem Engländer Heinrich Brigg mit der Basis 10 aufgestellt (1618), ist das gebräuchlichste. Das na-

türliche (Neper) mit der Irrationalzahl 2,7182818 als Basis (allg. e) findet in der Analysis häufig Anwendung.

Anmerkung. Die Bezeichnung für den natürlichen Logarithmus ist log nat.; für den gemeinen eigentlich log vulg.

## §. 117.

**Erklärung 1.** Da das Brigg'sche System zur Basis 10 hat, so ist:

$10^4 = 10000$; folglich log $10000 = 4$,
$10^3 = 1000$; „ „ $1000 = 3$,
$10^2 = 100$; „ „ $100 = 2$,
$10^1 = 10$; „ „ $10 = 1$,
$10^0 = 1$; „ „ $1 = 0$,
$10^{-1} = 0{,}1$; „ „ $0{,}1 = -1$,
$10^{-2} = 0{,}01$; „ „ $0{,}01 = -2$,
$10^{-3} = 0{,}001$; „ „ $0{,}001 = -3$,
$10^{-4} = 0{,}0001$; „ „ $0{,}0001 = -4$.

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass:

1) der Potenzexponent = dem Logarithmus ist;

2) alle ganzen Zahlen ($> 1$) positive Logarithmen und alle ächten Brüche ($< 1$) negative Logarithmen haben.

**Erklärung 2.** Auch für die Zahlen zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100, zwischen 100 und 1000, zwischen 1000 und 10000 sind die Logarithmen gesucht. Da aber diese Zahlen keine Potenzen aus 10 sind, so sind ihre Logarithmen irrationale Zahlen und bestehen aus zwei Theilen: aus Ganzen und einem Bruche der in der Form eines unendlichen nicht periodischen Decimalbruches dargestellt wird. Die Ganzen heissen Kennziffer oder Charakteristik, die Decimalstellen Zugabe oder Mantisse.

## §. 118.

**Erklärung 1.** Die Ganzen eines Logarithmus heissen darum Charakteristik oder Kennziffer, weil man an ihr sofort die Ziffer-Anzahl und den Ziffer-Werth der numeri erkennt; denn die Logarithmen für alle einzifferigen Zahlen (num.) liegen zwischen 0 und 1 und haben 0Ganze, die Logarithmen für alle zweizifferigen Zahlen (num.) liegen zwischen 1 und 2 mit 1Ganzen, die Logarithmen für alle dreizifferigen Zahlen (num.) liegen zwischen 2 und 3 mit 2Ganzen, für alle vierzifferigen numeri zwischen 3 und 4 mit 3Ganzen u. s. w.

**Zusatz 1.** Die Charakteristik eines nzifferigen numerus ist gleich n — 1.

**Zusatz 2.** Ein Logarithmus mit der Charakteristik n ist gleich einem numerus mit n + 1 Ziffern.

**Erklärung 2.** Die beiden vorstehenden Sätze haben nur Geltung, wenn der numerus eine ganze Zahl ist. Wird der Werth eines numerus durch Setzung eines Decimalkomma's (i. e. durch Division mit 10 oder einer Potenz von 10) verändert, so ändert sich auch die Charakteristik; die Mantisse dagegen bleibt dieselbe. Z. B.:

1. log 7561 = 3,8785792.
2. log 75610 = log (7561 × 10) = log 7561 + log 10 cf. §. 113, 1,
   = 3,8785792 + 1 = 4,8785792.
3. log 756100 = log (7561 × 100) = log 7561 + log 100,
   = 3,8785792 + 2 = 5,8785792.
4. log 756,1 = log (7561 : 10) = log 7561 — log 10 cf. §. 113, 2.
   = 3,8785792 — 1 = 2,8785792.
5. log 75,61 = log (7561 : 100) = log 7561 — log 100,
   = 3,8785792 — 2 = 1,8785792.
6. log 7,561 = log (7561 : 1000) = log 7561 — log 1000,
   = 3,8785792 — 3 = 0,8785792.
7. log 0,7561 = log (7561 : 10000) = log 7561 — log 10000,
   = 3,8785792 — 4 = 0,8785792 — 1.
8. log 0,07561 = log (7561 : 100000) = log 7561 — log 100000,
   = 3,8785792 — 5 = 0,8785792 — 2.
9. log 0,007561 = log (7561 : 1000000) = log 7561 — log 1000000,
   = 3,8785792 — 6 = 0,8785792 — 3.

**Zusatz 1.** Numeri mit den nämlichen Ziffern haben die nämliche Mantisse.

**Zusatz 2.** Die Charakteristik hat immer eine Einheit weniger als der numerus Ziffern vor dem Komma hat.

**Zusatz 3.** Die Charakteristik kann positiv, negativ und Null sein, cf. 1—5; 7—9; 6.

**Zusatz 4.** Ist die Charakteristik positiv, so enthält der entsprechende numerus Ganze; ist die Charakteristik negativ, so ist der entsprechende numerus ein ächter Decimalbruch, der so viel Nullen vor den geltenden Ziffern hat, als die Charakteristik Einheiten enthält.

**Zusatz 5.** Die negative Charakteristik wird der positiven Mantisse nachgesetzt.

**Zusatz 6.** Der Logarithmus einer Zahl bleibt unverändert, wenn man Einer zur Charakteristik addirt und dieselben nach der Mantisse wieder negativ setzt. Z. B.:

$$\log 0{,}5340 = 0{,}7275413 - 1 = 1{,}7275413 - 2$$
$$= 2{,}7275413 - 3 = 3{,}7275413 - 4$$
$$= 4{,}7275413 - 5 = 7{,}7275413 - 8.$$

Anmerkung. Davon macht man Gebrauch:

a) bei der Subtraction so oft der Subtrahend grösser ist als der Minuend;

b) bei der Division so oft die negative Charakteristik nicht theilbar ist durch den Divisor. Z. B.:

$$(0{,}7275413 - 2) : 3 = (1{,}7275413 - 3) : 3 = 0{,}5758471 - 1.$$

## §. 119.

**Erklärung 1.** Wie zu Zahlen, die in den Logarithmentafeln stehen, die Logarithmen und zu Logarithmen, die genau in den Tafeln sich finden, die numeri gefunden werden, das geht aus der Einrichtung der Logarithmentafeln* hervor, die in der Einleitung derselben ihre Erklärung findet.

**Erklärung 2.** Sind für Zahlen, welche die Grenze der Tafeln überschreiten, die Logarithmen zu bestimmen oder für Logarithmen, die sich nicht in den Tafeln finden, die numeri zu bestimmen, so hat man sich der Proportionaltheile (partes proportionales) zu bedienen.

**Erklärung 3.** Aus der Vergleichung der Logarithmen von drei auf einander folgenden Zahlen geht hervor, dass die Differenzen der Logarithmen immer kleiner werden, je grösser die den Logarithmen entsprechenden Zahlen sind oder je geringer die Differenz der Zahlen unter sich ist. Z. B.:

1.
$$\left.\begin{array}{l}\log 1184 = 3{,}0733517 \\ \log 1185 = 3{,}0737184\end{array}\right\}\ \text{Diff.} = 0{,}0003667.$$
$$\left.\begin{array}{l}\log 1185 = 3{,}0737184 \\ \log 1186 = 3{,}0740847\end{array}\right\}\ \text{Diff.} = 0{,}0003663.$$

2.
$$\left.\begin{array}{l}\log 1184 = 3{,}0733517 \\ \log 1184{,}5 = 3{,}0735351\end{array}\right\}\ \text{Diff.} = 0.0001834.$$
$$\left.\begin{array}{l}\log 1184{,}5 = 3{,}0735351 \\ \log 1185 = 3{,}0737184\end{array}\right\}\ \text{Diff.} = 0{,}0001833.$$

---

* Von Vega, herausgegeben von Dr. J. A. Hülsse, eine neue Bearbeitung von Dr. C. Bremiker, Berlin Weidmann; Jerome de la Caude herausgegeben von Dr. Köhler, Verlag bei Tauchnitz; Winkler, Westphal, Schmidt.

**Zusatz.** Sind die Differenzen der Zahlen im Vergleiche zu ihrer Grösse unbedeutend, so verhalten sie sich zu einander, wie die Differenzen ihrer Logarithmen:

$$(1185 - 1184) : (1184{,}5 - 1184) = (\log 1185 - \log 1184) : (\log 1184{,}5 - \log 1184)$$
$$1 \quad : \quad 0{,}5 \quad = 0{,}0003667 \quad : 0{,}0001834.$$

Anmerkung 1. Auf diesem Satze beruht die Berechnung und Anwendung der Proportionaltheile.

**Aufgabe 1.** Es sei der Log. zu bestimmen für numerus 2435389.

**Auflösung.** Die Charakteristik ist 6; um die Mantisse zu finden, schneidet man durch ein Komma so viel Ziffern ab als in den Tafeln noch zu finden, wodurch an der zu suchenden Mantisse nichts geändert wird (cf. §. 118, 3), das gibt: 24353,89. (Taf. v. Vega).

Da aber

$$\log 24353{,}89 > \log 24353 \quad (\text{Diff. } 0{,}89),$$

und

$$\log 24353{,}89 < \log 24354,$$

so ist:

$$\text{I. } \log 24353{,}89 = \log 24353 + x$$

und

$$\text{II. } x = \log 24353{,}89 - \log 24353.$$

Demnach:

$$(24354 - 24353) : (24353{,}89 - 24353) = (\log 24354 - \log 24353) : (\log 24353{,}89 - \log 24353),$$
$$1 \quad : \quad 0{,}89 \quad = 0{,}0000178 : x \quad \text{cf. II. Gleichung};$$
$$x = 0{,}0000178 \,.\, 0{,}89 = 0{,}0000158;$$

und nach Gleichung I:

$$\log 24353{,}89 = 4{,}3865525 + 0{,}0000158 = 4{,}3865683,$$

folglich

$$\log 2435389 = 6{,}3865683 \quad \text{cf. §. 118, Beisp. u. Zusatz 3.}$$

**Aufgabe 2.** Es sei der num. für einen Logarithmus zu suchen, dessen Mantisse nicht genau in den Tafeln steht, etwa für 3,8765432.

**Auflösung.**

| | | |
|---|---|---|
| Der nächst grössere | log = 3,8765469 | . . . hiezu num. 75257. |
| | | Diff. = 58. |
| Der nächst kleinere | log = 3,8765411 | . . . hiezu num. 75256. |
| | | Diff. = 21. |
| Der gegebene | log = 3,8765432 | . . . hiezu num. 75256 + x. |

Demnach:

$$58 : 21 = 100 : x$$

$$x = \frac{2100}{58} = 36, \ldots$$

und num. für

$$3{,}8765432 = 7525{,}6 + 36 = 7525{,}636.$$

Anmerkung. Die hier angeführten Proportionen sind jedoch unnöthig, wenn die part. proport. in den Tabellen beigefügt sind.

## §. 120.

## Beispiele mit Benützung der part. prop. in den Tabellen.

1.

log 25,43287 = ?
i. e. log 25,432 . . = 1,4053805
p. p. für 8 = 137
„ „ „ 7 = 12,

log 25,43287 = 1,4053954.

2.

log 542,32389 = ?
i. e log 542,32 . . . = 2,7342556
p. p. für 3 = 24
„ „ „ 8 = $6{,}4(\frac{1}{10})$
„ „ „ 9 = $0{,}72(\frac{1}{100})$

log 542,32389 = 2,7342587.

3.

num. log 0,5046719 = ?
i. e. nächst kl. log = 0,5046611 hiezu num. = 3,1964
p. p. für Diff. = 108 . . . . . = 8

num. log. 0,5046719 = 3,19648.

4.

num. log − 2,4325687 = ?
i. e. + 3,0000000 − 3
− 2,4325687

0,5674313 − 3;
nächst kl. log = 0,5674263 − 3 hiezu num. = 0,0036934
p. p. für Diff. 50 . . . . . . = 4
47

3
„ „ „ „ 3 . . . . . . = 0
„ „ „ „ 30 . . . . . . = 2

num. log − 2,4325687 = 0,0036934402.

## §. 121.

**Erklärung 1.** Bei den Operationen mit Logarithmen bedient man sich oft der dekadischen Ergänzung (arithmetisches Complement) mit Vortheil.

Unter arithmetischem oder dekadischem Complement versteht man die Differenz zwischen einer gegebenen Zahl und der nächst höhern dekadischen Einheit. Zur Zahl 6 ist das dekadische Complement 4 und zu 4 ist das dekadische Complement 6, denn $6 + 4$ und $4 + 6 = 10$; ferner $39 + 61$ und $61 + 39 = 100$. Allgemein:

$$\text{I. } a + b = 10^n,$$

folglich

$$\text{II. } a = 10^n - b \text{ und } b = 10^n - a.$$

**Zusatz.** Durch Anwendung des dekadischen Complements verwandelt sich die Subtraction der Logarithmen in Addition.

Es sei als Minuend der Logarithmus m und als Subtrahend der Logarithmus a gegeben, so ist:

$$\begin{aligned} m - a &= m - (10^n - b) \text{ per subst. aus II.} \\ &= (m + b) - 10^n. \end{aligned}$$

$$19 - 6 = 19 + 4 - 10 = 13; \; 212 - 39 = 212 + 61 - 100 = 173.$$

**Erklärung 2.** Das dekadische Complement für einen Logarithmus erhält man, wenn man mit der Charakteristik beginnend jede Ziffer des Logarithmus von 9 und die letzte geltende Ziffer von 10 abzieht. Z. B.:

dec. Compl. log. 39 = 8,4089354; dec. C. log 296=7,5287083.

Negative Logarithmen werden bei der Subtraction positiv, bedürfen desshalb keines dekadischen Complements. Z. B.:

$$\begin{aligned} -\log 0{,}15 &= -0{,}1760913 - 1 = 0{,}8239087; \\ -\log 0{,}0054 &= -0{,}7323938 - 3 = 2{,}2676062. \end{aligned}$$

## §. 122.

### Beispiele.

1.

$$x = \frac{1035}{23}; \text{ so ist:}$$

$$\begin{aligned} \log x = \log 1035 &= 3{,}0149403. \\ = \text{dec. C. } \log 23 &= 8{,}6382722 - 10 \\ \hline &= 11{,}6532125 - 10 = 1{,}6532125, \end{aligned}$$

also $x = 45$.

Anmerkung. Die dekadische Einheit braucht man rechts nicht beizusetzen; wenn man nur von der Charakteristik so viele Zehner subtrahirt als dekadische Complemente addirt wurden.

2.

$$x = \frac{2,988}{0,15 \,.\, 2,49}, \text{ so ist:}$$

$$\begin{aligned} \log x &= \log 2,988 &&= 0,4753806 \\ &= -\log 0,15 &&= 0,8239087 \\ &= \text{dek. C.} \log 2,49 &&= 9,6038007 \\ & &&= 0,9030900 \end{aligned}$$

also $x = 8$.

3.

$$x = \frac{148 \,.\, 0,15}{10 \,.\, 1,11}, \text{ so ist:}$$

$$\begin{aligned} \log x &= \log 148 &&= 2,1702617 \\ &= + \log 0,15 &&= 0,1760913 - 1 \\ &= \text{dek. C.} \log 10 &&= 9,0000000 \\ &= \text{„ „} \log 1,11 &&= 9,9546770 \\ & &&= 1,3010300 - 1 = 0,3010300, \end{aligned}$$

also $x = 2$.

## §. 123.

**Erklärung 1.** Sind die Logarithmen eines logarithmischen Systems für einen bestimmten Zahlenraum berechnet, so lassen sich daraus die Logarithmen eines andern Systems leicht bestimmen, wie aus dem nachfolgenden Lehrsatze zu entnehmen ist.

**Lehrsatz.** Aus der Division des Logarithmus einer Zahl durch den Logarithmus der Basis eines andern Systems ergibt sich der Logarithmus dieser Zahl nach dem neuen Systeme:

$$^{k}\log A = \frac{^{b}\log A}{^{b}\log k}.$$

### Beweis.

Wenn b die Basis des berechneten Systems und k die Basis des andern ist, so ist:

$$^{b}\log A = m \text{ und } ^{k}\log A = x;$$

folglich $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ cf. §. 111, Erkl. 2.

$$b^m = A \text{ und } k^x \quad = A$$

und:

$$b^m = k^x;$$

ferner:

$$x\,{}^b\!\log k = m\,{}^b\!\log b \quad \text{cf. §. 111 Zusatz 2.}$$

daher:

$$x = \frac{m\,{}^b\!\log b}{{}^b\!\log k} = \frac{m\,.\,1}{{}^b\!\log k} \quad \text{cf. §. 112, 2;}$$

also:

$${}^k\!\log A = \frac{1}{{}^b\!\log k}\,.\,{}^b\!\log A, \text{ p. subst. der Werthe von x und m.}$$

$$= \frac{{}^b\!\log A}{{}^b\!\log k}.$$

**Erklärung 2.** Der Factor $\frac{1}{{}^b\!\log k}$ heisst in Rücksicht auf das ursprüngliche System der Modulus des neuen Systems, allgemein M:

$$M = \frac{1}{{}^b\!\log k} = \frac{1}{\log \text{vulg. } k} = \frac{1}{\log k}.$$

Sollen aus den briggischen (log vulg.) Logarithmen die Logarithmen für ein System mit der Basis 4 bestimmt werden, so ist:

$$M = \frac{1}{\log 4} = \frac{1}{0{,}6020600} = 1{,}6609631\ldots$$

Z. B.:

$${}^4\!\log 64 = M \times \log 64$$

$$= 1{,}6609631\ldots \times 1{,}8061800$$

$$= 2{,}9999983\ldots$$

## §. 124.

### Schlussbemerkung für den zweiten Abschnitt.

Potenzen sind directe Zahlenverbindungen der dritten Stufe; Wurzeln und Logarithmen sind die zwei indirecten Zahlenverbindungen dieser dritten Stufe.

## §. 125.

### Beispiele und Aufgaben.

I. Logarithmen von allgem. Ausdrücken.

1. ${}^k\!\log 1 = 0.$
2. ${}^k\!\log k = 1.$
3. ${}^k\!\log k^5 = 5.$
4. ${}^k\!\log k^{-2} = -2.$
5. ${}^k\!\log k^{-\frac{2}{5}} = -\frac{2}{5}.$
6. ${}^k\!\log k^{-\frac{x}{y}} = -\frac{x}{y}.$
7. ${}^3\!\log 81^{\frac{m}{n}} = \frac{4m}{n}.$
8. $\log \frac{ab}{c} = \log a + \log b - \log c.$

9. $\log \frac{a^5 c^2}{b^4} = 5 \log a + 2 \log c - 4 \log b.$

10. $\log k^{-3} h^{-2} m^3 = 3 \log m - 3 \log k - 2 \log h.$

11. $\log \sqrt[7]{a^5} = \frac{5}{7} \log a.$

12. $\log b^{\frac{2}{3}} c^4 = \frac{2}{3} \log b + 4 \log c.$

13. $\log a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{8}} = \frac{1}{2} \log a - \frac{3}{8} \log b.$

14. $\log \sqrt{a \sqrt[4]{c}} = \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{8} \log c.$

15. $\log \sqrt[x]{k \sqrt[x]{h \sqrt[x]{p}}} = \frac{1}{x} \log k + \frac{1}{x^2} \log h + \frac{1}{x^3} \log p.$

16. $\log \left( \frac{a^3 \sqrt[5]{b^4}}{c^3 \sqrt[3]{d^2 x^4}} \right) = 3 \log a + \frac{4}{5} \log b - (3 \log c + \frac{2}{3} \log d + \frac{4}{3} \log x).$

17. $\log (x^2 - y^2) = \log (x + y) + \log (x - y).$

18. $\log \frac{a^2 - b^2}{a b + b c} = \log (a + b) + \log (a - b) - [\log (a + c) + \log b].$

19. $\log (\log x^3) = \log (3 \log x).$

20. $\log \frac{5 (a - b)}{\sqrt[3]{x^2 - y^2}} = \log 5 + \log (a - b) - [\frac{1}{3} \log (x + y) + \frac{1}{3} \log (x - y)].$

21. $5 \log a + 2 \log b = \log a^5 b^2.$

22. $\frac{2}{3} \log b - \frac{4}{5} \log c = \log \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[5]{c^4}}.$

23. $\log \sqrt[3]{a \sqrt{b^2}} =$

24. $\log \frac{1}{x^2 \sqrt[3]{y^{\frac{2}{3}}}} =$

25. $\log \frac{(x + y)^3 b^2}{(a - b)^m \sqrt{c^n}} =$

26. $\log \left( a \sqrt[3]{\frac{(a^2 \sqrt[4]{b^3})^5}{b^3 \sqrt[3]{a^2}}} \right)^3 =$

## II. Logarithmen für numeri.

1. $\log 2583 = 3,4121244$.
2. $\log 258300 = 5,4121244$.
3. $\log 25,83 =$
4. $\log 0,25882 = 0,4129978 - 1$.
5. $\log 0,0000843 = 0,9258276 - 5 = 5,9258276 - 10$.
6. $\log 0,39393 = 0,5954191 - 1$.
7. $\log 234569 = 5,3702707$.
8. $\log 5482,798 = 3,7390022$.
9. $\log 52765,439 = 4,7223495$.
10. $\log 52,12 = 1,7170044$.
11. $\log \text{nat. } 52,12 = 3,9535488$.
12. $\log 9,8245 = 0,9923105$.
13. $\log \text{nat. } 9,8245 = 2,2848795$.
14. $^{2}\log 148 = 7,2094357 \ldots$
15. $^{5}\log 35 = 2,2090619 \ldots$
16. $^{4}\log 128 = 3,4999980 \ldots$

17. $\log 58,93495 =$
18. $\log 0,0487659 =$
19. $\log 0,000398495 =$
20. $\log 54,796345 =$
21. $\log 3243,7984 =$
22. $\log \text{nat. } 14,235 =$
23. $\log \text{nat. } 2,3495 =$
24. $^{4}\log 41,652 =$
25. $^{3}\log 2,143 =$
26. $^{5}\log 124 =$

## III. Numeri für Logarithmen.

1. num. $\log 4,2718416 = 18700$.
2. num. $\log 3,2714234 = 1868,2$.
3. num. $\log 2,3773063 = 238,40$.
4. num. $\log 0,7662120 = 5,8373$.
5. num. $\log 1,7682384 = 58,646$.
6. num. $\log 0,7584824 - 2 = 0,05734326$.
7. num. $\log 3,7610614 = 5768,48$.
8. num. $\log 0,7590300 = 5,74156$.
9. num. $\log 2,8188479 - 3 = 0,658943$.
10. num. $\log 0,8443323 - 1 = 0,698767$.

11. num. $\log 0,3208107 =$
12. num. $\log 2,5436087 =$
13. num. $\log 0,6325180 - 2 =$
14. num. $\log 0,3779979 =$
15. num. $\log 2,5304059 =$
16. num. $\log 2,652348 =$

## IV. Operationen mit Logarithmen.

1. $0{,}45607 \cdot 0{,}1804 = 0{,}08227501.$
2. $76{,}103 \cdot 42 = 3196{,}326.$
3. $0{,}000718 \cdot 23 = 0{,}01651399.$
4. $4{,}75 \cdot 3{,}759 = 17{,}85524.$
5. $5{,}7643189 \cdot 8{,}4753962 = 48{,}8549.$
6. $0{,}23 \cdot 0{,}143 \cdot 0{,}0029 = 0{,}000095381.$
7. $0{,}029 \cdot 8{,}00005 = 0{,}2320014.$
8. $98{,}784 : 48 = 2{,}058.$
9. $0{,}1728 : 86{,}4 = 0{,}002.$
10. $36{,}301 : 1{,}171 = 31.$
11. $59{,}4 : 0{,}0036 = 16500.$
12. $17{,}3 : 0{,}125 = 138{,}4.$
13. $1508^2 = 2274064.$
14. $0{,}118^2 = 0{,}013924.$
15. $21{,}534^4 = 215029{,}8 \ldots$
16. $0{,}43859^{15} = 0{,}0000004274452.$
17. $(15{,}34 \cdot 0{,}94567)^3 = 3052{,}776 \ldots$
18. $(0{,}113 \cdot 0{,}019 \cdot 4{,}70)^2 =$ $0{,}0001018262 \ldots$
19. $423{,}56 \cdot 0{,}3974 =$
20. $0{,}14573 \cdot 5{,}94^2 =$
21. $94{,}78^3 \cdot 9{,}004^7 =$
22. $\sqrt{5498{,}3} = 74{,}1505.$
23. $\sqrt[3]{87{,}945} = 4{,}447034 \ldots$
24. $\sqrt{9{,}9472} = 3{,}153918.$
25. $\sqrt[3]{128024064} = 504.$
26. $\sqrt[3]{0{,}000314432} = 0{,}068.$
27. $\sqrt[9]{814{,}7981} = 2{,}105955 \ldots$
28. $\sqrt[7]{528{,}49} = 2{,}4491 \ldots$
29. $\sqrt[3]{4\frac{3}{8}} = 1{,}6355 \ldots$
30. $\sqrt[3]{\frac{13}{16}} = 0{,}933127 \ldots$
31. $\sqrt[4]{\frac{73}{125}} = 0{,}874184 \ldots$
32. $\sqrt[5]{\frac{93}{128}} = \sqrt[5]{0{,}7265625} = 0{,}9381116 \ldots$
33. $\left(\frac{27}{32}\right)^{\frac{3}{5}} = 0{,}903084.$
34. $\sqrt[4]{\frac{5}{7}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0{,}09203614.$
35. $\sqrt[6]{0{,}421875^5} = 0{,}4871392 \ldots$
36. $\sqrt[14]{417{,}09} =$
37. $\sqrt[9]{\frac{112}{113} \cdot 14} =$
38. $\sqrt[3]{20{,}5 + \sqrt[5]{15{,}3}} = 3{,}936293 \ldots$

39. $\sqrt[4]{(84{,}04 - \sqrt{6{,}2})^2} - 3{,}089 = 4{,}5\ldots$

40. $\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{79{,}2} + 2{,}07}}{1{,}7015} = 0{,}85098\ldots$

41. $(\sqrt[9]{524{,}34})^3 \,.\, (0{,}4)^{\frac{7}{5}} - 0{,}0360717 = 2{,}2\ldots$

42. $\dfrac{3{,}469 \,.\, 0{,}24 \,.\, \sqrt[3]{12{,}9}}{\sqrt[4]{23{,}45}} = 0{,}887312.$

43. $\sqrt[5]{\dfrac{40{,}8725}{5{,}84}} \,.\, 0{,}2345 + 1{,}153944 = 1{,}5.$

44. $\dfrac{535{,}000119 + 3625}{10 \,.\, 2^3} - \dfrac{0{,}08125 \,.\, 0{,}09375}{5120} = 52.$

45. $\dfrac{(\sqrt[9]{2{,}478 \,.\, 9{,}8})^{18}}{\sqrt{4{,}5\,\sqrt{0{,}456}}} = 338{,}304.$

46. $\sqrt[7]{14{,}95 + \sqrt[5]{125{,}35}} - 1{,}0041502 = 0{,}5.$

47. $\sqrt[3]{\dfrac{44{,}805 + 405{,}206 \,.\, \sqrt[5]{20{,}5}}{20{,}5}} = 3{,}42457\ldots$

48. $\sqrt[21]{34{,}93^3} \,.\, \sqrt[7]{\dfrac{6{,}5674^4 \,.\, 27{,}459^3}{13{,}868^5 \,.\, 17{,}23267}} = 2{,}050086.$

49. $\sqrt[12]{\left(\dfrac{71{,}65}{\sqrt{0{,}2}}\right)^4} \,.\, \dfrac{253}{1{,}524696} = 901{,}234.$

50. $\sqrt[10]{\dfrac{(0{,}365 \,.\, \sqrt{2})^2}{788^2}} \,.\, 3{,}418426 + 1{,}21099 = 2.$

51. $(0{,}45^2 \,.\, 9{,}43^4 \,.\, \frac{7}{8}) : (0{,}0245 \,.\, \sqrt[3]{0{,}4259} \,.\, 52{,}3400) = 14522{,}59\ldots$

52. $\left(\dfrac{5}{8} \,.\, \sqrt[4]{84{,}26^3}\right) : \sqrt{4{,}842\,\sqrt{9{,}74}} = 4{,}471405.$

53. $\sqrt{36{,}8 \,.\, \sqrt{84{,}74} : \sqrt[5]{105{,}745 \,.\, 25 \,.\, 5}} = 2{,}758748\ldots$

54. $\dfrac{\sqrt[9]{347\,\sqrt[5]{0{,}0073^{15}}}}{\sqrt{8{,}46} \,.\, \sqrt[3]{0{,}948}} = 0{,}1300404\ldots$

55. $\sqrt{\frac{2,33333\sqrt{0,0834}}{\sqrt[9]{0,043^3}\cdot\sqrt{\sqrt{(0,26)^{12}}}}}:\sqrt{27,04} = 2,011739\ldots$

56. $\frac{\sqrt[4]{(1,2345)^2}\cdot\sqrt[3]{127,1}}{\sqrt[9]{0,8654\sqrt[7]{3,26}}}:0,4274806 = 13,03288\ldots$

57. $\frac{\sqrt[4]{\frac{31}{40}\cdot\sqrt{0,945^3}}\cdot\sqrt[3]{945,4}\cdot 643}{\sqrt[9]{0,473\cdot 94}\cdot\sqrt{\frac{5}{8}\sqrt{486}}\cdot 4,85} = 211,2246\ldots$

58. $\left\{\left(\sqrt[10]{\frac{231^2\cdot 6,479^{16}}{\sqrt[4]{7,38^{14}}}}\cdot\sqrt{\sqrt{0,283^3}}\cdot 2,314677\cdot\sqrt[12]{\left(\frac{7}{3}\sqrt{\frac{3,27}{14,6}}\right)^4}\right):\right.$

$\left.6,8066531\right\} - 2,47778 = 1,522312\ldots$

59. $5,02^2\sqrt[3]{\frac{5,02^5\sqrt[3]{14,553}}{14,553^2\sqrt[5]{5,02^4}}} =$

60. $\sqrt[9]{\frac{45,145^4\cdot 2,04^3}{\sqrt[5]{412,5^3}}}:14,003 =$

61. $\sqrt[7]{\frac{5,349+\sqrt{4,525^3}}{\sqrt{90,5}+\sqrt{0,454}}}:\sqrt{\frac{1,4579}{40,42}} - 0,534219 =$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 22–24; 25–26; 26–27; 27–44; Heis §. 56–59 a.

# Dritter Abschnitt.

# Algebraische Gleichungen.

## §. 126.

**Erklärung 1.** Eine Gleichung ist eine Verbindung zweier algebraischer Ausdrücke durch ein Gleichheitszeichen.

Die algebraischen Ausdrücke heissen die Seiten der Gleichung; und die durch plus oder minus verbundenen Theile der rechten und linken Seite heissen Glieder der Gleichung.

**Erklärung 2.** Sind die beiden Seiten einer Gleichung unbedingt gleich, so heisst sie analytisch; sind die beiden Seiten dagegen nur bedingt gleich, so heisst sie algebraisch oder synthetisch. Identisch ist eine Gleichung, wenn beide Seiten dieselben Ausdrücke haben. Z. B:

$$a + b - x = a + b - x.$$

Die Seiten einer analytischen Gleichung sind unbedingt gleich, weil die eine nur die Entwicklung der andern ist. Z. B.:

$$2a + 3a + 4b - 3b = 5a + b,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\ (a - b)^2 = a^2 - b^2.$$

Die Seiten einer synthetischen oder algebraischen Gleichung sind bedingt gleich, weil der Werth einer oder mehrerer Zahlen von andern Zahlen abhängig ist und durch diese erst bestimmt werden muss.

$$3x - 2 = 7$$

$$x = 9 : 3 = 3.$$

**Erklärung 3.** Die analytischen Gleichungen stellen allgemeine Gesetze auf und sind mit Lehrsätzen zu vergleichen; die algebraischen

Gleichungen dagegen sind Aufgaben, weil man in ihnen die unbekannten Grössen noch zu bestimmen hat (Bestimmungsgleichungen). Mit diesen haben wir es hier ausschliesslich zu thun.

**Erklärung 4.** Die unbekannten Grössen bezeichnet man gewöhnlich mit den letzten Buchstaben des Alphabets ... x, y, z, die bekannten dagegen mit den ersten Buchstaben a, b, c ...

## §. 127.

**Erklärung 1.** Den Werth der Unbekannten aus ihren Verhältnissen zu den bekannten Grössen so bestimmen, dass er in die Gleichung eingesetzt, eine identische Gleichung gibt, heisst eine Gleichung auflösen. Dieser Werth der Unbekannten heisst die Wurzel der Gleichung.

Bezeichnet man mit m jede mögliche Verbindung von Bekannten, auf den einfachsten Ausdruck reducirt, als Werth von der Unbekannten x, so ist die Form einer aufgelösten Gleichung:

$$x = m$$

oder

$$x - m = 0.$$

Um diese Form einer gegebenen Gleichung zu gewinnen, hat man die Unbekannte von allen Verbindungen mit bekannten Grössen nach und nach zu befreien. Dieses Verfahren heisst die Gleichung umformen.

**Erklärung 2.** Die Umformung vollzieht sich unter Anwendung der bisher aufgestellten Grundsätze, die sich in den allgemeinen Satz zusammenfassen lassen:

Gleiche Operationen an gleichen Grössen vollzogen, geben gleiche Resultate.

Bei diesen Operationen hat man von den entfernten Verbindungen der Unbekannten mit den Bekannten zu beginnen und zu den nähern Verbindungen vorwärts zu gehen.

### Sätze.

1. Jedes Glied kann man mit umgekehrten Zeichen auf die andere Seite setzen, unbeschadet der Gleichung, i. e. transponiren:

$$\sqrt{\frac{x}{n}} - b + d = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{\frac{x}{n}} - b + d - d = \frac{a}{b} - d \quad \text{cf. §. 10.}$$

$$\sqrt{\frac{x}{n}} - b = \frac{a}{b} - d \quad \text{cf. §. 9 Zusatz.}$$

**Zusatz.** Jede Gleichung lässt sich auf Null reduciren:

$$\sqrt{\frac{x}{n}} - b + d \quad = \frac{a}{b}.$$

$$\sqrt{\frac{x}{n}} - b + d - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b}$$

$$= 0 \quad \text{cf. §. 9 Zusatz.}$$

2. Der Wurzelexponent wird von der Unbekannten entfernt, wenn man die Wurzelgrösse auf eine Seite bringt und beide Seiten mit dem Wurzelexponenten potenzirt:

$$\sqrt{\frac{x}{n}} - b = \frac{a}{b} - d$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{n}} - b\right)^2 = \left(\frac{a}{b} - d\right)^2 \quad \text{cf. §. 68.}$$

$$\frac{x}{n} - b = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{2ad}{b} + d^2 \quad \text{cf. §. 79, 5.}$$

3. Brüche werden aus einer Gleichung entfernt, wenn man alle ihre Glieder mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner multiplicirt:

$$\frac{x}{n} - b = \frac{a^2}{b^2} - \frac{2ad}{b} + d^2$$

$$b^2x - b^3n = a^2n - 2abdn + b^2d^2n \quad \text{cf. §. 58; 37.}$$

$$b^2x = a^2n - 2abdn + b^2d^2n + b^3n \quad \text{cf. Satz 1.}$$

4. Den Coëfficienten eines Gliedes entfernt man, wenn man mit ihm alle Glieder der Gleichung dividirt:

$$b^2x = a^2n - 2abdn + b^2d^2n + b^3n$$

$$x = \frac{a^2n - 2abdn + b^2d^2n + b^3n}{b^2} \quad \text{cf. §. 47.}$$

$$x = n\left(\frac{a^2 - 2abd}{b^2} + d^2 + b\right) \quad \text{cf. §. 58, Zus. 2, 3.}$$

5. Der Potenzexponent wird von der Unbekannten entfernt, wenn man die Potenzgrösse auf eine Seite bringt und beide Seiten mit dem Potenzexponenten radicirt:

$$(x + m)^p - b = a$$

$$(x + m)^p = a + b \quad \text{cf. Satz 1.}$$

$$x + m = \sqrt[p]{a + b} \quad \text{cf. §. 80.}$$

6. Die Unbekannte einer Exponentialgleichung* wird bestimmt, wenn man von der Verbindung der Zahlen auf die Verbindung ihrer Logarithmen übergeht:

a) $$a^x = b\,d$$

$$x \log a = \log b + \log d \quad \text{cf. §. 113.}$$

$$x = \frac{\log b + \log d}{\log a} \quad \text{cf. Satz 4.}$$

b) $$\sqrt[x]{a} - b = d$$

$$\sqrt[x]{a} = b + d$$

$$\frac{\log a}{x} = \log (b + d).$$

7. Die Vorzeichen aller Glieder einer Gleichung kann man verändern, oder man kann ihre beiden Seiten mit einander vertauschen:

$$-ax - b = -c$$

entweder:

$$c = ax + b,$$

oder

$$ax + b = c \quad \text{cf. §. 42 Erkl. 5.}$$

Anmerkung. Aus den vorstehenden Sätzen ist ersichtlich, dass jede Verbindung einer Grösse mit der Unbekannten durch die entgegengesetzte Verbindung aufgelöst wird: Addition durch Subtraction, Multiplication durch Division und Potenzirung durch Radicirung und umgekehrt: Subtraction durch Addition u. s. w.

## Zusätze.

1. Wenn jede Seite einer Gleichung aus der Summa eines rationalen und irrationalen Gliedes besteht, so sind die rationalen Glieder einander gleich und die irrationalen.

Es sei:

---

* cf. §. 128, 2.

$$a + \sqrt{m} = \alpha + \sqrt{\mu},$$

so ist:

$$a = \alpha \text{ und } \sqrt{m} = \sqrt{\mu}.$$

**Beweis.**

Ist:

$$a + \sqrt{m} = \alpha + \sqrt{\mu},$$

so ist:

$$a + \sqrt{m} - \alpha - \sqrt{\mu} = 0$$

und:

$$(a - \alpha) + (\sqrt{m} - \sqrt{\mu}) = 0,$$

folglich:

und

$$\left.\begin{array}{ll} a - \alpha = 0 \text{ und } & \sqrt{m} - \sqrt{\mu} = 0 \\ a = \alpha & \text{und } \sqrt{m} = \sqrt{\mu} \end{array}\right\} \text{cf. §. 20, Zus.}$$

2. Wenn jede Seite einer Gleichung aus der Summa eines reellen und imaginären Gliedes besteht, so sind die reellen Glieder einander gleich und die imaginären.

Es sei:

$$a + m\sqrt{-1} = \alpha + \mu\sqrt{-1},$$

so ist:

$$a = \alpha \text{ und } m\sqrt{-1} = \mu\sqrt{-1}.$$

## §. 128.

**Erklärung 1.** Die algebraischen Gleichungen zerfallen in einfache oder Gleichungen des ersten Grades und in höhere oder Gleichungen des 2, 3...$n^{ten}$ Grades. Sind sie geordnet, so erscheint bei jenen die Unbekannte in der ersten Potenz, bei diesen in der 2, 3,...$n^{ten}$ (lineare, quadratische, kubische, biquadratische...).

Die höheren Gleichungen theilt man wieder in reine und unreine. Rein heisst eine Gleichung, wenn sie nur eine Potenz der Unbekannnten enthält, unrein, wenn in ihr verschiedene Potenzen der Unbekannten vorkommen.

**Erklärung 2.** Tritt in einer Gleichung die Unbekannte als Exponent auf, so heisst sie transcendent oder Exponentialgleichung. Z. B.:

$$b^x = a - m \text{ und } \sqrt[x]{a} = b + c.$$

**Erklärung 3.** Die einfachen wie die höheren Gleichungen theilen sich wieder je nach der Anzahl der Unbekannten in Gleichungen mit einer, zwei und mehreren Unbekannten. Die Gleichungen mit einer

Unbekannten heissen auch bestimmt, weil ihre Unbekannte nur von bekannten Grössen abhängt; die Gleichungen mit mehreren Unbekannten heissen auch unbestimmt, wenn darin eine Unbekannte von der andern abhängig ist.

---

# I. Gleichungen vom ersten Grade.

## a. Mit einer Unbekannten.

### §. 129.

**Erklärung.** Die allgemeine Form einer Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten ist:

$$ax + b \doteq c \ldots$$

Um eine solche Gleichung aufzulösen, verfährt man also:

1) Man löst die vorhandenen Klammern auf (§. 42, Zusatz 1 u. 2, Erkl. 4);
2) schafft die vorhandenen Nenner weg (§. 127, 3);
3) befreit die Unbekannte von dem vorhandenen Potenz- oder Wurzelexponenten (§. 127, 2 u. 5);
4) transponirt die Glieder der Unbekannten auf die eine Seite und die der Bekannten auf die andere (§. 127, 1);
5) zerlegt die Glieder in Factoren und entfernt den gemeinschaftlichen (§. 58, Zusatz 2 u. 3);
6) verwandelt die Zeichen, wo es noth thut ($\times - 1$) cf. (§. 127, 7);
7) vereinigt alle Glieder, die sich durch Addition und Subtraction vereinigen lassen (§. 42, Erkl. 4);
8) und dividirt endlich beide Seiten durch den Coëfficienten (Factor) von x (§. 127, 4), so ist der Werth von x gefunden.

### §. 130.

**Beispiele.**

1.

$x + 10 = 4x - 26$ — per subst.

$x - 4x = -26 - 10$ cf. 4. — links: $12 + 10 = 22$.

$-3x = -36$ cf. 7. — rechts: $48 - 26 = 22$.

$3x = 36$ cf. 6.

$x = \frac{36}{3} = 12.$

2.

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} - \frac{3x}{10} + 4{,}5 &= x - \frac{3x}{8} \\ 10x - 12x + 180 &= 40x - 15x \quad \text{cf. 2.} \\ 180 &= 25x + 2x \\ 180 &= 27x \\ 6\frac{2}{3} = \frac{180}{27} &= x. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{3x}{4} - 5\right) &= 2x - \frac{2}{3}(x+4) - \frac{1}{4}(3x+16) \\ \frac{9x}{4} - 15 &= 2x - \frac{2x}{3} - \frac{8}{3} - \frac{3x}{4} - 4 \quad \text{cf. 1.} \\ 27x - 180 &= 24x - 8x - 32 - 9x - 48 \\ 32 + 48 - 180 &= 24x - 17x - 27x \\ -100 &= -20x \\ 100 &= 20x \quad \text{cf. 6.} \\ 5 = \frac{100}{20} &= x. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 2ax &= a - cx + d \\ 2ax + cx &= a + d \\ x(2a + c) &= a + d \quad \text{cf. §. 5.} \\ x &= \frac{a+d}{2a+c}. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} ax + bc &= dc + x \\ ax - x &= dc - bc \\ x(a-1) &= c(d-b) \\ x &= \frac{c(d-b)}{a-1} = \frac{c(b-d)}{1-a} \quad \text{cf. §. 60, Zus. 2.} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \frac{mn}{x} &= cn + d + \frac{2}{x}. \\ mn &= cnx + dx + 2 \\ mn - 2 &= (cn + d)x \\ \frac{mn-2}{cn+d} &= x. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} ax + 2b^2 - a^2 &= bx + b^2 \\ ax - bx &= a^2 - b^2 \\ x(a-b) &= (a+b)(a-b) \\ x &= \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = a+b \quad \text{cf. 5.} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} m^2 - x^2 &= \frac{mn + nx}{k} \\ (m+x)(m-x) &= \frac{(m+x)n}{k} \\ m - x &= \frac{n}{k} \quad \text{cf. 5.} \\ -x &= \frac{n}{k} - m \\ x &= m - \frac{n}{k}. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} x - 3\frac{1}{12} &= \frac{x}{2} - \frac{x+4}{3} - \frac{x-6}{4}. \\ 12x - 37 &= 6x - 4x - 16 - 3x + 18 \\ 12x - 6x + 7x &= 37 + 2 \\ 13x &= 39 \\ x &= \frac{39}{13} = 3. \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} \frac{x}{m-n} &= \frac{2nx}{m^2-n^2} + \frac{10m}{m+n} \\ mx + nx &= 2nx + 10m^2 - 10mn \\ mx + nx - 2nx &= 10m^2 - 10mn \\ x(m-n) &= 10m^2 - 10mn \\ x &= \frac{10m(m-n)}{m-n} \\ x &= 10m. \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} \frac{x-c}{b^2} - \frac{2bc-x}{c^2} &= \frac{bc+x}{c^2} - \frac{c^2-x}{b^2c} \\ c^2x - c^3 - 2b^3c + b^2x &= b^3c + b^2x - c^3 + cx \\ c^2x + b^2x - b^2x - cx &= b^3c - c^3 + c^3 + 2b^3c \\ c^2x - cx &= 3b^3c \\ x(c^2 - c) &= 3b^3c \\ x &= \frac{3b^3c}{c^2-c} = \frac{3b^3c}{(c-1)c} \\ &= \frac{3b^3}{c-1}. \end{aligned}$$

12.

$$\frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}+17}{\sqrt{x}+7}$$

$$x+14\sqrt{x}+49=x+2\sqrt{x}+17\sqrt{x}+34$$

$$49-34=19\sqrt{x}-14\sqrt{x}$$

$$15=5\sqrt{x}$$

$$3=\sqrt{x}$$

$$9=x.$$

per subst. links $\frac{\sqrt{9}+7}{\sqrt{9}+2}=\frac{10}{5}=2$

rechts $\frac{\sqrt{9}+17}{\sqrt{9}+7}=\frac{20}{10}=2.$

13.

$$\sqrt{9+x+5b}-\frac{20b+40}{\sqrt{5b+x+9}}=\frac{x-15b-31}{\sqrt{15b+9}}$$

$$\frac{5b+x+9-20b-40}{\sqrt{5b+x+9}}=\frac{x-15b-31}{\sqrt{15b+9}}$$

$$\frac{x-15b-31}{\sqrt{5b+x+9}}=\frac{x-15b-31}{\sqrt{15b+9}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5b+x+9}}=\frac{1}{\sqrt{15b+9}}$$

$$\sqrt{15b+9}=\sqrt{5b+x+9}$$

$$15b+9=5b+x+9$$

$$10b=x.$$

p. subst. links $\sqrt{9+10b+5b}-\frac{20b+40}{\sqrt{5b+10b+9}}=\frac{15b+9-20b-40}{\sqrt{15b+9}}$

$$=\frac{-5b-31}{\sqrt{15b+9}}$$

rechts $\frac{10b-15b-31}{\sqrt{15b+9}}=\frac{-5b-31}{\sqrt{15b+9}}.$

14.

$$a^x b^{rx}=c^{mx-n}$$

$$x\log a+rx\log b=mx\log c-n\log c$$

$$x(\log a+r\log b-m\log c)=-n\log c$$

$$x=\frac{-n\log c}{\log a+r\log b-m\log c}$$

$$=\frac{n\log c}{m\log c-r\log b-\log a}.$$

15.

$$\sqrt[mx]{c^{dx+n}} = \sqrt[nx]{d^{cx+m}}$$

$$\frac{d\,x \log c + n \log c}{m\,x} = \frac{c\,x \log d + m \log d}{n\,x}$$

$$d\,n\,x \log c + n^2 \log c = c\,m\,x \log d + m^2 \log d$$

$$x\,(d\,n \log c - c\,m \log d) = m^2 \log d - n^2 \log c$$

$$x = \frac{m^2 \log d - n^2 \log c}{d\,n \log c - c\,m \log d}.$$

16.

$$1 + \sqrt{3x+1} - \sqrt{4x+4} = 0$$

$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{4x+4} - 1$$

$$3x + 1 = 4x + 4 - 2\sqrt{4x+4} + 1$$

$$2\sqrt{4x+4} = 4x - 3x + 4 + 1 - 1$$

$$= x + 4$$

$$16x + 16 = x^2 + 8x + 16$$

$0 = x^2 - 8x$ alle Glieder mit x dividirt (§. 47), gibt:

$0 = x - 8$ $0 : x = 0$ cf. §. 49, Zus. 3.

$8 = x.$

Anmerkung. Um zu erproben, ob sich bei der Auflösung kein Irrthum eingeschlichen hat, setzt man den gefundenen Werth der Unbekannten in die gegebene Gleichung ein (§. 127, Erkl. 1) und vollzieht die darin angedeuteten Operationen, wie an einigen Beispielen gezeigt wird. Diese Probe sollte man selten unterlassen, weil mit ihr eine treffliche Uebung verbunden ist.

## §. 131.

### Aufgaben.

I.

1. $20 + 2x + 7 - 5x = 3x - 9.$ $x = 6.$
2. $7x - 15 = 3 - 4x + 8x - 5x.$ $x = 2\frac{1}{4}.$
3. $5x - 9 + 3x = 15 - (x + 8 - 8x).$ $x = 16.$
4. $x + 11 - 3x = 4x - 15.$ $x = 4\frac{1}{3}.$
5. $\frac{x}{3} - 7 + 2x = 8 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}.$ $x = 8.$
6. $9x - 6\frac{2}{3}x - 8\frac{1}{3} = \frac{5x}{2} - 9.$ $x = 4.$

7. $\frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{x}{2} - 4x = 12\frac{1}{2} - \frac{x}{5} + \frac{x}{30}$. $x = -6\frac{12}{23}$.

8. $\frac{x}{20} - \frac{1}{2}x + \frac{4}{5}x = \frac{2x}{5} + 15 - \frac{3x}{15}$. $x = 100$.

9. $\frac{8(13 - x) + 16x}{4} = 6x - 4$. $x = 7\frac{1}{2}$.

10. $\frac{x + 3}{5} - 4 = 5 - x$. $x = 7$.

11. $\frac{18 - 4x}{3} + x = \frac{6x - 4}{3} - 2$. $x = 4$.

12. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - 5 = \frac{2x}{3}$. $x = 60$.

13. $\frac{x - 6}{6} + \frac{x + 6}{5} - 3 = 10 - \frac{x + 4}{7}$. $x = 24$.

14. $\frac{2x - 3}{2} - \frac{5}{2} - \frac{14 - 4x}{5} = \frac{4x + 12}{9}$. $x = 6$.

15. $\frac{x - 10}{8} + \frac{5}{2} = \frac{2x + 3}{4} - 4$. $x = 12$.

16. $2x + \frac{2x - 9}{3} = \frac{1}{6} - \frac{17 - 4x}{5} + 6 - x$. $x = 2\frac{1}{86}$.

17. $\frac{7x - 11}{9} - \frac{3x + 7}{4} + \frac{5x - 3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6x - 25}{6}$

$+ \frac{41x - 38}{18} - \frac{13x + 17}{9}$. $x = 5$.

18. $\frac{2}{3}x + 0{,}5x - 3{,}8 = \frac{13}{15} + 0{,}75x$ $x = 11{,}2$.

19. $3x + 50 = \frac{13 - 5x}{4} - \frac{2x - 9}{3} + 2x$ $x = -15$.

20. $x - a = \frac{b - x}{c}$. $x = \frac{b + ac}{c + 1}$.

21. $a = \frac{m - x}{n} - \frac{n - x}{m}$. $x = \frac{amn}{n - m} + m + n$.

22. $a - 1 = \frac{am - x}{m} - \frac{x - b}{n} - 1$. $x = \frac{bm}{m + n}$.

23. $x(5b - 3a)(b + a) - 4a^2x = 3a^2x - 5a(2ax - b^2)$ $x = \frac{5ab}{2a + 5b}$.

24. $\frac{b + 1}{d^2} = \frac{b - x}{a} - \frac{a - x}{d}$. $x = \frac{ab + a - bd^2 + a^2d}{(a - d)d}$.

per subst.:

$$\frac{b + 1}{d^2} = \left(b - \frac{ab + a - bd^2 + a^2d}{(a - d)d}\right) : a - \left(a - \frac{ab + a - bd^2 + a^2d}{(a - d)d}\right) : d$$

$$= \frac{abd - bd^2 - ab - a + bd^2 - a^2d}{(ad - d^2)a} - \frac{a^2d - ad^2 - ab - a + bd^2 - a^2d}{(ad - d^2)d}$$

$$= \frac{bd - b - 1 - ad}{ad - d^2} - \frac{bd^2 - ad^3 - ab - a}{(ad - d^2)d}$$

$$= \frac{bd^2 - bd - d - ad^2 - bd^2 + ad^2 + ab + a}{(ad - d^2)d}$$

$$= \frac{ab + a - bd - d}{(a - d)d^2}$$

$$= \frac{(a-d)(b+1)}{(a-d)d^2} = \frac{b+1}{d^2}.$$

25. $\frac{5+2x}{m} - \frac{7n+4x}{n} = b - ax + \frac{4x(5n-5m)+10mn}{5mn}$. $x = \frac{9m + bm - 5}{am - 2}$.

26. $\frac{2x+1}{6x-37} = \frac{x+3}{3x-16}$. $x = 9{,}5$.

27. $\frac{32}{2-x} - \frac{2+9x}{2-3x} = 3$. $x = \frac{6}{11}$.

28. $\frac{m-1}{n} = \frac{m-nx}{p} - \frac{n-mx}{p^2}$. $x = \frac{mp^2 - p^2 - mnp + n^2}{(m-np)n}$.

per subst.:

$$\frac{m-1}{n} = \left(m - \frac{mnp^2 - np^2 - mn^2p + n^3}{mn - n^2p}\right) : p$$

$$- \left(n - \frac{m^2p^2 - mp^2 - m^2np + mn^2}{mn - n^2p}\right) : p^2$$

$$= \left(m - \frac{mp^2 - p^2 - mnp + n^2}{m - np}\right) : p$$

$$- \frac{mn^2 - n^3p - m^2p^2 + mp^2 + m^2np - mn^2}{(mn - n^2p)p^2}$$

$$= \frac{m^2 - mnp - mp^2 + p^2 + mnp - n^2}{(m-np)p} - \frac{mp^2 + m^2np - n^3p - m^2p^2}{(mn - n^2p)p^2}$$

$$= \frac{m^2 - mp^2 + p^2 - n^2}{(m-np)p} - \frac{mp + m^2n - n^3 - m^2p}{(m-np)np}$$

$$= \frac{m^2n - mnp^2 + np^2 - n^3 - mp - m^2n + n^3 + m^2p}{(m-np)np}$$

$$= \frac{np^2 - mnp^2 - mp + m^2p}{(m-np)np}$$

$$= \frac{mp(m-np) - p(m-np)}{(m-np)np}$$

$$= \frac{mp - p}{np} = \frac{p(m-1)}{np}$$

$$= \frac{m-1}{n}.$$

29. $\frac{3x}{x+3} + \frac{x+3}{x-3} = \frac{4x^2-2x+4}{x^2-9}$. $x = 5$.

30. $\frac{9n^2+x^2}{4n^2-x^2} = \frac{2n-x}{2n+x} + \frac{2n+x}{2n-x}$. $x = n$.

31. $bx - \frac{bx^2-b}{x} - \frac{5+ax}{x} = 0$. $x = \frac{b-5}{a}$.

32. $\frac{x^3+36+15x-3x^2}{x^2-3x+9} = x^2+3x-9$. $x = 3$.

33. $(a^3+x)^2 = x^2+6a^3+a^6$. $x = 3$.

34. $(x+3)^2 - (x^2-1) = 34-2x$. $x = 3$.

35. $\frac{x}{m-m^3} - \frac{x}{1-m^2} = a$. $x = am(1+m)$.

36. $\frac{10x^2+2x-6}{4-x^2} = \frac{4x-2}{2-x} - \frac{6x-4}{x+2}$. $x = \frac{5}{6}$.

37. $(3x-2)^2 + (x+3)^2 = 10x^2+1$. $x = 2$.

38. $(2m+x)^2 - (2m-x)^2 = 16m-8n$. $x = \frac{2m-n}{m}$.

39. $\frac{1}{a} = \frac{x}{a^3-a} + \frac{x}{a^2-1}$. $x = a-1$.

40. $\frac{(b^2+x^2)(b-x)}{b^4-x^4} = q$. $x = \frac{1-bq}{q}$.

41. $\frac{m+2mx+m}{m^2-x^2} = \frac{x}{m+x} - \frac{x+1}{x-m}$. $x = m$.

42. $\frac{2m+2x}{m+n} - \frac{2m-2x}{m-n} = \frac{4}{m^2-n^2}$. $x = \frac{1+mn}{m}$.

43. $\frac{9x}{9a-a^3} = \frac{3x}{9-a^2} + m$. $x = (3+a)\frac{am}{3}$.

44. $\frac{4x+10}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{14x+4}{x+1} - \frac{10x^2+8}{x^2-1}$. $x = -1$.

45. $\frac{2-2x}{1-3x} - \frac{6-2x}{5-x} = 1 - \frac{4x^2+8x+1}{(1-3x)(5-x)}$. $x = 5\frac{1}{3}$.

46. $m + \frac{3m^2-5mx}{2m-3x} - \frac{m^2-mx}{5m+x} = -$
$\frac{12m^3-5m^2x+11mx^2}{10m^2-13mx-3x^2}$. $x = m$.

47. $10x + \frac{4x-8}{3} - \frac{68-4x}{6} = 6x+34$.

48. $\frac{13-5x}{4} - \frac{2x-9}{3} - 50 = x$.

49. $7x - \frac{4,5 - 1,5x}{2} = \frac{1,5x}{2} + \frac{16,5 - 1,5x}{4} - 30.$

50. $\frac{3,5x - 2,5}{3x - 4,5} = \frac{5,5x + 3,5}{4x + 6} - \frac{\frac{25}{6}x - 41x - 11}{20x^2 - 45}.$

---

51. $\frac{3 - \sqrt{x}}{3} + \frac{5}{2} = \frac{11\sqrt{x}}{9} - \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{10} - \frac{1}{6}.$ $x = 9.$

52. $d - \sqrt{x} = \frac{b - \sqrt{x}}{c}.$ $x = \left(\frac{cd - b}{c - 1}\right)^2 = \frac{(cd)^2 - 2bcd + b^2}{c^2 - 2c + 1}.$

53. $\frac{2x - m}{n\sqrt{x}} - \frac{m - \sqrt{x}}{n} = \frac{3\sqrt{x}}{n} - \frac{m}{\sqrt{x}}.$ $x = (n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1.$

p. substit.

$$\frac{2n^2 - 4n + 2 - m}{n(n - 1)} - \frac{m - n + 1}{n} = \frac{3n - 3}{n} - \frac{m}{n - 1}$$

$$\frac{2n^2 - 4n + 2 - m - mn + n^2 - 2n + m + 1}{n(n - 1)} = \frac{3n^2 - 3n - 3n + 3 - mn}{n(n - 1)}$$

$$\frac{3n^2 - 6n - mn + 3}{n(n - 1)} = \frac{3n^2 - 6n - mn + 3}{n(n - 1)}.$$

54. $\frac{26\sqrt[9]{x + 10083} - 17}{4\sqrt[9]{x + 10083} + 7} = 5.$ $x = 9600.$

55. $\frac{2\sqrt{x} + 14}{\sqrt{x} + 1} + \frac{4\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1} = \frac{6x + 4\sqrt{x} - 10}{x - 1}.$ $x = 25.$

56. $3\sqrt[3]{\frac{x^4}{9}} = \sqrt{x^3}.$ $x = 9.$

57. $7 + \sqrt{x - 2} = 11.$ $x = 18.$

58. $\sqrt{x} = m - \sqrt{x - m}.$ $x = \left(\frac{m + 1}{2}\right)^2 = \frac{m^2 + 2m + 1}{4}.$

59. $\sqrt{x} - \frac{9}{\sqrt{x + 2}} + \sqrt{x + 2} = 0.$ $x = 3\frac{1}{16}.$

60. $\frac{\sqrt{5x} + 1}{\sqrt{5x} - 1} = \frac{\sqrt{5x} + 10}{\sqrt{5x} + 2}.$ $x = \frac{4}{5}.$

61. $2\sqrt{1 - x} = 1 - \sqrt{1 - 5x}.$ $x = -24.$

62. $\sqrt{3x} + \sqrt{2a + 3x} - \frac{8a}{\sqrt{2a + 3x}} = 0.$ $x = \frac{6a}{7}.$

63. $\sqrt{10a + 5x} - \sqrt{5x + 5a^2} - 5a = 0.$ $x = \frac{1 - 6a + 4a^2}{5}.$

64. $\sqrt{7 + x} = \frac{21}{\sqrt{7 + x}} - \sqrt{x}.$ $x = 5\frac{3}{5}.$

65. $\sqrt{2m + x} - \sqrt{x - 2} = 2.$ $x = \frac{m(m - 2) + 9}{4}.$

66. $\sqrt{4 + 3x} = \sqrt{2x} + 2.$ $x = 32.$

67. $\sqrt[6]{x^2 + 27x - 18} = \sqrt[3]{9 + x}.$ $x = 11.$

68. $11\sqrt{2x + 4} - 7\sqrt{5x + 1} = 3\sqrt{5x + 1} - 4\sqrt{2x + 4}.$ $x = 16.$

69. $\frac{b - \sqrt{5x}}{b + \sqrt{5x}} = \frac{5b - 5\sqrt{5x}}{12b + 5\sqrt{5x}}.$ $x = \frac{b^2}{5}.$

70. $\sqrt{17 + 8x + \sqrt{x^4 - 2x^3 + 1}} = \frac{x^2}{x - 4} + \frac{16}{4 - x}.$ $x = 1.$

71. $1 - \sqrt{x} + 3x = (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}).$ $x = \frac{1}{16}.$

72. $\frac{6c}{\sqrt{3c + x}} = \sqrt{3c + x} + \sqrt{x}.$ $x = c.$

73. $\frac{5m^2}{\sqrt{m^2 + x^2}} = x + \sqrt{m^2 + x^2}.$ $x = \frac{4m}{3}.$

74. $\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$ $x = \frac{a^2 + b^2}{2b}.$

75. $\sqrt[3]{24x - (2 + x)8\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{x}.$ $x = 1.$

76. $a^{2x+1} b^{x-2} = m^x n^{2x-1}.$ $x = \frac{2\log b - \log a - \log n}{2\log a + \log b - \log m - 2\log n}.$

77. $1 + \sqrt{3x + 1} - \sqrt{4x + 4} = 0.$

78. $\sqrt{bx - cd} + \sqrt{bx} - c\sqrt{d} = 0.$

79. $\sqrt{\frac{x - 6m}{x - 3m}} - \frac{3m}{2x} + 1 = 0.$

80. $a^{mx+n} = b.$ $x = \frac{\log b - n\log a}{m\log a}.$

81. $\sqrt[mx+n]{a} = b.$ $x = \frac{\log a - n\log b}{m\log b}.$

82. $\sqrt[mx+n]{a} = b^{px+q}.$ $x = -\frac{mq + np \pm \sqrt{(mq - np)^2 + 4mp\log a : \log b}}{2mp}.$

83. $1{,}08^x = 248 : 66.$ $x = 17{,}2.$

84. $1{,}05^x = 398 : 140.$ $x = 21{,}414.$

85. $\left(\frac{4}{3}\right)^x = 281 : 3.$ $x = 15,78.$

86. $1,35^x = 1,545^6.$ $x = 8,69.$

87. $\sqrt[3x]{168,8327} = 1,05^{35}.$ $x = 1.$

88. $\sqrt[3]{\left(\frac{37,3}{31,13}\right)^{2x}} = 532,33.$

89. $7\sqrt[x]{249} = (20 : 6)^x.$

90. $a^{x-1}b = \sqrt[3]{\left(\frac{m+n}{p-q}\right)^{2x}}.$

91. $\sqrt[-3]{\left(\frac{a}{b}\right)^{4x}} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{x-3} = \left(\frac{m}{n}\right)^{3x}.$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 160—180; 180—184; III. Theil, Seite 45—48; Heis §. 61.

---

## II.

92. Von welcher Zahl ist das Sechsfache und die Hälfte 546?

$x = 84.$

93. Bei einem Gutsbesitzer sind 130 Mann einquartiert; das ist gerade der vierte und neunte Theil eines Bataillons.

$x = 360.$

94. Von welcher Zahl beträgt der $m^{te}$ Theil um d mehr als der $n^{te}$ Theil?

$$x = \frac{dmn}{n - m}.$$

95. Für zwei im Dienste verunglückte Soldaten wurden von ihren Officieren und Kameraden 405 fl. (Thlr.) gesammelt; der eine soll achtmal so viel bekommen als der andere.

I. $x = 45$, II. 360.

96. Es sollen zwei Zahlen gesucht werden, von denen die eine a mal so gross ist als die andere und deren Summa gleich b ist.

$$\text{I. } x = \frac{b}{1+a}, \quad \text{II. } \frac{ab}{1+a}.$$

97. Die Zahl 133 soll so in zwei Theile getheilt werden, dass der eine $5\frac{1}{3}$ mal im andern enthalten ist.

I. $x = 21$, II. 112.

98. In einem Zeughause liegen 45600 Kanonenkugeln und zwar $3\,^3/_4$ mal so viel 10pfündige als 25pfündige.

x = 9600 25pfündige,
36000 10pfündige.

99. Ein Truppenkörper von 8400 Mann operirt in zwei Abtheilungen, die eine verhält sich zur andern wie 3 : 4.

I. x = 3600, II. 4800.

100. Die Zahl a ist in zwei Theile zu zerlegen, die sich wie b : c verhalten.

$$\text{I. } x = \frac{a\,b}{b + c}, \quad \text{II. } \frac{a\,c}{b + c}.$$

101. Für ein Militärmagazin haben zwei Personen die Haberlieferung übernommen; die erste liefert $^2/_7$, die zweite $^3/_8$ des bedungenen Quantums und es bleiben ihnen noch 5225 Centner zu liefern.

x = 15400.

102. Wenn man eine Zahl durch a und b dividirt, so ist die Summa der Quotienten gleich c.

$$x = \frac{a\,b\,c}{a + b}.$$

103. In welche Theile ist 86 zu zerlegen, wenn der eine durch 6, der andere durch 8 dividirt werden soll und die Summa dieser Quotienten 12 gibt?

I. x = 30, II. 56.

104 Eine Compagnie besteht aus 252 Mann, darunter sind 5mal so viel Rekruten, 8mal so viel gediente Soldaten als einjährige Freiwillige.

x = 18, 144, 90.

105. Eine Festung hat 3850 Mann Besatzung und zwar 3mal so viel Cavallerie und 7mal so viel Infanterie als Artillerie.

x = 350 Art., 1050 Cav., 2450 Inf.

106. Jemand hat 2010 Meilen zurückgelegt und zwar $5\,^1/_2$ mal so viel zu Wasser als zu Fuss und $1\,^3/_7$ mal so viel zu Pferd als zu Wasser.

x = 140 M.

107. Eine Zahl a soll so in drei Theile getheilt werden, dass der zweite b und der dritte c mal so gross ist, als der erste.

$$x = \frac{a}{1 + b + c}.$$

108. Unter 3 Personen sollen 528 Thl. vertheilt werden; der Theil der ersten soll sich zum Theile der zweiten wie 9 : 13 verhalten und die dritte soll so viel erhalten wie die beiden ersten zusammen.

$x = 108$ Thl.

109. Drei Brüder verdienen jährlich 2585 Thl. (fl.); der älteste aber $^2/_3$, und der zweite $^1/_4$ mehr als der jüngere Bruder.

Der Jüngste = 660 Thl.

110. Unter drei Personen sollen 2370 Thl. nach Verhältniss ihres Alters vertheilt werden; nun ist B $1^1/_3$ mal und C $4^1/_4$ mal so alt als A.

$x = 360.$

111. Drei Städte sollen nach dem Verhältnisse ihrer Bevölkerung 1274 Mann Soldaten stellen; nun verhält sich die Bevölkerung von A zu der von B wie 2 : 5 und die von B zur Bevölkerung von C wie 9 : 7.

$x = 234.$

112. Eine Zahl a soll so in drei Theile zerlegt werden, dass sich der erste Theil zum zweiten verhält wie b : c und der zweite zum dritten wie d : e

$$x = \frac{abd}{bd + bcd + ce}.$$

113. Eine Erbschaft von 21400 Thl. soll unter drei Brüder A, F, C und eine Schwester M so vertheilt werden, dass die Kosten für deren Ausbildung in Abzug kommen; und nun verhalten sich die Theile des A und F wie 2 : 3 und die Theile des F und C wie 9 : 11 und die des C und der M wie 2 : 5.

A = 2400 Thl., F = 3600, C = 4400, M = 11000.

114. Bei einer Parlamentswahl erhielt ein liberaler Candidat $^2/_3$, ein conservativer $^2/_9$, ein ultramontaner $^1/_{10}$ der abgegebenen Stimmen, 186 Stimmzettel werden als ungiltig verworfen; wie viele Personen haben gewählt?

$x = 16740.$

115. Es sollen 2100 Thl. so getheilt werden, dass B 150 Thl. mehr als A bekommt und C 300 Thl. mehr als B.

x = 500 A, B = 650, C = 950.

116. Ein Kaufmann gewinnt bei einer Speculation 15% seines hiezu verwendeten Capitals; dieses ist dadurch auf 9936 Thl. gestiegen.

$x = 8640.$

117. Ein Spieler verlor im ersten Spiele den sechsten Theil seines Geldes, im zweiten den vierten und im dritten den achten Theil, im vierten dagegen gewann er die Hälfte seines anfänglichen Geldes und nun hatte er 2 fl. 30 kr. gewonnen.

$x = 53$ fl. 20 kr.

118. In einer Gesellschaft von 92 Personen sind 6 Männer mehr als Frauen und 8 Kinder mehr als Erwachsene.

$x = 18, 24, 50.$

119. Es sollen 7810 Thl. so unter drei Personen vertheilt werden, dass B 150 Thl. weniger als A bekommt und C 310 Thl. mehr als B.

$x = 2600, 2450, 2760.$

120. Unter fünf Personen sollen 1100 fl. so vertheilt werden, dass jede folgende immer 20 fl. mehr bekommt als die vorhergehende.

$x = 180, 200$ u. s. w.

121. Eine Wittwe soll nach dem Testamente ihres Mannes mit ihren drei Söhnen und vier Töchtern das Vermögen von 12000 Thl. so theilen, dass jeder Sohn um die Hälfte mehr als eine Tochter erhält, die Mutter selbst aber 1000 Thl. mehr als ein Sohn und eine Tochter zusammen.

$x = 1000$ Thl., 1500, 3500.

122. Drei Personen betheiligen sich an einem Unternehmen, zu dem eine gewisse Summa erforderlich ist, und zwar A mit 4500 Thl. weniger als die Hälfte der Summa, B mit 1000 Thl. weniger als ihrem dritten Theile und C mit 1650 Thl. mehr als ihrem vierten Theile.

$x = 46200$, $A = 18600$ Thl., $B = 14400$, $C = 13200$.

123. Jemand bestimmt in seinem Testamente seiner Wittwe den dritten Theil, jedem seiner drei Söhne den siebenten Theil, seinem Bedienten den zwölften Theil seines Vermögens und die übrige Summa von 2600 Thl. dem Lokalarmenfonde.

$x = 16800; 5600; 2400; 1400.$

124. Fünf Erben bekommen mit einander 10000 Thl. und zwar B doppelt so viel als A und noch 600 Thl., C die Hälfte von dem, was A und B bekommen weniger 300 Thl., D die Hälfte von dem, was A und C bekommen und noch 100 Thl. und E die Hälfte von dem Antheile des B und C und D weniger 800 Thl.

$x = 1200, 3000, 1800, 1600, 2400.$

125. Fünf Personen verlieren zusammen 42 fl., B um die Hälfte mehr als A und noch 1 fl., C die Hälfte vom Verluste des A und B und noch 1 fl., D $^1/_5$ vom Verluste des A und B und C, E den dritten Theil vom Verluste der vier ersten und noch 2 fl.

$x = 6, 10, 9, 5, 12.$

126. Zwei Personen spielen mit einander; A hatte vor dem Spiele 40 kr., B 35 kr. und nach dem Spiele hat A 4mal so viel als B, wie viel hat er gewonnen?

$x = 20$ kr.

127. Die Garnison einer Stadt besteht aus 1500 Mann; jeder Infanterist bekommt monatlich $2^1/_2$ fl., jeder Cavallerist $3^1/_2$ fl., der monatliche Sold beträgt 4150 fl. Wie viel Infanterie, wie viel Cavallerie?

$x = 1100, 400.$

128. Ein Meister, 12 Gesellen und 4 Handlanger haben an einem Baue gearbeitet; der Meister bekommt täglich 1 Thl., der Geselle 16 Groschen, der Handlanger 10 Groschen; im Ganzen werden 139 Thl. 22 Gr. ausgezahlt. Wie viel Tage wurde gearbeitet?

$x = 16.$

129. Die Hälfte eines Kapitals steht zu $5\%$, das $^1/_3$fache zu $4\%$, der Rest zu $3\%$ aus und die Zinsen betragen im Ganzen 390 Thl.

$x = 9000$ Thl.

130. Drei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden: die zweite durch die erste dividirt, gibt zum Quotienten 3 und zum Reste 2, dividirt man die dritte durch die zweite, so ist der Quotient 4 und der Rest 3 und die Summa der drei Zahlen gibt 125.

$x = 7, 23, 95.$

131. Die Summa dreier Zahlen ist 103; die zweite durch die erste dividirt, gibt 2 zum Quotienten und 4 zum Reste; dividirt man aber die dritte durch die zweite, so erhält man 3 zum Quotienten und 6 zum Reste.

$x = 9, 22, 72.$

132. Einem Boten, der schon 12 Tage unterwegs ist und täglich 4 Meilen macht, wird ein anderer nachgeschickt, der täglich $1\frac{1}{2}$ Meilen mehr zurücklegt; wann wird er den ersten einholen?

$x = 32.$

133. Aus einem Orte wird ein Courier abgeschickt, der alle 4 Stunden 6 Meilen zurücklegt; nach 10 Stunden wird ihm ein anderer nachgeschickt, der alle 3 Stunden 5 Meilen macht mit dem Auftrage jenen einzuholen.

$x = 90.$

134. Wenn es eben 8 Uhr schlägt, wie lange dauert es bis die beiden Zeiger der Uhr über einander stehen.

$x = 43\frac{7}{11}.$

135. Wenn es eben 12 Uhr schlägt, in wie viel Zeit werden die beiden Zeiger wieder über einander stehen?

$x = 65\frac{5}{11}.$

136. Jemand leiht 4500 fl. (Thl.) zu $4\%$ aus, $5\frac{1}{2}$ Jahre später leiht er 6000 fl. (Thl.) zu $5\%$ aus. Wie lange muss er nun beide Capitalien stehen lassen, um von beiden gleich viel Zinsen zu erhalten?

$x = 8\frac{1}{4}.$

137. Das Vorderrad eines Wagens hat $7\frac{4}{5}'$ im Umfang, das Hinterrad $10\frac{2}{7}$. Um wie viel Fuss muss der Wagen weiter gezogen werden, wenn das Vorderrad 290 Umläufe mehr machen soll als das Hinterrad?

$x = 3120.$

138. Das Vorderrad eines Wagens hat 5'; auf einem Wege von 24000' macht dasselbe 1800 Umläufe mehr als das Hinterrad.

$x = 8.$

139. Eine Frau bringt Eier zu Markt und verkauft zuerst die Hälfte und ein halbes Ei, vom Reste wieder die Hälfte und ein halbes, und von diesem Reste noch einmal die Hälfte und ein halbes, so dass ihr nur noch 3 Eier bleiben.

$x = 31.$

140. Von einer Compagnie wird in einem Treffen der dritte Theil und $\frac{1}{3}$ Mann getödtet, vom Reste wird der dritte Theil und $\frac{1}{3}$ gefangen genommen, vom abermaligen Reste muss der dritte Theil

und $^1/_3$ Mann ins Feldspital gebracht werden, von den übrigen muss der dritte Theil und $^1/_3$ auf die Wache und nun sind es nur noch 47 Mann.

$$x = 242.$$

141. Es sollen n Mass einer Mittelsorte zum Preise von c aus zwei verschiedenen Sorten gemischt werden; der Preis der bessern sei a und der der geringern Sorte sei b.

$$x = \frac{c\,n - b\,n}{a - b}.$$

142. Ein Weinhändler hat zweierlei Sorten Wein, vom bessern kostet die Mass 48 kr., vom geringern 36 kr.; er will 15 Mass à 40 Kreuzer mischen.

$$x = 5,\ 10.$$

143. Ein Goldarbeiter hat zweierlei Silber, 13löthiges und 8löthiges; er will nun 20 Mark $10^1/_4$löthiges Silber zusammenschmelzen.

$$x = 9,\ 11.$$

144. Ein Weinhändler hat 48 Mass Wein, die Mass zu 40 Kreuzer; er will die Mass um 36 Kreuzer geben, wie viel muss er dann Wasser zugiessen?

$$x = 5^1/_3.$$

145. Jemand hat 40 Mark 14löthiges Silber; er will es mit Kupfer zu 9löthigem legiren.

$$x = 22^2/_9.$$

146. Es hat Jemand 36 Geldstücke, und zwar halbe Gulden und $^1/_6$Thalerstücke, in Summa 13 fl.

$$x = 12,\ 24.$$

147. Jemand ist 50 Jahre und sein Sohn 19, nach wie viel Jahren ist der Vater doppelt so alt als der Sohn?

$$x = 12.$$

148. Von zwei Personen ist die eine 50, die andere 15 Jahre alt, ihr Alter verhält sich demnach zur Zeit wie 10 : 3. Wann wird es sich wie 11 : 4 verhalten?

$$x = 5.$$

149. In einer Familie ist der Vater 48, der eine Sohn 18, der andere 2 Jahre alt, nach wie viel Jahren wären die beiden Söhne zusammen so alt als ihr Vater?

$$x = 28.$$

150. In einer Masse von 120 ℔ sind Schwefel und Salpeter so gemischt, dass sich der Salpeter zum Schwefel verhält wie 7 : 5. Wie viel Salpeter muss zugesetzt werden, wenn er sich zum Schwefel verhalten soll wie 8 : 4?

$$x = 30.$$

151. Wie viel muss bei der gleichen Masse dem Schwefel entzogen werden, wenn das nämliche Verhältniss stattfinden soll.

$$x = 15.$$

152. Wie viel muss man aber Salpeter zusetzen und Schwefel wegnehmen, wenn beide im Verhältniss 8 : 4 stehen sollen und die Mischung nach wie vor 120 ℔ wiegen soll?

$$x = 10.$$

153. Welche Zahl muss man zu a und zu b addiren, wenn sich die Summen verhalten sollen wie m : n?

$$x = \frac{an - bm}{m - n}.$$

154. An einem Fasse befinden sich 3 Spundlöcher; durch das erste kann das Fass in 3, durch das zweite in 4 und durch das dritte in 5 Stunden gefüllt werden. In welcher Zeit kann es durch alle 3 zugleich geschehen?

$$x = 1^{13}/_{47}.$$

155 Ein Wasserbehälter kann durch 3 Röhren gefüllt werden; durch die erste in $1\,^1/_2$, durch die zweite in $3\,^3/_4$, durch die dritte in 6 Stunden. Wie viel Zeit ist erforderlich, wenn alle 3 Röhren zugleich fliessen?

$$x = {}^{10}/_{11}.$$

156. Ein Fass kann durch 4 Röhren gefüllt werden; durch die erste kann es in a, durch die zweite in b, durch die dritte in c und durch die vierte in d Stunden geschehen. In welcher Zeit kann es durch alle 4 zugleich geschehen?

$$x = \frac{abcd}{bcd + acd + abd + abc}.$$

157. Drei Maurer sollen eine Mauer von 940 Kubikfuss aufführen; der erste kann 18 Kubikfuss in 5 Tagen, der zweite 13 c′ in 4 Tagen und der dritte 16 c′ in $4\,^1/_2$ Tagen fertig bringen. Wie lang brauchen alle 3 zusammen?

$$x = 90\frac{630}{1873}.$$

158. Jemand hat drei Stücke Metall von gleicher Grösse; von dem ersten wiegen 3 Kubikzoll $35\,^5/_6$ Loth, vom zweiten 4 c'' $72\,^2/_3$ Loth, und vom dritten wiegen 5 c'' $41\,^1/_2$ Loth. Alle 3 zusammen wiegen 3457 Loth, wie viel Kubikzoll hat jedes Stück?

$$x = 90.$$

159. Für einen Armen soll eine bestimmte Summa gesammelt werden; gibt jede Person $11\,^1/_4$ Groschen, so kommen 4 Thl. 15 Groschen zuviel zusammen, gibt jede Person nur 10 Groschen, so sind immer noch 2 Thl. zu viel gesammelt. Wie viel Personen? Wie viel wollte man sammeln? Wie viel musste jede Person geben?

$$x = 60,\ 18,\ 9.$$

160. Jemand will eine Uhr ausspielen lassen; gibt er das Loos zu 30 Kreuzer, so kommen 9 fl. zu viel heraus, gibt er jedoch das Loos zu 20 Kreuzer, so kommen 8 fl. zu wenig zusammen. Wie viel Loose? Wie theuer die Uhr? Wie hoch das Loos?

$$x = 102,\ 42,\ 24^{12}/_{17}.$$

161. Welche Zahl gibt mit 5 multiplicirt ein Product, das ebenso viel über 54 ist als die Zahl selbst unter 54?

$$x = 18.$$

162. Man soll eine Zahl suchen, welche mit m und n multiplicirt eine gewisse andere Zahl um a und b übertrifft.

$$\text{I. } x = \frac{a-b}{m-n},\quad \text{II. } \frac{an-bm}{m-n}.$$

163. Ein Kaufmann hat in 3 Terminen folgende Zahlungen zu leisten: 3425 fl. nach 4 Monaten, 2850 fl. nach 6 Monaten und 4750 fl. nach 8 Monaten. Der Gläubiger wünscht aber die ganze Summa auf einmal, wann muss die Zahlung geschehen?

$$x = 6\frac{106}{441}.$$

164. Ein Kaufmann macht sich verbindlich einem andern 12000 Thl. auf 15 Monate zu leihen. Da er aber diese Summa nicht auf einmal aufbringen kann, so vereinigen sich beide, dass sofort 3000 Thl. bezahlt werden, nach Verlauf von 4 Monaten 4000 Thl. und wieder nach 4 Monaten der Rest. Wie lange kann er das ganze Geld noch behalten?

$$x = 11^2/_3.$$

165. Jemand erhandelt eine gewisse Waare um 4500 fl., nach Verlauf eines Jahres zahlbar. Käufer und Verkäufer kommen jedoch überein, dass 3000 fl. sofort baar bezahlt werden und der Rest in drei gleichen Raten und Terminen. Wie lang kann ein Termin sein?

$x = 18$ Mt.

166. Ein Fleischer macht mit einem Landwirthe einen Accord, nach welchem sich dieser verpflichtet 16 Ochsen auf 12 Monate zu füttern. Der Fleischer schickt auch die 16 Ochsen, aber nach 3 Monaten schickt er noch 8 und nach $3\frac{1}{3}$ Monat später noch 6 Ochsen. Wie lang werden sämmtliche Thiere für das nämliche Geld gefüttert werden?

$x = 2\frac{2}{15}$ M.

167. Jemand hat nach 2 Monaten 1500 fl., nach 3 Monaten 1600 fl. und nach 18 Monaten den Rest seiner Schuld zu zahlen, oder wenn er will die ganze Summa nach 10 Monaten.

$x = 6000$ fl., Rest 2900 fl.

168. Drei Personen legen zu einem Geschäfte eine gewisse Summa zusammen; B gibt $\frac{1}{5}$ mehr als A und C 200 Thl. mehr als A und B zusammen. Sie machen einen Gewinn von 3600 Thl., davon kommt auf den Theil des C 1840 Thl.

$x = 2000$.

169. Eine im gleichseitigen dreieckigen Verbande und 5' Entfernung der Pflanzen angelegte Baumpflanzung soll im quadratischen Verbande bei gleicher Entfernung der Pflanzen angelegt werden, dadurch werden 13400 Pflanzen erspart.

$x = 54{,}125$ Tagw. bayer.

170. Die Länge eines Gartens beträgt 8' mehr als die Breite; nachdem von der Länge 12' und von der Breite 4', im Ganzen 2224 □' verkauft wurden, bildet er gerade ein Quadrat. Wie lang und breit war er ursprünglich?

Länge 148', Breite 140'.

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 185—248; Heis §. 63.

---

## b. Mit zwei und mehreren Unbekannten.

§. 132.

**Erklärung 1.** Aus einer Gleichung mit mehreren Unbekannten (x, y, z...) lässt sich der Werth für die einzelnen Unbekannten nicht genau bestimmen.

Um in einer Aufgabe die Werthe der Unbekannten genau bestimmen zu können, müssen so viel Gleichungen als unbekannte Grössen vorhanden sein; und diese Gleichungen müssen wesentlich von einander verschieden sein und dürfen doch nicht zugleich mit einander in Widerspruch stehen.

**Erklärung 2.** Um den Werth der Unbekannten zu bestimmen, hat man nach den Gesetzen der Zahlenverbindungen alle Unbekannten aus den gegebenen Gleichungen zu eliminiren, bis man auf eine Gleichung mit einer Unbekannten kommt. Diese eine Unbekannte zu bestimmen hat aber hier keine Schwierigkeit mehr; und ist ihr Werth bestimmt, so findet sich der Werth aller andern Unbekannten ohne Schwierigkeit durch Substitution.

**Erklärung 3.** Die Elimination der Unbekannten kann unter Anwendung vier verschiedener Grundsätze vor sich gehen. Danach gibt es vier verschiedene Eliminations-Methoden.

§. 133.

**Erklärung 1.** Die allgemeinen Formen für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten seien:

$$1.\ ax + by = c.$$

$$2.\ px + qy = s.$$

I.

### Die Coëfficienten-Methode (englische) nach den Grundsätzen: Gleiches zu Gleichem addirt, gibt Gleiches; Gleiches von Gleichem subtrahirt, bleibt Gleiches.

**Verfahren.**

1) Die gegebenen Gleichungen sind auf die obigen Formen zu bringen, damit die Unbekannten unter einander stehen.

2) Diejenige Unbekannte, welche sich am leichtesten entfernen lässt, wird eliminirt.

3) Hat die zu entfernende Unbekannte den gleichen Coëfficienten, so werden die Gleichungen in eine zusammengezogen entweder durch Addition oder Subtraction je nach der Art der Vorzeichen bei der zu eliminirenden Unbekannten. Sind die Coëfficienten ungleich, so werden sie erst gleich gemacht, indem man mit dem Coëfficienten in der zweiten Gleichung alle Glieder der ersten Gleichung multiplicirt und umgekehrt.

4) Haben beide Coefficienten einen gemeinschaftlichen Factor, so lässt man ihn bei der Multiplication weg.

## Allgemein.

$$ax + by = c$$
$$px + qy = s; \text{ wird } y \text{ eliminirt, so ist:}$$

$$aqx + bqy = cq \quad (\text{mit } q \text{ multipl.})$$
$$bpx + bqy = bs \quad (\text{mit } b \text{ multipl.})$$
$$- \quad - \quad -$$

$$aqx - bpx = cq - bs \quad (\text{p. Subtract.})$$
$$x(aq - bp) = cq - bs$$
$$x = \frac{cq - bs}{aq - bp} = \frac{bs - cq}{bp - aq} \quad \text{cf. §. 60, Zusatz 2.}$$

Anmerkung. Der Werth für y ergibt sich, wenn man x auf dieselbe Weise eliminirt oder den gefundenen Werth von x in eine der beiden Gleichungen einsetzt.

## Beispiele.

1.

$$2x + 10y = 14$$
$$3x - 4y = 2 \quad (y \text{ eliminirt, so ist:})$$

$$4x + 20y = 28 \quad (\text{Factor } 2; \text{ hier mit } 2 \text{ multipl.})$$
$$15x - 20y = 10 \quad (\text{hier mit } 5 \text{ multipl.})$$

$$19x = 38$$
$$x = \frac{38}{19} = 2;$$

p. subst. in 1. Gleichung:

$$4 + 10y = 14;$$
$$10y = 10;$$
$$y = 1.$$

2.

$$3\,x = 15\frac{1}{2} - y$$

$$2\frac{x}{2} - y = 3\frac{3}{4} \quad \text{(ordnen durch Transponiren.)}$$

---

$$3\,x + y = 15\frac{1}{2}$$

$$\frac{5\,x}{2} - y = \frac{15}{4}$$

---

$$\frac{11\,x}{2} = \frac{77}{4}$$

$$22\,x = 77$$

$$x = \frac{77}{22} = 3\frac{1}{2}.$$

per subst.

$$y = \frac{31}{2} - \frac{21}{2} = \frac{10}{2}$$

$$= 5.$$

3.

$$12\,x = 27 + 3\frac{y}{2}.$$

$$16\frac{y}{2} = 115 - 4\,x$$

---

$$24\,x - 7\,y = 54$$

$$8\,x + 33\,y = 230$$

---

$$24\,x - 7\,y = 54$$

$$24\,x + 99\,y = 690$$

---

$$106\,y = 636$$

$$y = \frac{636}{106} = 6.$$

per subst.

$$12\,x = 27 + 21$$

$$x = \frac{48}{12}.$$

$$x = 4.$$

4.

$$\frac{a\,x}{m} + \frac{b\,y}{n} = d$$

$$\frac{a\,x}{c} - \frac{m\,y}{n} = k$$

---

$$a\,n\,x + b\,m\,y = d\,m\,n$$

$$a\,n\,x - c\,m\,y = c\,k\,n$$

$$- \qquad + \qquad -$$

---

$$y\,(b\,m + c\,m) = n\,(d\,m - c\,k)$$

$$y = \frac{n\,(d\,m - c\,k)}{m\,(b + c)}.$$

oder wir eliminiren y, um x zu bestimmen, so ist:

$$a\,n\,x + b\,m\,y = d\,m\,n$$

$$a\,n\,x - c\,m\,y = c\,k\,n$$

---

$$a\,c\,n\,x + b\,c\,m\,y = c\,d\,m\,n$$

$$a\,b\,n\,x - b\,c\,m\,y = b\,c\,k\,n$$

---

$$x\,(a\,b\,n + a\,c\,n) = c\,n\,(d\,m + b\,k)$$

$$x = \frac{c\,(d\,m + b\,k}{a\,(b + c)}.$$

## II.

## Die Substitutions-Methode nach dem Grundsatze: Gleiches für Gleiches gesetzt, gibt Gleiches.

### Verfahren.

1) Man bestimmt in einer Gleichung den Werth für die eine Unbekannte.

2) Diesen Werth setzt man in die andere Gleichung ein. Das gibt eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, die nach den bekannten Gesetzen leicht aufzulösen ist.

3) Man nimmt gern diejenige Unbekannte, welche den einfachsten Ausdruck gibt.

### Allgemein.

$$ax + by = c.$$

$$x = \frac{c - by}{a} \text{ und } y = \frac{c - ax}{b}.$$

Setzt man einen dieser Werthe, etwa von y, in die Gleichung:

$$px + qy = s,$$

so ist:

$$px + q\left(\frac{c - ax}{b}\right) = s$$

$$px + \frac{cq - aqx}{b} = s$$

$$bpx + cq - aqx = bs$$

$$x(bp - aq) = bs - cq$$

$$x = \frac{bs - cq}{bp - aq} = \frac{cq - bs}{aq - bp}.$$

Anmerkung. Der Werth für y ergibt sich, wenn man entweder auf dieselbe Weise x eliminirt oder den gefundenen Werth von x in eine der gegebenen Gleichungen einsetzt. Nach letzterem ist:

$$y = c - a\left(\frac{bs - cq}{bp - aq}\right) : b$$

$$y = \frac{cp - as}{bp - aq}.$$

### Beispiele.

1.

$$6x = 123 - 7y \quad\Big|\quad 6x - 5y = 15$$

$$6x = 123 - \frac{7(6x - 15)}{5} \quad\Big|\quad \frac{6x - 15}{5} = y$$

$$30x = 615 - 42x + 105$$

$$72x = 720 \qquad\qquad \frac{60 - 15}{5} = y.$$

$$x = \frac{720}{72} = 10. \qquad\qquad y = 9.$$

2.

$$11\frac{x}{2} + 7\frac{y}{2} = 2\frac{1}{8} \quad\Big|\quad 16x = 6 - 15y$$

$$23x + 15y = \frac{17}{4} \quad\Big|\quad y = \frac{6 - 16x}{15}$$

$$23x + \frac{(6 - 16x)15}{15} = \frac{17}{4} \qquad y = \frac{6 + 4}{15}$$

$$92x + 24 - 64x = 17 \qquad y = \frac{10}{15}$$

$$28x = 17 - 24$$

$$x = -\frac{7}{28} = -\frac{1}{4} \qquad y = \frac{2}{3}.$$

## III.

Die Combinations-Methode nach dem Grundsatze: zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

### Verfahren.

1) Man sucht in beiden Gleichungen den Werth derselben Unbekannten.

2) Die gefundenen Werthe werden einander gleich gesetzt; dies gibt eine neue Gleichung mit einer Unbekannten, deren Werth leicht zu bestimmen ist.

3) Den Werth der andern Unbekannten erlangt man durch Substitution.

### Allgemein.

$$ax + by = c \quad\Big|\quad px + qy = s$$

$$y = \frac{c - ax}{b} \qquad\qquad y = \frac{s - px}{q}$$

$$\frac{c - a x}{b} = \frac{s - p x}{q}$$

$$c q - a q x = b s - b p x$$

$$x (b p - a q) = b s - c q$$

$$x = \frac{b s - c q}{b p - a q}.$$

Anmerkung. Auf dieselbe Weise lässt sich y bestimmen, wenn man x eliminirt oder wenn man den gefundenen Werth von x in eine der gegebenen Gleichungen einsetzt.

## Beispiele.

1.

$$3 x - 52 = -7 y \quad \Big| \quad 12 = 1 \frac{x}{4} + \frac{y}{2}$$

$$7 y = 52 - 3 x \qquad 48 = 5 x + 2 y$$

$$y = \frac{52 - 3 x}{7} \qquad \frac{48 - 5 x}{2} = y$$

$$\frac{52 - 3 x}{7} = \frac{48 - 5 x}{2}$$

$$104 - 6 x = 336 - 35 x$$

$$29 x = 336 - 104$$

$$x = \frac{232}{29} = 8.$$

$$y = \frac{52 - 24}{7} = 4.$$

2.

$$2 \frac{a x}{2} + a y = 24 a \quad \Big| \quad 3 \frac{b y}{2} = 26 b - 1 \frac{b x}{2}$$

$$\frac{5 a x}{2} + a y = 24 a \qquad \frac{7 b y}{2} = 26 b - \frac{3 b x}{2}$$

$$2 a y = 48 a - 5 a x \qquad 7 b y = 52 b - 3 b x$$

$$y = \frac{48 - 5 x}{2} \qquad y = \frac{52 - 3 x}{7}$$

$$\frac{48 - 5 x}{2} = \frac{52 - 3 x}{7}$$

$$336 - 35 x = 104 - 6 x$$

$$232 = 29 x$$

$$8 = x$$

$$4 = y.$$

3.

$$2x - \frac{3y}{10} = 40{,}5 \qquad \Big| \qquad \frac{3}{4}\sqrt{4x^2 + 9x + 9y - 245} = \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 + 7x + 7y + 98}$$

$$20x - 3y = 405 \qquad 3\sqrt{4x^2 + 9x + 9y - 245} = 2\sqrt{9x^2 + 7x + 7y + 98}$$

$$20x = 405 + 3y \qquad 36x^2 + 81x + 81y - 2205 = 36x^2 + 28x + 28y + 392$$

$$x = \frac{405 + 3y}{20} \qquad 53x = 2597 - 53y$$

$$x = 49 - y.$$

$$\frac{405 + 3y}{20} = 49 - y$$

$$405 + 3y = 980 - 20y.$$

$$23y = 575$$

$$y = 25$$

$$x = 49 - 25 = 24.$$

4.

$$\frac{m - x}{n} - \frac{n - y}{a} = a - b \qquad \Big| \qquad \frac{x}{m} - \frac{m + y}{a} = m - n$$

$$am - ax - n^2 + ny = a^2n - abn \qquad ax - m^2 - my = am^2 - amn$$

$$ny = a^2n - abn - am + ax + n^2 \qquad ax - m^2 - am^2 + amn = my$$

$$y = \frac{a^2n - abn - am + ax + n^2}{n} \qquad \frac{ax - m^2 - am^2 + amn}{m} = y$$

$$\frac{a^2n - abn - am + ax + n^2}{n} = \frac{ax - m^2 - am^2 + amn}{m}$$

$$a^2mn - abmn - am^2 + amx + mn^2 = anx - m^2n - am^2n + amn^2$$

$$amx - anx = abmn - a^2mn + am^2 - mn^2 - m^2n - am^2n + amn^2$$

$$x = \frac{abmn - a^2mn + am^2 - mn^2 - m^2n - am^2n + amn^2}{a(m - n)}$$

$$y = \frac{abmn - a^2mn + am^2 - mn^2 - m^2n - am^2n + amn^2}{(m - n)m}$$

$$\frac{- m^3 - am^3 + 2am^2n + m^2n - am^2n}{(m - n)m}$$

$$y = \frac{abn - a^2n + am - n^2 - m^2 - am^2 + amn}{m - n}$$

## IV.

Die Bézout'sche Methode (französische) nach dem Grundsatze: ein Product wird Null, wenn ein Factor desselben Null wird. (§. 35, Zus. 2.)

### Verfahren.

1) Man multiplicirt die eine der gegebenen Gleichungen mit einem unbestimmten Factor m.
2) Die so gewonnene Gleichung wird zur andern addirt. Das gibt eine neue Gleichung.
3) In dieser Gleichung setzt man den Coëfficienten der zu eliminirenden Unbekannten gleich Null und bestimmt den Werth des unbestimmten Factors m.
4) Dieser Werth wird dann in die durch Addition gewonnene Gleichung eingesetzt und die Unbekannte bestimmt.

### Allgemein.

$ax + by = c \quad | \quad px + qy = s$

$amx + bmy = cm$ (die erste Gl. multipl. mit m)

$amx + bmy + px + qy = cm + s$ (nach Addit. mit Gl. 2)

$x(p + am) + y(q + bm) = s + cm$

$q + bm = 0$ (der Coëfficient von $y = 0$ gesetzt)

$bm = -q$

$m = -\frac{q}{b}.$

$x\left(p - \frac{aq}{b}\right) = s - \frac{cq}{b}$ (der Werth von m in die durch Addit. erlangte Gl. eingesetzt.)

$$x = \left(s - \frac{cq}{b}\right) : \left(p - \frac{aq}{b}\right) = \frac{bs - cq}{bp - aq}.$$

Anmerkung 1. Auf gleiche Weise kann y bestimmt werden, wenn man den Coëfficienten von $x = 0$ setzt.

Anmerkung 2. Bei n gegebenen Gleichungen hat man mit $n - 1$ Factoren zu multipliciren.

### Beispiele.

1.

$9x - 10y = \frac{1}{2} \quad | \quad 8y = 4\frac{1}{2} - 7\frac{x}{2}$

$18x - 20y = 1 \qquad 15x + 16y = 9$

$18mx - 20my = m$

$15x + 18mx + 16y - 20my = 9 + m$

$x(15 + 18m) + y(16 - 20m) = 9 + m$

$15 + 18m = 0$

$18m = -15$

$m = -\frac{5}{6}$

$$y\left(16 + \frac{100}{6}\right) = 9 - \frac{5}{6}$$

$$\frac{196\,y}{6} = \frac{49}{6}$$

$$9\,x = \frac{10}{4} + \frac{1}{2} \qquad 196\,y = 49$$

$$9\,x = 3. \qquad y = \frac{49}{196} = \frac{1}{4}.$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

2.

$$6\,x = 62 - 2\,y \qquad | \qquad 10\,x = 30 + 4\,y$$

$$6\,m\,x + 2\,m\,y = 62\,m \qquad 10\,x - 4\,y = 30$$

$$10\,x + 6\,m\,x + 2\,m\,y - 4\,y = 30 + 62\,m$$

$$x\,(10 + 6\,m) + y\,(2\,m - 4) = 30 + 62\,m$$

$$2\,m - 4 = 0$$

$$m = 2$$

$$x\,(10 + 12) = 30 + 124$$

$$x = \frac{154}{22} = 7$$

$$70 - 30 = 4\,y$$

$$40 = 4\,y$$

$$y = 10.$$

**Erklärung 2.** Von den vier Auflösungs-Methoden verdient die erste den Vorzug. Doch hat man sich mit allen vier vertraut zu machen, weil bei den verschiedenen Aufgaben, je nach ihren besondern Eigenschaften, die eine vor der andern oft viel leichter zum Ziele führt.

**Erklärung 3.** Gleichungen mit 3, 4...n Unbekannten werden ebenfalls nach den angegebenen Methoden aufgelöst. Man eliminirt aus n gegebenen Gleichungen eine Unbekannte, so bleiben noch n—1; diese geben n—1 Gleichungen. Aus diesen wird die zweite Unbekannte entfernt; dadurch bekommt man n—2 Unbekannte und ebenso viel Gleichungen. Auf diese Weise wird fortgefahren bis man die letzte Unbekannte bestimmt hat. Die einzelnen Werthe der eliminirten Grössen findet man auch hier durch Substitution.

## §. 134.

### Besondere Formen und Lösungen.

I.

**Erklärung.** Wenn zwei Unbekannte durch ihre Summa und Differenz bestimmt werden sollen, so ist die grössere derselben gleich der halben

Summa und der halben Differenz; die kleinere aber gleich der halben Summa weniger der halben Differenz.

**Allgemein.**

Ist:

$$x + y = s$$

$$\underline{x - y = d}$$

$$2x = s + d$$

so ist:

1. $$x = \frac{s+d}{2} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$$

und

$$2y = s - d$$

2. $$y = \frac{s-d}{2} = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}.$$

**Beispiel.**

$$x + y = 34$$

$$\underline{x - y = 14}$$

$$x = \frac{34}{2} + \frac{14}{2} = 24.$$

$$y = \frac{34}{2} - \frac{14}{2} = 10.$$

II.

**Erklärung.** Bei Gleichungen, in welchen die Unbekannten als Nenner von Brüchen erscheinen, kommt man auf folgende Weise eher zum Ziele.

**Allgemein.**

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c.$$

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = s.$$

Es ist hier $\frac{a}{x}$ soviel als $a \cdot \frac{1}{x}$ und $\frac{b}{y}$ soviel als $b \cdot \frac{1}{y}$ u. s. w.; setzt man $\frac{1}{x} = x_1$ und $\frac{1}{y} = y_1$, so gestalten sich die gegebenen Gleichungen also:

$$a x_1 + b y_1 = c$$

und

$$p x_1 + q y_1 = s$$

$$x_1 = \frac{cq - bs}{aq - bp} \text{ p. subst. } x = \frac{aq - bp}{cq - bs}$$

$$y_1 = \frac{cp - as}{bp - aq} \text{ p. subst. } y = \frac{bp - aq}{cp - as}.$$

## Beispiele.

1.

$$\text{I. } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6.$$

$$\text{II. } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 7.$$

$$\text{III. } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 8.$$

Das gibt:

$$\text{I. } x_1 + y_1 = 6$$

$$\text{II. } x_1 + z_1 = 7$$

$$\text{III. } y_1 + z_1 = 8.$$ Die Differenz von I. und II.

gibt: $z_1 - y_1 = 1$; diese Gleichung und III.

gibt: $2 z_1 = 9$

$$z_1 = \frac{9}{2}; \quad z = \frac{2}{9}$$

$$y_1 = \frac{7}{2}; \quad y = \frac{2}{7}$$

$$x_1 = \frac{5}{2}; \quad x = \frac{2}{5}.$$

2.

$$\frac{12}{29} = \frac{xz}{7x + 2z}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{yz}{6y + 5z}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{xy}{4x + 3y}.$$ Die Nenner weggeschafft,

gibt: $84x + 24z = 29xz$; dividirt mit $xz$, so ist: $\frac{84}{z} + \frac{24}{x} = 29$

$12y + 10z = 7yz$; „ „ $yz$, „ „: $\frac{12}{z} + \frac{10}{y} = 7$

$20x + 15y = 13xy$; „ „ $xy$, „ „: $\frac{20}{y} + \frac{15}{x} = 13$

Das gibt:

$$\text{I. } 84 z_1 + 24 x_1 = 29$$
$$\text{II. } 12 z_1 + 10 y_1 = 7$$
$$\text{III. } 20 y_1 + 15 x_1 = 13.$$

Aus der Subtraction der Gleichung I vom 7fachen der II. Gleichung erhalten wir:

$$70 y_1 - 24 x_1 = 20;$$

diese Gleichung mit 2 multiplicirt und von der mit 7 multiplicirten Gleichung III subtrahirt, gibt:

$$153 x_1 = 51$$
$$x_1 = \frac{51}{153} = \frac{1}{3}; \quad x = 3.$$
$$y_1 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}; \quad y = 2\frac{1}{2}.$$
$$z_1 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}; \quad z = 4.$$

## §. 135.

### Beispiele.

1.

$$\frac{2x}{y} = \frac{2}{7} \quad \Bigg| \quad y + 2x + 2 = \frac{3y^2 + xy - 10x^2}{3y - 5x - 2}$$

$$14x = 2y \qquad 3y^2 + xy + 4y - 10x^2 - 14x - 4 = 3y^2 + xy - 10x^2$$

$$x = \frac{2y}{14} \qquad 4y - 4 = 14x$$

$$\frac{4y-4}{14} = x$$

$$\frac{2y}{14} = \frac{4y-4}{14}$$
$$2y = 4y - 4$$
$$4 = 2y$$
$$2 = y$$
$$\frac{2}{7} = x.$$

2.

$$\frac{1}{6}(6x-2y-4z) = \frac{2x+10}{8} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{5}(3x-2y) - \frac{1}{3}(z-y) = 3 \quad \Bigg| \quad y - \frac{1}{2}(x-z-1) = 6$$

$$12x - 4y - 8z = 3x + 15 \qquad 9x - 6y - 5z + 5y = 45 \qquad 2y - x + z + 1 = 12$$

$$9x = 15 + 4y + 8z \qquad 9x = 45 + y + 5z \qquad 2y + z - 11 = x$$

$$x = \frac{15+4y+8z}{9} \qquad x = \frac{45 + y + 5z}{9}$$

$$\frac{15+4y+8z}{9}=\frac{45+y+5z}{9}$$

$$15+4y+8z=45+y+5z$$

$$3y+3z=30$$

$$y=10-z.$$

$$\frac{45+y+5z}{9}=2y+z-11.$$

$$45+y+5z=18y+9z-99.$$

$$144=4z+17y.$$

$$\frac{144-4z}{17}=y.$$

$$10-z=\frac{144-4z}{17}$$

$$170-17z=144-4z$$

$$26=13z$$

$$2=z$$

$$8=y$$

$$7=x.$$

3.

I. $15x+28y+39z=46$

II. $15x+24y+12z=26$

III. $5x+20y+12z=20$

IV. $4y+27z=20$ (Diff. zwischen II. und I).

V. $32y-3z=14$ (durch Subtract. des dreifachen der III. von I).

$219z=146$ (durch Subtract. der V. vom achtfachen der IV).

$$z=\frac{146}{219}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{2}{5}.$$

4.

I. $x+y+z+t=4$

II. $16x+8y+4z+2t=36$

III. $81x+27y+9z+3t=144$

IV. $256x+64y+16z+4t=400$

$x+y+z+t=4$

$15x+7y+3z+t=32$ (durch Subtract. der I. von der II.)

$65x+19y+5z+t=108$ (durch Subtract. der II. von der III.)

$175x+37y+7z+t=256$ (durch Subtract. der III. von der IV.)

$14x+6y+2z=28$ u. s. w.

$50x+12y+2z=76$

$110x+18y+2z=148$

$36x+6y=48$

$60x+6y=72$

$24x=24$

$x=1$

$y=2$

$z=1$

$t=0.$

5.

$$a^x \cdot b^y = c$$
$$p^x : b^y = r$$

$$x \log a + y \log b = \log c$$
$$x \log p - y \log b = \log r$$

$$x \log a + x \log p = \log c + \log r$$
$$x (\log a + \log p) = \log c + \log r$$
$$x = \frac{\log c + \log r}{\log a + \log p}.$$

6.

$$\sqrt{x\sqrt{x^2-4xy+y\sqrt{16y^2-y-x+4}+y^2}}=x-y \quad\Big|\quad x-\sqrt{x^2-y\sqrt{y^2+8x}}=y$$

$$x\sqrt{x^2-4xy+y\sqrt{16y^2-y-x+4}+y^2}=x^2-2xy+y^2, \quad x^2-2xy+y^2=x^2-y\sqrt{y^2+8x}$$

$$\sqrt{x^2-4xy+y\sqrt{16y^2-y-x+4}}=x-2y \qquad 2x-y=\sqrt{y^2+8x}$$

$$x^2-4xy+y\sqrt{16y^2-y-x+4}=x^2-4xy+4y^2 \qquad 4x^2-4xy+y^2=y^2+8x$$

$$\sqrt{16y^2-y-x+4}=4y \qquad 4x^2-4xy=8x$$

$$16y^2-y-x+4=16y^2 \qquad x-y=2$$

$$4-y=x \qquad x=2+y$$

$$4-y=2+y$$
$$2y=2$$
$$y=1$$
$$x=3.$$

7.

$$\frac{2}{5}\sqrt{10z}=\frac{x+y}{\sqrt{x+y}} \quad\Big|\quad \sqrt{2x-y+z}+12=15. \quad\Big|\quad \sqrt[3]{x+y-z+5}+8=10$$

$$\frac{2}{5}\sqrt{10z}=\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x+y}} \qquad \sqrt{2x-y+z}=3 \qquad \sqrt[3]{x+y-z+5}=2$$

$$2\sqrt{10z}=5\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x+y}} \qquad 2x-y+z=9 \qquad x+y-z+5=8$$

$$40z=25x+25y \qquad 2x=9+y-z \qquad x+y-z=3$$

$$8z=5x+5y \qquad x=\frac{9+y-z}{2} \qquad x=3-y+z.$$

$$x=\frac{8z-5y}{5}$$

$$\frac{8z - 5y}{5} = \frac{9 + y - z}{2} \qquad \frac{9 + y - z}{2} = 3 - y + z$$

$$16z - 10y = 45 + 5y - 5z \qquad 9 + y - z = 6 - 2y + 2z$$

$$21z - 15y = 45 \qquad 3 = -3y + 3z$$

$$7z - 5y = 15 \qquad 1 = -y + z$$

$$\frac{7z - 15}{5} = y \qquad y = z - 1.$$

$$\frac{7z - 15}{5} = z - 1$$

$$7z - 15 = 5z - 5$$

$$2z = 10$$

$$z = 5$$

$$y = 4$$

$$x = 4.$$

## §. 136.

### Aufgaben.

#### I.

1. $2 + \frac{y}{2} = \frac{3x}{2}$, $\frac{2y}{5} - 2x + 16 = 0$ $\Big\}$ $x = 18.$ $y = 50.$

2. $\frac{x + 6}{2y - 7} = 8$, $4 = \frac{4x + 2y}{y}$ $\Big\}$ $x = 2.$ $y = 4.$

3. $1 = \frac{18}{x + y}$, $\frac{2x + 2y}{x - y} = 18$ $\Big\}$ $x = 10.$ $y = 8.$

4. $16x + 6y = 72$, $10x + 2 = 8y$ $\Big\}$ $x = 3.$ $y - 4.$

5. $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 5\frac{2}{3}$, $14 = \frac{4}{x} + \frac{5}{y}$ $\Big\}$ $x =$ $y =$

6. $\frac{4y - 3x + 9}{2} = \frac{10x - 8}{3} - \frac{8y - 22}{5}$, $\frac{x + y - 5}{2} - \frac{4y + 10}{3} = \frac{x - 59}{4}$ $\Big\}$ $x =$ $y =$

7. $9x - 7 = 9\sqrt{x^2 - 4y + 8} + 11$, $\sqrt{3x - 2y - 2} = \sqrt{2y - 16}$ ⎫ $x = 10.$ $y = 11.$

8. $d - k = \frac{m - x}{n} - \frac{n - y}{d}$, $\frac{x}{m} - \frac{m + y}{d} = m - n$ ⎫ $x = m(dmn + mn - dm - dn^2 + n^2 + d^2n - dkn) : d(n - m).$ $y = (m^2 + dm^2 - dm - dmn + n^2 + d^2n - dkn) : n - m.$

9. $2x + 2y + z = 40$, $x + 3y + 4z = 60$, $x + 2y = 30 - z$ ⎫ $x = 10.$ $y = 6.$ $z = 8.$

10. $\frac{x + 5}{12} = \frac{3x - y - 2z}{9}$, $6 + \frac{2z - 2y}{3} = \frac{6x - 4y}{5}$, $2y - x + z = 11.$ ⎫ $x = 7.$ $y = 8.$ $z = 2.$

11. $8x - 14 + 2y = 14$, $6z + 4x = 8$, $2y - 28 + 12z = 0$ ⎫ $x = 1.$ $y = 10.$ $z = \frac{2}{3}.$

12. $4x + 6y + 9 = 8z + 5$, $2x - 2\frac{y}{2} + 13 = 3z$, $17 - 3\frac{y}{2} = 4z - 3x$ ⎫ $x = 3.$ $y = 4.$ $z = 5.$

13. $3x - 5z = 4 - 4y$, $2y + 1\frac{z}{2} - 19 = -\frac{x}{2}$, $2z + 4x + 4 = 20 + 3y$ ⎫ $x = 5.$ $y = 6.$ $z = 7.$

14. $\frac{m}{y} + \frac{k}{z} - n = m + k - \frac{n}{x}$, $\frac{n}{x} + k - 3m = \frac{m}{y} - \frac{k}{z} - n.$, $\frac{n(m - k)}{x} + \frac{m(k - n)}{y} = -\frac{k(n - m)}{z}$ ⎫ $x = \frac{n}{k + m - n}.$ $y = \frac{m}{k + n - m}.$ $z = \frac{k}{m + n - k}.$

15. $25 = 2x + y + 3z$, $7x - 68 = -3z - 8y$, $4z + 2\frac{x}{2} + 1{,}5y = 33{,}5$ ⎫ $x =$ $y =$ $z =$

16. $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 9 \\ \frac{2}{z} = 4 - \frac{2}{x} \\ \frac{2}{y} - 5 = \frac{2}{z} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \\ y = \\ z = \end{array}$

17. $\left.\begin{array}{l} xy = 8 \\ xz = 24 \\ yz = 64 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \\ y = \\ z = \end{array}$

18. $\left.\begin{array}{l} \frac{24}{2x + 3y} - 2 = \frac{15}{3x + 4z} \\ \frac{55{,}5}{5y + 9z} - 1{,}25 = \frac{2}{2x + 3y} \\ \frac{15}{3x + 4z} + \frac{18{,}5}{5y + 9z} - 1{,}5 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \\ y = \\ z = \end{array}$

19. $\left.\begin{array}{l} x + \frac{y}{2} = 6 - \frac{z}{2} \\ 1\frac{1}{4}x - \frac{z}{4} = 7 - \frac{3v}{4} \\ 6y + 8z - 4v = 22 \\ 4y + 6x = 10 + 2v \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3. \\ y = 1. \\ v = 6. \\ z = 5. \end{array}$

20. $\left.\begin{array}{l} 3x - 5z + y = 26 \\ 8x - 9y = 6 \\ 3z + 4x = 5y - v + 12 \\ 95 - 2x = 7x - y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \\ y = \\ z = \\ v = \end{array}$

**Anmerkung.** **Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 255—269; 270—286. Heis §. 65.**

## II.

21. Zwei Zahlen geben zur Summa 48 und zur Differenz 18.

$x = 33;\ y = 15.$

22. Zwei Zahlen geben zur Summa 30 und zum Quotienten $^2/_3$.

$x = 12;\ y = 18.$

23. Zwei Zahlen sind sich gleich, wenn man von der ersten 1 subtrahirt und zur zweiten addirt, verfährt man umgekehrt, so wird die erste das Doppelte der zweiten.

$x = 7;\ y = 5.$

24. Eine zweizifferige Zahl durch ihre um 2 verminderte Ziffernsumma dividirt, gibt 8 zum Quotienten, werden ihre Ziffern in umgekehrter Ordnung um 6 vermindert und durch 4 dividirt, so ist der Quotient gleich ihrer Ziffernsumma.

$x = 60;\ y = 4;$ die Zahl 64.

25. Eine zweizifferige Zahl durch eine andere Zahl dividirt, die um 3 grösser ist als die $1\,{}^2/_3$fache Ziffernsumma der gesuchten Zahl, gibt zum Quotienten $1\,{}^1/_2$; wird zu ihr ihre 3fache Ziffernsumma addirt, so erhält man die Ziffern der gesuchten Zahl, aber in umgekehrter Ordnung.

12.

26. Differenz, Summa und Product zweier Zahlen verhalten sich wie $3:5:12$.

$x = 12;\ y = 3.$

27. Die Summa zweier Zahlen durch ihre Differenz dividirt, gibt 8 zum Quotienten und zum Reste 1; ihre 5fache Summa ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

$x = 23;\ y = 18.$

28. Die Summa dreier Zahlen ist 20; das ${}^1/_2$fache der ersten, das ${}^1/_4$fache der zweiten, das ${}^1/_3$fache der dritten addirt ist gleich $6\,{}^3/_4$, während das ${}^1/_9$fache der dritten und ${}^1/_7$fache der zweiten und ${}^1/_4$fache der ersten gleich 3 ist.

$x = 4;\ y = 7;\ z = 9.$

29. Wenn man zum Zähler eines gemischten Bruches 37 addirt, so gibt es $14\,{}^1/_5$, und wenn man von seinem Nenner 30 subtrahirt, so gibt es $14\,{}^2/_{15}$, und vollzieht man beide Operationen an Zähler und Nenner zugleich, so erhält man $16\,{}^3/_5$.

$13\,{}^{17}/_{45}$.

30. Es sind 4 Zahlen; addirt man zur Summa der ersten und zweiten die dritte, so gibt es 25, addirt man zu jener Summa die vierte, so gibt es 27; addirt man zur Summa der dritten und vierten die erste, so gibt es 29 und zur nämlichen Summa die zweite addirt, gibt 33.

$x = 5;\ y = 9;\ z = 11;\ t = 13.$

31. Es sind 4 Zahlen; dividirt man die Summa aus der ersten und zweiten, aus der ersten und vierten, aus der zweiten und vierten durch die dritte, so erhält man der Reihe nach als Quotienten 3,

2, 3 und als entsprechende Reste 3, 3 und 12; dividirt man aber die Summa aus der dritten und vierten durch die zweite, so ist der Quotient 1.

$x = 12$; $y = 36$; $z = 15$; $t = 21$.

32. Ein Garten wäre ein Quadrat, wäre er um 3 Ruthen kürzer und um 3 Ruthen breiter, wär' er aber um 3 Ruthen länger und um 3 Ruthen schmäler, so wäre er gerade 6mal so lang als breit. Wie gross ist sein Flächeninhalt?

$x = 11,4$ R.; $y = 5,4$ R.; 61,56 □R.

33. Gib mir heute 1 fl. von deiner Baarschaft, sagte der ältere Bruder zu seinem jüngern, dann hab' ich gerade noch einmal so viel wie du; nein, gib du mir lieber 1 fl., sagte dieser, dann haben wir gleichviel.

$x = 7$ fl.; $y = 5$ fl.

34. Ein Jägerbataillon half einem Infanterieregimente mitten im Kampfe mit Patronen aus; es gab ihm $^1/_3$ seines Vorrathes, dadurch besass das Infanterieregiment für den Augenblick gerade 3mal so viel Patronen als das Jägerbataillon. Da aber nur dieses zum Kampfe kam, so lieferte ihm das Infanterieregiment $^1/_3$ seines ganzen Vorrathes ab; dadurch erhielt das Jägerbataillon 5000 Patronen mehr als es ursprünglich hatte.

$x = 15000$ Patr.; $y = 25000$ Patr.

35. Ein Kaufmann will für gutes Tuch geringeres eintauschen; er führt es auch aus, weil er für 5 Ellen von dem seinigen 8 Ellen und $2\,^1/_3$ fl., und für 8 Ellen 12 Ellen und $6\,^1/_3$ fl. baar bekommt.

$x = 5$ fl. 40 kr.; $y = 3$ fl. 15 kr.

36. Eine Hausfrau kauft zwei verschiedene Kleidungsstoffe um 36 fl. 54 kr.; von dem ersten kostet die Elle 1 fl. 18 kr., vom zweiten 1 fl. 30 kr; hätte dagegen vom ersten die Elle 1 fl. 30 kr. und vom zweiten die Elle 1 fl. 18 kr. gekostet, so hätte sie 1 fl. ersparen können.

$x = 10\,^1/_2$; $y = 15\,^1/_2$.

37. Es sind zwei verschiedene Waaren; 4 Stück der ersten und 3 Stück der zweiten kosten zusammen 32 fl. 48 kr.; während $2\,^1/_2$ Stück der ersten und $1\,^1/_2$ Stück der zweiten zusammen 18 fl. 24 kr. kosten.

$x = 4$; $y = 5,6$.

38. Zwei Studirende wollen einem armen aber begabten Commilitonen ein monatliches Stipendium von ihrem Ueberflusse zufliessen lassen und zwar 12 fl.; der erste könnte das Ganze bezahlen, wenn ihm der andere die Hälfte seines Ueberflusses gäbe, und dieser könnte das Ganze bezahlen, wenn ihm der erste $^2/_3$ seines Ueberflusses gäbe.

$x = 9;\ y = 6.$

39. Ein Lehrer vermacht nach seinem letzten Willen seinen vier liebsten Schülern den vierten Theil seines ganzen Vermögens und zwar so, dass der erste und zweite zusammen 3900 fl., der erste und dritte zusammen 3400 fl., der erste und vierte zusammen 3000 fl., der zweite und dritte aber nur 2500 fl. bekommen sollen. Wie hoch war sein Vermögen? 22000 fl. Vermögen.

$x = 2400$ fl.; $y = 1500$ fl.; $z = 1000$ fl.; $t = 600$ fl.

40. Ein Wirth in Tyrol gab mir den Preis seiner Weine so an: 2 Mass der geringen, 3 Mass der mittlern und 4 Mass der besten Sorte kosten zusammen 3 fl.; ebenso hoch kommen je 4 Mass der ersten und zweiten Sorte zusammen mit 2 Mass der dritten, während 5 Maas der ersten und 2 Mass der zweiten und 1 Mass der dritten Sorte nur 2 fl. 15 kr. kosten.

$x = 15;\ y = 18;\ z = 24.$

41. Zwei Wasserbehältnisse, von denen das erste 336 c′ und das zweite 408 c′ Wasser fässt, werden von 2 Röhren gefüllt; für das erste muss die erste Röhre 4, für das zweite muss sie 7 Stunden fliessen, während die zweite Röhre für beide Behälter je 6 Stunden fliesst.

$x = 24$ c′; $y = 40$ c′.

42. Zwei Wasserbehälter, von denen der eine 84 c′, der andere 204 c′ Wasser fässt, werden von zwei Röhren gefüllt; für jenes läuft die erste Röhre 2 Stunden und die zweite 3 Stunden, für dieses fliesst die erste Röhre 7 Stunden, die zweite 6 Stunden. Wie lang müssen beide zugleich fliessen, um einen Fischkasten von 3216 c′ zu füllen?

$x = 12$ c′; $y = 20$ c′; 4 Tag $4^1/_2$ St.

43. Ein Goldarbeiter hat 2 Sorten Silber; 5 Mark der einen mit 1 Mark der andern gemischt, gibt 14löthiges, 2 Mark der ersten

mit 4 Mark der zweiten Sorte gemischt, gibt nur 11löthiges Silber.

$x = 15$; $y = 9$.

44. In einer Münze findet sich blos Feinsilber und 9löthiges; daraus soll eine Legirung gemacht werden, um grobe Silbermünzen zu prägen; diese muss nach dem Münzvertrage 14,4löthig sein und es sollen im Ganzen 4000 Mark legirt werden.

$x = 3085,714\ldots$; $y = 914,285\ldots$

45. Ein silberner Tafelaufsatz von 36 ℔ verliert im Wasser 3,7 ℔; das specifische Gewicht vom Silber ist 10,47 und vom Kupfer 8,78.

$x = 21,76428\ldots$; $y = 14,2298$.

46. Eine Glocke, gemischt aus Kupfer und Zinn, wiegt 10 Ctr., ihr specifisches Gewicht ist 8,42, während das specifische Gewicht für Kupfer allein 8,78 und für Zinn 7,29 ist.

$x = 7,90814\ldots$; $y = 2,09185$.

47. Zwei Touristen, die Sonntags immer rasteten, haben im Ganzen 48 fl. für Fahrten ausgegeben und zwar der erste täglich 40 kr., der zweite täglich 48 kr. nach einer durchschnittlichen Berechnung; wäre der erste so lange auf der Reise gewesen, wie der zweite, und der zweite so lange, wie der erste, so hätte der erste gerade $^2/_3$ der wirklichen Ausgabe des zweiten weniger gebraucht. Wie viel Wochen waren beide auf der Reise?

$x = 6$ Wochen 4 Tag; $y = 4$ Wochen $2^2/_3$ Tag.

48. In einer Familie hat jeder Sohn noch einmal so viel Schwestern als Brüder und jede Tochter gerade so viel Brüder wie Schwestern. Wie stark ist die ganze Familie?

$x = 3$; $y = 4$; 9.

49. Ein Familienvater war vor 8 Jahren 16mal so alt und wird nach 5 Jahren 3mal so alt als sein ältester Sohn.

$x = 40$; $y = 10$.

50. Drei Brüder zählen zusammen gerade 100 Jahre; vor 16 Jahren war der älteste gerade so alt als seine beiden jüngern Brüder zusammen, nach 4 Jahren wird er mit dem jüngsten zusammen das Lebensalter des mittlern Bruders um 40 Jahre übersteigen.

$x = 42$; $y = 32$; $z = 26$.

51. Ein Kaufmann verkauft dreierlei Sorten Tuch; für 3 Ellen der ersten und 4 Ellen der zweiten Sorte bekommt er 33 fl., für 10 Ellen der ersten und 7 Ellen der dritten Sorte bekommt er 99 fl., und für 5 Ellen der zweiten und 3 Ellen der dritten Sorte bekommt er 43 fl. 30 kr.

$x = 5$ fl.; $y = 4$ fl. 30 kr.; $z = 7$ fl.

52. Jemand hat in seiner Baarschaft dreierlei Sorten Geld; 20 Stück der ersten und 27 Stück der zweiten Sorte machen gerade 98 fl., 30 Stück der zweiten und 8 Stück der dritten Sorte machen ebenfalls so viel, während 45 Stück der ersten und 7 Stück der dritten zusammen 103 fl. 15 kr. betragen.

$x = 1$ Thl.; $y = 1$ Fünffrankenthl.; $z = 1$ Doppelthl.

53. An einem Wasserbaue arbeiten 72 Arbeiter um einen Taglohn von 71 fl. 33 kr.; sie vertheilen sich auf 3 Arbeiterklassen: 1 Arbeiter der ersten Klasse bekommt 1 Thl., 1 Arbeiter der zweiten Klasse 1 fl. 6 kr., 1 Arbeiter der dritten Klasse nur 42 kr. Taglohn; bekäme 1 Arbeiter der ersten Klasse einen um den ganzen Taglohn eines Arbeiters der dritten Klasse geringeren Lohn und 1 Arbeiter der zweiten Klasse einen um den ganzen Taglohn eines Arbeiters der dritten Klasse grössern Lohn, so betrüge täglich ihr Gesammtlohn 80 fl. 39 kr.

$x = 11$; $y = 24$; $z = 37$.

54. An 4 verschiedenen Plätzen werden 816 Mann mit Schanzarbeiten beschäftigt; auf jedem Platze soll immer der achte Mann entlassen werden zu anderweitigem Dienste; es blieben im Ganzen nur 714 Mann, die sich auf die 4 Plätze so vertheilen, dass die Mannschaft auf dem ersten und dritten Platze zusammen um 28 Mann stärker wäre als die ganze Mannschaft auf den andern beiden Plätzen. Es kommt aber aus strategischen Gründen Gegenbefehl, nach welchem die Mannschaft nicht vermindert, sondern vermehrt werden soll und zwar auf dem ersten Platze um den vierten, auf dem zweiten Platze um den achten, auf dem dritten Platze um den sechzehnten und auf dem vierten Platze um den dritten Mann, so dass im Ganzen 963 Mann fortan mit Schanzarbeiten beschäftigt sein werden.

$x = 168$; $y = 200$; $z = 256$; $t = 192$ M.

55. A und B spielen mit einander; nach Verlauf mehrerer Spiele hatte A gerade $^1/_8$ seiner mitgebrachten Baarschaft gewonnen,

und hätte er noch 9 fl. gehabt, so hätte er das $^6/_7$fache von der Baarschaft des B besessen; sie spielen aber weiter und nun gewinnt B 7 fl. und besitzt so das $2^1/_2$fache von der Baarschaft des A weniger 1 fl.

$x = 24$ fl.; $y = 45$ fl.

56. A, B und C haben im Ganzen eine Baarschaft von 110 Thl.; nach Verlauf einiger Spiele hat B $^1/_6$ und C $^1/_7$ seiner Baarschaft an A verloren, dieser besitzt nun gerade das $^2/_3$fache von der dermaligen Baarschaft des B und C; in den folgenden Spielen hat aber A $^1/_4$ seiner ganzen Baarschaft und B 3 Thl. weniger als A an C verloren, so dass dieser gerade so viel besitzt als beide zusammen.

$x = 32$; $y = 36$; $z = 42$ Thl.

57. In drei Fässern befinden sich Reste von Wein; giesst man $^1/_3$ des Inhaltes aus dem ersten ins zweite und vom zweiten $^1/_5$ seines nunmehrigen Inhalts ins dritte und aus diesem den $^1/_{11}$fachen Inhalt ins erste, so enthält jedes Fass 40 Mass.

$x = 54$; $y = 32$; $z = 34$.

58. Ein Goldarbeiter hat 3 Sorten Gold von verschiedenem Gehalte: 24-, 18-, 12karatiges, welche zusammen 27 Gewichtseinheiten wiegen; legirt er die erste und zweite Sorte, so bekommt er 20,4karatiges, legirt er die erste und dritte Sorte, so bekommt er 16karatiges Gold.

$x = 6$; $y = 9$; $z = 12$.

59. Ein Behälter von 5415 c′ hat durch zwei Röhren Zufluss; fliesst die erste Röhre 10 Stunden und die zweite 15 Stunden, so ist der Behälter gefüllt; ebenso wird er gefüllt, wenn die erste Röhre 11 Stunden 44,4 Minuten und die zweite Röhre 14 Stunden geöffnet ist. Wie lang müssen beide zugleich fliessen, um den Behälter zu füllen?

$x = 150$; $y = 261$; Zeit 17 St. $24^{216}/_{311}$ M.

60. Von zwei Capitalien trägt $^1/_4$ des ersten zu $3^1/_2$ % und $^1/_9$ des zweiten zu 5% in $9^1/_{10}$ Jahren zusammen 373 fl 6 kr.; der Rest des ersten dagegen zu $3^3/_4$ % und der Rest des zweiten zu $4^1/_4$ % in $1^1/_3$ Jahren 271 fl. 20 kr.

$x = 2400$ Cap.; $y = 3600$ Cap.

61. Ein Capital von 15000 Thl. steht theils um 3, theils um 4, theils um 5 % auf Hypotheken und trägt jährlich 560 Thl.; würde der erste Theil um $1\frac{1}{2}$ Thl., der zweite um 1 Thl., der dritte um $\frac{1}{2}$ Thl. höher ausgeliehen, so trügen die Zinsen 730 Thl.

$x = 7500$ Thl.; $y = 4000$ Thl.; $z = 3500$ Thl.

62. Ein Gutsbesitzer hat 48000 fl. Schulden auf seinem Grundbesitze, der auf 148000 fl. taxirt ist; es bleiben ihm nach Abzahlung der Zinsen 6720 fl. als Erträgniss seines Vermögens; wäre seine Schuld um 18000 fl. geringer und hätte er die übrigen um $\frac{1}{2}$ % niedriger zu verzinsen, so wäre das Erträgniss seines Vermögens 960 fl. höher.

$x = 6$ %; $y = 4\frac{1}{2}$ %.

63. Zwei Körper haben eine Entfernung von 3600 Längeneinheiten; wenn sie sich in gleichförmiger Geschwindigkeit gegen einander bewegen, treffen sie nach 25 Zeiteinheiten zusammen, bewegen sie sich aber hinter einander, so treffen sie nach 37,5 Zeiteinheiten zusammen.

$x = 120$; $y = 24$.

64. Zwei feindliche Heere stehen nur noch 11 Stunden 30 Minuten auseinander; bricht das erste um 5 Stunden 45 Minuten früher auf als das zweite, so stossen sie in 6 Stunden $7\frac{1}{2}$ Minuten nach dem Aufbruch des zweiten auf einander; bräche aber statt des ersten das zweite um dieselbe Zeit früher auf, so stiessen sie schon in 5 Stunden nach dem Aufbruch des ersten auf einander. In wie viel Zeit kann jedes Heer diese Entfernung ganz zurücklegen?

$x = 36$ Min.; $y = 42\frac{6}{7}$ Min.; $19\frac{1}{2}$ St.; 16,1 St.

55. Der Dignand einer Potenz ist 2, von einer andern 3, ihr Product 108 und ihr Quotient wird $\frac{16}{27}$, wenn der Dignand der ersten Potenz noch einmal so gross ist.

$x = 2$; $y = 3$.

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 81—134; Heis §. 67.

## c. Diophantische Gleichungen.

### §. 137.

**Erklärung 1.** Lassen sich aus den Bedingungen einer Aufgabe nicht so viele Gleichungen ableiten als unbekannte Grössen vorhanden sind, so ist die Aufgabe unbestimmt. Denn für die überzählige Unbekannte lassen sich unendlich viele verschiedene Werthe willkührlich annehmen, und da von diesen auch die übrigen Werthe der Unbekannten abhängig sind, so lassen sich auch für diese eben so viele verschiedene Werthe aufstellen, die theils als ganze, als gebrochene, theils als positive und als negative, theils als Null die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Gleichungen, die solche unbestimmte Aufgaben zur Lösung bringen, heissen diophantisch nach Diophantus von Alexandrien, der sich c. 350 a. ch. n. viel mit solchen Aufgaben beschäftigte.

**Erklärung 2.** Um die Anzahl der unendlich verschiedenen Werthe der Unbekannten zu beschränken, nehmen wir die Bedingung auf, dass die zu bestimmenden Unbekannten nur ganze Zahlen oder Null vertreten.

Anmerkung. Wie schon aus der Stellung dieses Abschnittes ersichtlich ist, wollen wir uns hier nur mit diophantischen Gleichungen des ersten Grades beschäftigen.

### §. 138.

**Erklärung.** Bezeichnen wir mit a, b, c positive, ganze Zahlen, so haben wir bei einer geordneten Gleichung folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Gleichungen, in welchen die Coëfficienten von x und y dasselbe Vorzeichen haben:

allgemein:

$$ax + by = \pm c.$$

II. Gleichungen, in welchen die Coëfficienten von x und y verschiedene Vorzeichen haben:

allgemein:

$$ax - by = \pm c.$$

**Lehrsatz.** Haben die Coëfficienten a und b einen gemeinschaftlichen Factor, so hat ihn auch c.

**Beweis.**

Es sei m der gemeinschaftliche Factor, so ist:

$\frac{a}{m} = p$ und $\frac{b}{m} = q$ (p und q ganze Zahlen nach der Voraussetzung),

und

$\frac{a}{m}x + \frac{b}{m}y = r$ und $\frac{ax}{m} - \frac{b}{m}y = s$ (r u. s ganze Zahlen nach der Voraussetzung),

wäre nun c nicht theilbar durch m, so wäre

$$\frac{c}{m} = \text{einem Bruche};$$

also

$$r = \frac{c}{m} \text{ und } s = \frac{c}{m},$$

da wäre eine ganze Zahl einem Bruche gleich, was unmöglich ist.

## §. 139.

**Erklärung 1.** Um eine Gleichung von der Form:

$$\text{I. } ax + by = \pm c,$$
$$\text{II. } ax - by = \pm c,$$

aufzulösen, verfährt man also:

1) Man bestimmt aus der gegebenen Gleichung diejenige Unbekannte, welche den kleinern Coëfficienten hat.

2) Man sondert den als Werth der Unbekannten erlangten Quotienten in einen gemischten Bruch.

3) Den so gewonnenen Bruch setzt man einer neuen Unbekannten gleich.

4) Diese neu gebildete Gleichung löst man in Bezug auf die zweite Unbekannte auf und verfährt mit dem neuen Quotienten, wie mit dem ersten.

5) Diese Operation setzt man fort bis man keinen Bruch mehr bekommt, sondern lauter ganze Zahlen.

6) Hierauf substituirt man aufwärts steigend die gefundenen Werthe in allen vorangehenden Gleichungen, bis man die Werthe von x und y gefunden. Z. B.:

1.

$$3x + 5y = 35$$

$$x = \frac{35 - 5y}{3} = 11 - y + \frac{2 - 2y}{3} \quad \text{cf. 1 u. 2.}$$

$$p = \frac{2 - 2y}{3} \quad \text{cf. 3.}$$

$$y = \frac{2 - 3p}{2} = 1 - p - \frac{p}{2} \quad \text{cf. 4.}$$

$$q = -\frac{p}{2} \quad \text{cf. 5.}$$

$$p = -2q$$

$$y = \frac{2 - 3 . 2q}{2} = 1 + 3q \quad \text{cf. 6.}$$

$$x = \frac{35 - 5(1 + 3q)}{3} = 10 - 5q \quad \text{cf. 6.}$$

Da hier x und y positive ganze Zahlen sind, so muss: $5q < 10$, folglich $q < \frac{10}{5}$, $q < 2$ und $3q > 1$, folglich $q > \frac{1}{3}$, so ist $q = 1$ und

$$x = 5 \text{ und } y = 4.$$

2.

$$4x - 5y = 7$$

$$x = \frac{7 + 5y}{4} = 1 + y + \frac{3 + y}{4}$$

$$p = \frac{3 + y}{4}$$

$$y = 4p - 3$$

$$x = \frac{7 + 5(4p - 3)}{4} = \frac{20p - 8}{4} = 5p - 2$$

Da auch hier x und y positive Zahlen sind, so muss $4p > 3$, folglich $p > \frac{3}{4}$ und $5p > 2$, folglich $p > \frac{2}{5}$, so ist $p = 1$ und

$$x = 3 \text{ und } y = 1.$$

**Erklärung 2.** Ist nur eine Gleichung gegeben und doch der Werth für drei Unbekannnte zu bestimmen, so nimmt man vorläufig eine der Unbekannten ganz beliebig und löst die Gleichung für die beiden andern auf.

## §. 140.

**Erklärung.** Sind von den verschiedenen Werthen, die x und y haben

können, ein Paar zusammengehörige Werthe bekannt, so lassen sich auch die andern Paare nach den folgenden Lehrsätzen leicht bestimmen.

**1. Lehrsatz** für die Gleichung:

$$ax - by = \pm c:$$

Beim Werthe von x den Coëfficienten (b) von y und beim Werthe von y den Coëfficienten (a) von x gleich oft addirt oder subtrahirt, gibt die andern Werthe.

Es sei:

$$x = \alpha, \; y = \beta$$

und

n eine beliebige Zahl (positiv, oder negativ oder Null),

so ist:

$$x = \alpha + bn, \; y = \beta + an$$

**Beweis.**

Da $x = \alpha$ und $y = \beta$, so ist

$$a\alpha - b\beta = \pm c,$$

und wenn:

$$x = \alpha + bn$$

und

$$y = \beta + an,$$

so ist:

$$a\alpha + abn - b\beta - abn = \pm c,$$

somit:

$$a\alpha - b\beta = \pm c,$$

folglich:

$$ax - by = \pm c.$$

Z. B. Für die gegebene Gleichung:

$$3x - 5y = 1,$$

ist:

$$x = 2, \; y = 1.$$

Addiren oder subtrahiren wir nun beim Werthe von x den Coëfficienten 5 von y und beim Werthe von y den Coëfficienten 3 von x zum wiederholten Male, so ergeben sich noch weitere Werthe, die der gegebenen Gleichung genügen.

$$\left.\begin{matrix} x = & 7 = & 12 = & 17 = & 22 = & 27\ldots \\ y = & 4 = & 7 = & 10 = & 13 = & 16\ldots \end{matrix}\right\} \text{per addit.}$$

$$\left.\begin{matrix} x = & -3 = & -8 = & -13 = & -18 = & -23\ldots \\ y = & -2 = & -5 = & -8 = & -11 = & -14\ldots \end{matrix}\right\} \text{per subtract.}$$

Der allgemeine Ausdruck für alle diese Lösungen ist:

$$x = 2 + 5n, \; y = 1 + 3n,$$

weil n jede beliebige Zahl, positiv oder negativ oder Null bedeuten kann.

**2. Lehrsatz** für die Gleichung:

$$a x + b y = \pm c.$$

Beim Werthe von x den Coëfficienten (b) von y gleich oft addirt und beim Werthe von y den Coëfficienten (a) von x gleich oft subtrahirt

oder beim Werthe von x den Coëfficienten (b) von y gleich oft subtrahirt und beim Werthe von y den Coëfficienten (a) von y gleich oft addirt, gibt die andern Werthe.

Es sei:

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

so ist:

$$x = \alpha + b n, \quad y = \beta - a n \text{ (n siehe vorigen Satz).}$$

**Beweis.**

Da $x = \alpha$ und $y = \beta$, so ist:

$$a\alpha + b\beta = \pm c,$$

und wenn:

$$x = \alpha + b n, \quad y = \beta - a n,$$

so ist:

$$a\alpha + a b n + b\beta - a b n = \pm c$$

somit:

$$a\alpha + b\beta = \pm c,$$

folglich:

$$a x + b y = \pm c.$$

Z. B. für die gegebene Gleichung:

$$7x + 3y = 37,$$

ist

$$x = 4 \text{ und } y = 3,$$

ferner

$$x = 7 = 10 = 13 = 16 = 19 \; . \; . \; . \text{ p. addit.}$$
$$y = -4 = -11 = -18 = -25 = -32 \; . \; . \; . \text{ p. subtract.}$$

oder

$$x = 1 = -2 = -5 = -8 = -11 \; . \; . \; . \text{ p. subtract.}$$
$$y = 10 = 17 = 24 = 31 = 38 \; . \; . \; . \text{ p. addit.}$$

Allgemein:

$$x = 4 + 3n, \quad y = 3 - 7n.$$

**Beispiele.**

1.

$$13x - 15y = 2$$

$$x = \frac{15y + 2}{13} = y + \frac{2y + 2}{13}$$

$$p = \frac{2y + 2}{13}$$

$$y = \frac{13p - 2}{2} = 6p - 1 + \frac{p}{2}$$

$$q = \frac{p}{2}$$

$$p = 2q$$

$$y = \frac{(13 . 2q) - 2}{2} = 13q - 1$$

$$x = \frac{15(13q - 1) + 2}{13} = 15q - 1.$$

Da q = 1, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} x = 14 = 29 = 44 \ldots = 14 + 15n \\ y = 12 = 25 = 38 \ldots = 12 + 13n \end{array}\right\} \text{cf. §. 140, 1.}$$

2.

$$18x + 20y = 134 \text{ (Factor 2)}$$

$$9x + 10y = 67$$

$$x = \frac{67 - 10y}{9} = 7 - y + \frac{4 - y}{9}$$

$$p = \frac{4 - y}{9}$$

$$y = 4 - 9p$$

$$x = \frac{67 - 10(4 - 9p)}{9} = 3 - 10p.$$

Da q = 0, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 = -17 = -37 = -57 \ldots = 3 - 20n \\ y = 4 = \phantom{-}22 = \phantom{-}40 = \phantom{-}58 \ldots = 4 + 18n \end{array}\right\} \text{§. 140, 2.}$$

## §. 141.

**Erklärung.** Wären aus (n — 1) Gleichungen n Unbekannte zu bestimmen, so eliminirt man die Unbekannten nach den bekannten Methoden, bis auf eine Gleichung mit nur zwei Unbekannten. Diese wird aufgelöst, wie die vorangehenden, während die Werthe der andern Unbekannten durch Substitution gewonnen werden. Z. B.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x - 3y + 4z = 15 \\ \text{II.} & 2x - 3t + 4z = 13 \end{array}\right\} \text{z eliminirt gibt IV.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{III.} & x - 2y + 4t = 9 \\ \hline \text{IV.} & x + 3y - 3t = -2 \end{array}\right\} \text{t eliminirt gibt:}$$

$$\text{V. } 7x + 6y = 19$$

$$y = \frac{19 - 7x}{6} = 3 - x + \frac{1 - x}{6}$$

$$p = \frac{1 - x}{6}$$

$$x = 1 - 6p$$

$$y = \frac{19 - 7(1 - 6p)}{6} = 2 - 7a.$$

Da hier $p = 0$, so ist:

$$x = 1;\ y = 2;\ z = 4;\ t = 3.$$

## §. 142.

**Erklärung.** Zuweilen lassen sich zwar ebenso viele Gleichungen aufstellen als Unbekannte vorhanden sind und doch ist eine Aufgabe nicht bestimmt, sondern unbestimmt (diophantisch). Dies ist immer da der Fall, wo die Bedingungen, aus welchen die Gleichungen hervorgehen, nicht wesentlich von einander verschieden sind. Z. B.

1.

$$\frac{12}{x+y} = \frac{12}{5} \quad \Big| \quad \frac{1}{x-z} = \frac{1}{2} \quad \Big| \quad \frac{1}{y+z} = \frac{1}{3}$$

$$5 = x + y \quad | \quad 2 = x - z \quad | \quad 3 = y + z$$

$$\begin{array}{l} 5 = x + y \\ 3 = z + y \\ \hline 2 = x - z \text{ (wie die 2. Gleichung).} \\ x = 2 + z \\ x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2. \end{array}$$

2.

Es sind drei Zahlen; die Summa aus der ersten und zweiten $= 20$, die Summa aus der zweiten und dritten $= 50$ und die Differenz aus der dritten und ersten $= 30$ i. e.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } x + y = 20 \\ \text{II. } y + z = 50 \end{array}\right\} \text{ y elimiminirt, gibt IV = III.}$$

$$\begin{array}{l} \text{III. } z - x = 30 \\ \hline \text{IV. } z - x = 30 \end{array}$$

$$x = 15;\ y = 5;\ z = 45.$$

## §. 143.

**Erklärung.** Lassen sich für die unbekannten Grössen keine Werthe auffinden, die den in der Aufgabe gestellten Bedingungen genügen, so ist die Aufgabe imaginär. Imaginär sind alle Aufgaben, die für die Unbekannten rationale, positive, ganze Zahlen fordern und doch nur irrationale, negative oder gebrochene Zahlen bei der Lösung liefern; ferner alle Aufgaben, deren Bedingungen sich geradezu widersprechen. Z. B.

1) Es sind drei Zahlen; die Summa aus der ersten und zweiten = 14, die Summa aus der zweiten und dritten = 16 und die Differenz aus der ersten und dritten = 8 i. e.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y = 14 \\ \text{II.} & y + z = 16 \end{array}\right\} \text{ y eliminirt gibt IV:}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{III.} & x - z = 8 \\ \hline \text{IV.} & z - x = 2 \end{array}\right\} \text{ addirt, gibt.}$$

$$\text{V.} \quad 0 = 10 \text{ unmöglich!}$$

2) Jemand hat in seinem Garten 3mal so viel Apfelbäume als Birnbäume, von diesen sind ihm 5 und von jenen 7 erfroren, und es bleiben ihm nur noch halb so viel Birnbäume als Apfelbäume i. e.

$$\frac{3x - 7}{2} = x - 5$$

$$3x - 7 = 2x - 10$$

$$x = -3 \text{ unmöglich!}$$

## §. 144.

### Diophantische Aufgaben.

I.

1. $5x - 6y = 5 \quad \left\{\begin{array}{l} x = 7 \ldots \\ y = 5 \ldots \end{array}\right.$

2. $11x - 5y = 2 \quad \left\{\begin{array}{l} x = 2 \ldots \\ y = 4 \ldots \end{array}\right.$

3. $15x - 7y = 1 \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 \ldots \\ y = 2 \ldots \end{array}\right.$

4. $18x - 15y = -6 \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 \ldots \\ y = 4 \ldots \end{array}\right.$

5. $10x - 25y = -5 \quad \left\{\begin{array}{l} x = 7 \ldots \\ y = 3 \ldots \end{array}\right.$

6. $9x + 10y = 2 \begin{cases} x = 8\ldots \\ y = -7\ldots \end{cases}$

7. $19x + 21y = 141 \begin{cases} x = 3\ldots \\ y = 4\ldots \end{cases}$

8. $21x + 8y = -4 \begin{cases} x = -4\ldots \\ y = 10\ldots \end{cases}$

Anmerkung. Die andern Werthe lassen sich nach §. 140, 1 und 2 genau bestimmen.

II.

9. Ein Landwirth kauft um 100 fl. Schafe, die einen kosten à Stück 8, die andern à Stück 10 fl.

$x = 5;\ y = 6.$

10. Theile die Zahl 157 so in zwei Theile, dass der eine durch 11 dividirt 1 und der andere durch 8 dividirt 2 zum Reste gibt.

$x = 67;\ y = 90.$

11. Eine Gesellschaft aus Herrn und Damen braucht 7 fl. 48 kr.; auf jeden Herrn kommt 1 fl. 12 kr., auf jede Dame nur 36 kr.

$x = 4;\ y = 5.$

12. Jemand erhält 322 fl. 48 kr. in Dukaten (à 5 fl. 36 kr.) und Friedrichsd'or (à 9 fl. 57 kr.).

$x = 15$ D.; $y = 24$ Frd.

13. Ein Tourist half einem andern, mit dem er unterwegs zusammentraf, gelegentlich mit 12 Kreuzer aus; wie sie sich trennen müssen, will dieser jenem die 12 Kreuzer zurückzahlen, er hat aber nur Thaler (1 fl. 45 kr.) und jener nur Kronenthaler (2 fl. 42 kr.). Wie können sie sich helfen?

$x = 9$ Krthl.; $y = 14$ Thl.

14. Ein Landwirth kauft 56 Scheffel (bayr.) Samgetreide, Gerste à 12 fl., Korn à 18 fl. und Weizen à 21 fl., in Summa um 996 fl.

$x = 10;\ y = 30;\ z = 16.$

15. Es sind drei Zahlen; multiplicirt man die erste mit 7, die zweite mit 8, die dritte mit 11, so ist die Summa aller Producte $= 82$.

$x = 2\ldots;\ y = 3\ldots;\ z = 4\ldots$

16. Die Summa dreier Zahlen ist 26 und die Differenz aus der dritten und ersten ist gleich der Summa aus der ersten und zweiten.

$x = 4\ldots;\ y = 7\ldots;\ z = 15\ldots$

17. Vier Zahlen geben zur Summa 14 und das Doppelte der zweiten, das Dreifache der dritten und das Vierfache der vierten zur ersten addirt = 40.

$$x = 2\ldots;\ y = 3\ldots;\ z = 4\ldots;\ t = 5\ldots$$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 250—254; Heis §. 77 u. 79.

---

## d. Differenz- und Quotientengleichungen.

§. 145.

**Erklärung 1.** Eine Differenzgleichung oder arithmetische Proportion ist die Gleichstellung zweier arithmetischen Verhältnisse.

Der allgemeine Ausdruck ist:

$$a - b = c - d.$$

**Erklärung 2.** Eine Quotientengleichung oder geometrische Proportion ist die Gleichstellung zweier geometrischen Verhältnisse.

Der allgemeine Ausdruck ist:

$$a : b = c : d.$$

Lies bei der Differenz- wie Quotientengleichung: a verhält sich zu b, wie c zu d.

**Erklärung 3.** Jede Seite einer Differenz- oder Quotientengleichung heisst Verhältniss. Das arithmetische Verhältniss stellt fest, um wie viel (Differenz), das geometrische wie viel mal eine Grösse grösser ist als eine andere (Quotient). Die entwickelte Differenz und der entwickelte Quotient heissen die Exponenten der Verhältnisse.

Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie gleiche Exponenten haben.

**Erklärung 4.** Jedes Verhältniss besteht aus zwei Gliedern, aus einem Vorder- und einem Hintergliede, und jede Proportion aus zwei Verhältnissen; je zwei Vorder- und je zwei Hinterglieder heissen homolog. Das Vorderglied der linken und das Hinterglied der rechten Seite heissen auch die beiden äussern Glieder; und das Hinterglied der linken und das Vorderglied der rechten Seite heissen die beiden innern Glieder.

Ein Verhältniss heisst steigend oder fallend je nachdem das Hinterglied grösser oder kleiner ist als das Vorderglied.

**Erklärung 5.** Sind die beiden innern Glieder einander gleich, so heisst die Proportion stetig oder discret.

In einer stetigen Proportion heisst das mittlere Glied die mittlere Proportionale (arithmetisches und geometrisches Mittel).

$$\text{I. } a - b = b - c$$

oder

$$a - b - c.$$

$$\text{II. } a : b = b : c$$

oder

$$a : b : c.$$

**Erklärung 6.** Sind mehrere gleiche geometrische Verhältnisse zusammengestellt, so heisst die Proportion continuirlich. Z. B.

$$a : b = c : d = m : n = p : q.$$

**Erklärung 7.** Zwei Zahlengrössen heissen gerade proportional, wenn dieselben so in Beziehung zu einander stehen, dass mit dem Wachsthum der einen auch die andere verhältnissmässig wächst oder mit der Abnahme der einen auch die andere abnimmt, z. B. Capital und Zinsen, Waaren und ihre Preise, Arbeit und Lohn u. s. w.

Zwei Zahlengrössen sind umgekehrt proportional, wenn dieselben so in Beziehung zu einander stehen, dass mit dem Wachsthum der einen die andere verhältnissmässig abnimmt oder mit der Abnahme der einen die andere zunimmt. Z. B. die Menge der zu verpflegenden Menschen und die Dauer der Nahrungsmittel, die Menge der Arbeiter und die erforderliche Zeit u. s. w.

## I.

## §. 146.

**Lehrsatz 1.** In jeder arithmetischen Proportion ist die Summa der äussern Glieder der Summa der innern Glieder gleich.

Gegeben:

$$a - b = c - d$$

so ist:

$$a + d = b + c.$$

**Beweis.**

Es ist:

$$a - b = c - d,$$

addirt man auf beiden Seiten $b + d$, so ist:

$$(a - b) + (b + d) = (c - d) + (b + d)$$

folglich:

$$a + d = b + c.$$

**Zusatz.** Sind in einer arithmetischen Proportion drei Glieder gegeben und ein äusseres oder inneres Glied gesucht, so erhält man:

1) das äussere Glied, wenn man von der Summa der innern das gegebene äussere subtrahirt:

$$(b + c) - a = d,$$

und

2) das innere Glied, wenn man von der Summa der äussern das gegebene innere subtrahirt:

$$(a + d) - b = c.$$

**Lehrsatz 2.** Sind zwei Summen als gleich gegeben, so bilden die Summanden der einen die äussere und die Summanden der andern Summa die innern Glieder.

Gegeben:

$$a + d = b + c$$

so ist:

$$a - b = c - d.$$

Beweis, nach Lehrsatz 1.

## §. 147.

**Lehrsatz.** Die mittlere arithmetische Proportionale (arithmetisches Mittel) ist gleich der halben Summa der beiden gegebenen Zahlen.

Gegeben:

$$a - b = b - c$$

so ist:

$$b = \frac{a + c}{2}.$$

**Beweis.**

Ist

$$a - b = b - c,$$

so ist:

$$2b = a + c,$$

folglich:

$$b = \frac{a + c}{2} \text{ (beide Seiten mit 2 dividirt).}$$

**Zusatz.** Die Summa mehrerer Zahlen durch ihre Anzahl dividirt, gibt ihr arithmetisches Mittel.

Es sei die Anzahl der Summanden a, b, c. d... etwa n und m das arithmetische Mittel, so ist:

$$m = \frac{a + b + c + d + \ldots}{n}.$$

II.

§. 148.

**Lehrsatz 1.** In jeder geometrischen Proportion ist das Product der beiden äussern Glieder gleich dem Producte der beiden mittlern Glieder.

Gegeben:

$$a : b = c : d,$$

so ist:

$$a\,d = b\,c.$$

**Beweis.**

Wenn

$$a : b = c : d,$$

so ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\frac{a\,b\,d}{b} = \frac{b\,c\,d}{d}$$ (p. Multipl. auf beiden Seiten mit b d),

folglich:

$$a\,d = b\,c.$$

**Zusatz.** Sind in einer geometrischen Proportion drei Glieder gegeben und ein äusseres oder inneres Glied gesucht, so erhält man:

1) das äussere Glied, wenn man das Product der beiden mittlern durch das gegebene äussere dividirt:

$$\frac{b\,c}{a} = d$$

und

2) das innere Glied, wenn man das Product der beiden äussern durch das gegebene innere dividirt:

$$\frac{a\,d}{b} = c.$$

Anmerkung. Auf diesen Satz gründet sich das Verfahren bei der Regel-de-tri.

**Lehrsatz 2.** Sind zwei Producte als gleich gegeben, so bilden die Factoren des einen die äussern und die Factoren des andern die innern Glieder.

Es sei:

$$\frac{a\,d = b\,c}{a:b = c:d.}$$

so ist:

**Beweis.**

Wenn

$$a\,d = b\,c,$$

so ist:

$$\frac{a\,d}{b\,d} = \frac{b\,c}{b\,d} \text{ (p. Divis. auf beiden Seiten mit b d)},$$

und

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

folglich:

$$a:b = c:d.$$

## §. 149.

**Lehrsatz.** In einer stetigen geometrischen Proportion ist die mittlere geometrische Proportionale gleich der Quadratwurzel aus dem Producte der beiden äussern Glieder.

Gegeben:

$$\frac{a:b = b:c}{b^2 = a\,c}$$

so ist:

und

$$b = \sqrt{a\,c}.$$

**Zusatz.** Ist eine Zahl die mittlere geometrische Proportionale zu zwei andern Zahlen, so ist ihr Logarithmus die mittlere arithmetische Proportionale zu den Logarithmen der beiden andern Zahlen.

Gegeben:

$$\frac{a:b:c}{\log b = \frac{\log a + \log c}{2}.}$$

so ist:

Anmerkung. Auf diesen Satz gründet sich die Berechnung der Logarithmen.

## §. 150.

**Lehrsatz.** In jeder geometrischen Proportion kann man die innern und äussern Glieder beliebig vertauschen:

$$a : b = c : d$$
$$a : c = b : d$$
$$d : b = c : a$$
$$d : c = b : a$$
$$c : a = d : b$$
$$b : a = d : c$$
$$c : d = a : b$$
$$b : d = a : c.$$

**Beweis.**

Jede dieser Proportionen gibt

$$a d = b c \quad \text{cf. §. 148, 1}$$

folglich auch:

$$a : b = c : d \quad \text{cf. §. 148, 2.}$$

damit sind auch die 7 andern Proportionen bewiesen, weil sie auf der Gleichung ruhen:

$$a d = b c.$$

## §. 151.

**Lehrsatz.** Ist in einer geometrischen Proportion

$$a : b = c : d$$

1) a ebenso gross oder grösser oder kleiner als b, so ist auch c ebenso gross oder grösser oder kleiner als d; und ist

2) a ebenso gross oder grösser oder kleiner als c, so ist auch b ebenso gross oder grösser oder kleiner als d.

**Beweis zu 1.**

Ist

$$a = b, \quad \text{oder } a > b, \quad \text{oder } a < b,$$

so ist:

$$\frac{a}{b} = 1, \quad „ \frac{a}{b} > 1, \quad „ \frac{a}{b} < 1.$$

Da aber

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad „ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad „ \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

so ist auch:

$$\frac{c}{d} = 1, \quad „ \frac{c}{d} > 1, \quad „ \frac{c}{d} < 1,$$

folglich:

$$c = d, \quad „ c > d, \quad „ c < d.$$

**Beweis zu 2**

ist ganz wie der vorstehende, weil sich in jeder Proportion das zweite und dritte Glied vertauschen lassen. cf. §. 150.

## §. 152.

**Lehrsatz 1.** In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summa oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum zweiten oder ersten Gliede, wie die Summa oder Differenz des dritten und vierten Gliedes zum vierten oder dritten Gliede.

Gegeben:

$$a : b = c : d$$

so ist auch:

$$\text{I. } a \pm b : b = c \pm d : d$$

$$\text{II. } a \pm b : a = c \pm d : c.$$

**Beweis zu I.**

Es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

so ist auch:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1 \quad \text{cf. §. 5 u. §. 10,}$$

ferner:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{b}{b} = \frac{c}{d} \pm \frac{d}{d} \quad \text{cf. §. 46, Zus. 2,}$$

und

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d},$$

folglich:

$$a \pm b : b = c \pm d : d.$$

**Beweis zu II**

lässt sich gerade wie der vorstehende entwickeln.

**Lehrsatz 2.** In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summa oder Differenz der Vorderglieder zur Summa oder Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Gegeben:

$$a : b = c : d$$

so ist auch:

$$a \pm c : b \pm d = a : b.$$

**Beweis.**

Wenn $a:b = c:d$

so ist auch: $a:c = b:d$ cf. §. 150,

und $a \pm c:a = b \pm d:b$ cf. §. 152, 1,

folglich: $a \pm c:b \pm d = a:b$ cf. §. 150.

**Lehrsatz 3.** In einer continuirlichen geometrischen Proportion verhält sich die Summa aller Vorderglieder zur Summa aller Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Gegeben: $a:b = c:d = m:n$

so ist auch: $a + c + m : b + d + n = a:b$.

**Beweis.**

Da $a:b = c:d$

so ist auch: $a + c:b + d = a:b$ cf. vorigen Satz,

und da $a:b = m:n$

so ist auch: $a + c:b + d = m:n$,

folglich: $a + c + m : b + d + n = a:b$ cf. vorigen Satz.

## §. 153.

**Lehrsatz.** Eine geometrische Proportion bleibt unverändert, wenn man:

1) die Glieder eines Verhältnisses, oder
2) zwei homologe Glieder, oder
3) alle Glieder mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt.

Gegeben: $a : b = c:d$

so ist:

1. $\frac{a}{m}:\frac{b}{m} = c:d$,

2. $a:\frac{b}{p} = c:\frac{d}{p}$,

3. $an:bn = cn:dn$.

**Beweis zu 1.**

Wenn

$$a : b = c : d,$$

so ist:

$$a . d = b . c$$

und

$$\frac{a . d}{m} = \frac{b . c}{m},$$

folglich:

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d.$$

Die Beweise zu 2 und 3 ebenso.

**Zusatz 1.** Brüche mit gleichen Nennern verhalten sich gerade wie ihre Zähler; Brüche mit gleichen Zählern verhalten sich umgekehrt wie ihre Nenner.

$$1.\ \frac{a}{b} : \frac{c}{b} = a : c; \quad 2.\ \frac{a}{b} : \frac{a}{c} = c : b.$$

**Zusatz 2.** Irrationale Zahlen lassen sich wie Brüche betrachten (§. 89) und ebenso behandeln.

## §. 154.

**Lehrsatz.** Eine geometrische Proportion bleibt unverändert, wenn man alle Glieder mit derselben Zahl potenzirt oder radicirt.

Gegeben:

$$a : b = c : d$$

so ist auch:

$$1.\quad a^m : b^m = c^m : d^m.$$

$$2.\ \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

**Beweis zu 1.**

Wenn

$$a : b = c : d$$

so ist auch:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m \text{ (beide Seiten mit m potenzirt)},$$

oder

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m},$$

folglich:

$$a^m : b^m = c^m : d^m.$$

**Beweis zu 2.**

Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

so ist auch:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}} \text{ (beide Seiten mit m radicirt)},$$

oder

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}},$$

folglich:

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

## §. 155.

**Lehrsatz 1.** Aus einer Reihe von geometrischen Proportionen erhält man eine neue Proportion, wenn man alle gleichstelligen Glieder mit einander multiplicirt oder dividirt.

Gegeben:

$$a : b = c : d$$
$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$
$$m : n = p : q$$

so ist auch:

$$a \alpha m : b \beta n = c \gamma p : d \delta q.$$

**Beweis.**

Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta},$$

und

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q},$$

so ist auch:

$$\frac{a \alpha m}{b \beta n} = \frac{c \gamma p}{d \delta q} \text{ (p. Multipl. auf beiden Seiten)},$$

folglich:

$$a \alpha m : b \beta n = c \gamma p : d \delta q.$$

**Zusatz.** Sind die gegebenen Proportionen stetig, so erhält man aus der Multiplication der gleichstelligen Glieder wieder eine stetige Proportion.

Gegeben:

$$\begin{array}{rc} & a:b:c \\ & \alpha:\beta:\gamma \\ & m:n:p \\ \hline \text{so ist auch:} & a\alpha m : b\beta n : c\gamma p. \end{array}$$

**Lehrsatz 2.** Ist je ein äusseres und inneres Glied von einer Proportion je einem äussern und innern Gliede der andern Proportion wechselweise gleich, so stehen alle übrigen Glieder in Proportion.

Gegeben:

$$\begin{array}{rc} & a:b = c:d \\ & m:a = p:c \\ \hline \text{so ist auch:} & m:b = p:d. \end{array}$$

**Beweis.**

Es ist: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

und $\frac{m}{a} = \frac{p}{c}$,

mithin auch: $\frac{a.m}{a.b} = \frac{c.p}{c.d}$,

und $\frac{m}{b} = \frac{p}{d}$,

folglich:

$$m:b = p:d.$$

**Zusatz.** Haben mehrere auf einander folgende Proportionen einige Glieder gleich, so kann die daraus gewonnene Proportion abgekürzt werden.

Gegeben:

$$\begin{array}{rc} & 1.\ a:b = c:d \\ & m:b = c:n \\ \hline \text{so ist auch:} & a:m = d:n. \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} & 2.\ a:b = c:d \\ & a:m = n:d \\ \hline \text{so ist auch:} & m:b = c:n. \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} & 3.\ a:b = c:d \\ & m:n = d:g \\ & p:q = g:h \\ \hline \text{so ist auch:} & amp:bnq = c:h. \end{array}$$

**Anmerkung.** Geometrische Verhältnisse sind Quotienten, lassen desshalb eine doppelte Schreibweise zu ($a:b$ oder $\frac{a}{b}$); die eine der andern vorzuziehen ist wissenschaftlich unbegründet.

---

# II. Gleichungen vom zweiten Grade.

§. 156.

**Erklärung 1.** In Gleichungen vom zweiten Grade oder quadratischen Gleichungen erscheint die Unbekannte in der zweiten Potenz.

Jede quadratische Gleichung lässt sich als ein Product zweier einfachen Gleichungen mit derselben Unbekannten betrachten.

**Erklärung 2.** Wie alle höhern Gleichungen zerfallen auch die quadratischen in reine und unreine oder gemischte. Eine quadratische Gleichung heisst rein, wenn sie ausser der Unbekannten in zweiter Potenz nur bekannte Grössen enthält; enthält sie dagegen die Unbekannte in zweiter und in erster Potenz, so heisst sie unrein.

## a. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

### α. Reine quadratische Gleichungen.

§. 157.

**Erklärung 1.** Die allgemeine Form für eine reine quadratische Gleichung ist:

$$x^2 \pm q = 0.$$

Um eine solche Gleichung aufzulösen, bringt man sie auf die einfachste Form, schafft die Unbekannte auf die eine, die Bekannte auf die andere Seite. Hierauf radicirt man beide Seiten der Gleichung.

Ist q positiv, so bekommt man für x zwei reelle Werthe (positiv oder negativ) §. 90, 1; ist dagegen q negativ, so ist der Werth von x imaginär §. 90, 4.

Ist

$$x^2 = \pm q$$

so ist:

$$\text{I. } x = \pm\sqrt{q},$$

$$\text{II. } x = \pm\sqrt{-q}$$

$$= \pm i\sqrt{q}.$$

**Erklärung 2.** Reine Gleichungen höherer Grade (3., 4..., n Potenz), werden wie die quadratischen gelöst.

Es sei

$$x^n = q$$

so ist:

$$x = \sqrt[n]{q}.$$

## §. 158.

### Beispiele.

1.

$$\frac{4x^2}{3} - 12 = 0$$
$$4x^2 - 36 = 0$$
$$4x^2 = 36$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3.$$

2.

$$\frac{x^2}{3} - 12 = \frac{x^2}{4}$$
$$4x^2 - 3x^2 = 144$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \pm 12.$$

3.

$$\frac{4mx^2 - 37m^3}{\sqrt{m^2 - x^2}} - 7m\sqrt{m^2 - x^2} = 0$$
$$4mx^2 - 37m^3 - 7m^3 + 7mx^2 = 0$$
$$11mx^2 = 44m^3$$
$$x^2 = \frac{44m^3}{11m} = 4m^2$$
$$x = \pm 2m.$$

4.

$$\sqrt{5 + \sqrt{12 + \sqrt{6 + \sqrt{x^2 + 19}}}} = 3$$
$$5 + \sqrt{12 + \sqrt{6 + \sqrt{x^2 + 19}}} = 9$$
$$12 + \sqrt{6 + \sqrt{x^2 + 19}} = 16$$
$$6 + \sqrt{x^2 + 19} = 16$$
$$x^2 + 19 = 100$$
$$x^2 = 81$$
$$x = \pm 9.$$

5.

$$x + \sqrt{11 + x^2} = \frac{66}{\sqrt{11 + x^2}}$$
$$x\sqrt{11 + x^2} + 11 + x^2 = 66$$
$$x\sqrt{11 + x^2} = 55 - x^2$$
$$11x^2 + x^4 = (55 - x^2)^2$$
$$11x^2 + x^4 = x^4 - 110x^2 + 3025$$
$$121x^2 = 3025$$
$$x^2 = \frac{3025}{121} = 25$$
$$x = 5.$$

6.

$$\frac{2\sqrt{3x^2 + 9} + x}{\sqrt{3x^2 + 9} - x} = 5$$
$$2\sqrt{3x^2 + 9} + x = 5\sqrt{3x^2 + 9} - 5x$$
$$6x = 3\sqrt{3x^2 + 9}$$
$$36x^2 = 9(3x^2 + 9)$$
$$36x^2 = 27x^2 + 81$$
$$9x^2 = 81$$
$$x^2 = 9$$
$$x = 3.$$

7.

$$\sqrt{\frac{243}{x^2} + 33} - \sqrt{\frac{243}{x^2} - 2} = 5$$
$$\sqrt{\frac{243}{x^2} + 33} = 5 + \sqrt{\frac{243}{x^2} - 2}$$
$$\frac{243}{x^2} + 33 = 25 + 10\sqrt{\frac{243}{x^2} - 2} + \frac{243}{x^2} - 2$$
$$10 = 10\sqrt{\frac{243}{x^2} - 2}$$
$$100 = 100\left(\frac{243}{x^2} - 2\right)$$
$$1 = 1\left(\frac{243}{x^2} - 2\right)$$
$$3 = \frac{243}{x^2}$$
$$3x^2 = 243$$
$$x^2 = \frac{243}{3} = 81$$
$$x = \pm 9.$$

per substit. links: $\sqrt{\frac{243}{81} + 33} - \sqrt{\frac{243}{81} - 2} = \sqrt{3 + 33} - \sqrt{3 - 2}$
$= 6 - 1 = 5$

rechts: $= 5$.

8.

$$\frac{\sqrt{13}}{x^2} = \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{13} = 1 + \sqrt{1-x^2} - 1 + \sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{13} = 2\sqrt{1-x^2}$$

$$13 = 4 - 4x^2$$

$$4x^2 = -9$$

$$x^2 = -\frac{9}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{9}{4}}$$

$$= \pm\frac{3}{2}i.$$

9.

$$\frac{81}{\sqrt{x^3}} = 3\sqrt{x^3}$$

$$81 = 3\sqrt{x^6}$$

$$27 = \sqrt{x^6}$$

$$27 = x^3$$

$$3 = x$$

10.

$$\frac{15x^3}{4} - \frac{23}{32} = \frac{2x^3-1}{3}$$

$$360x^3 - 64x^3 + 32 = 69$$

$$296x^3 = 37$$

$$x^3 = \frac{37}{296} = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

## §. 159.

### Aufgaben.

I.

1. $\frac{3x^2}{15} = 5.$ $\qquad x = \pm 5.$

2. $\frac{bx^2}{a} = m^2.$ $\qquad x = \pm m\sqrt{\frac{a}{b}}.$

3. $\frac{11-x}{9} = \frac{8}{11+x}.$ $\qquad x = 7.$

4. $2\sqrt{x^2-3} + 3\sqrt{x^2+3} = \sqrt{13x^2+15}.$ $\qquad x = \pm\sqrt{3}$

5. $\frac{x-2}{5} + \frac{4}{x+2} = 0.$ $\qquad x = 4i.$

6. $(x+2)^2 - 7\sqrt{45-18x} = (5-x)^2 - 7x.$ $\qquad x = 2.$

7. $\sqrt{16-x^2} + \sqrt{16+x^2} = 2\sqrt{8}.$ $\qquad x = 4.$

8. $\frac{1}{m-\sqrt{m^2-x^2}} - \frac{1}{m+\sqrt{m^2-x^2}} - \frac{m}{x^2} = 0.$ $\qquad x = \frac{m\sqrt{3}}{2}.$

9. $(a-1)x = \frac{1}{x - \sqrt{2 - x^2}} + \frac{1}{x + \sqrt{2 - x^2}}.$ $x = \sqrt{\frac{a}{a-1}}.$

10. $\frac{a(a-b)}{x-a-b} + a + b - x = \frac{(b-a)b}{a+b-x}.$ $x = 2b.$

11. $\frac{\sqrt{1+5x^2} + \frac{5}{4}x}{\sqrt{1+5x^2} - \frac{1}{2}x} = 2.$ $x = 4.$

12. $\frac{a^2+a}{2\sqrt{a+x^2}} - \sqrt{a+x^2} = x.$ $x = \frac{a-1}{2}.$

13. $\frac{(x+1)^2}{a^2} = \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}}.$ $x = \sqrt{1 + a^2}.$

14. $\sqrt{x - \sqrt{x}} = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}.$ $x = 1.$

15. $\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2} + x.$ $x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$

16. $m + 1 - \sqrt{\frac{3m^2}{x^2} - 2} = \sqrt{\frac{3m^2}{x^2} + m^2 - 3}.$ $x = m.$

**Anmerkung.** Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 49—51; Heis §. 69. A.

II.

17. Das Product aus dem $^1/_7$fachen und $^3/_4$fachen ein- und derselbigen Zahl ist gleich $5\,^1/_4$.

$x = 7.$

18. Der Umfang eines rechteckigen Gartenhauses soll 180 □′ einnehmen und die Langseite $^5/_4$mal so gross sein als die Breite.

Breite = 12; Länge 15.

19. Eine Zahl um 4 vermehrt und vermindert; die dadurch entstandenen Zahlen mit einander multiplicirt gibt 105 zum Producte.

$x = 11.$

20. Jemand hat von einer Waare eine gewisse Anzahl Pfunde; er soll davon 7 Loth an einen Zweiten ablassen und braucht hiezu die Hälfte mal $^1/_7$ seines Vorraths.

$x = 1\,^3/_4$ Pfd.

21. Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 : 7; ihr Product ist 1260.

$x = 6$; 30 u. 42.

22. Der Flächeninhalt eines Exercirplatzes beträgt 10 bayerische Tagwerk (à 40,000 □'); die Länge ist $1\frac{3}{5}$mal so gross als die Breite.

Länge 800'; Breite 500'.

23. Ein Würfel hält 166,375 C'.

x = 5,5.

24. Drei Zahlen verhalten sich wie 2 : 5 : 11; die Summa ihrer Quadrate ist 3750.

x = 5.

25. Zu einer Zahl 1 addirt, von dieser Zahl 1 subtrahirt, die Summa durch die Differenz dividirt und die Differenz durch die Summa und schliesslich beide Quotienten addirt, gibt zur Summe $2\frac{1}{2}$.

x = 3.

26. Ein Product besteht aus den Factoren 7 und 9, wenn man den ersten Factor um eine gewisse Zahl vermehrt, den zweiten um das $\frac{9}{7}$fache dieser Zahl vermindert, so ist das neue Product um $5\frac{1}{7}$ kleiner.

x = 2.

27. In einer Fabrik sind 27 Arbeiter in zwei Abtheilungen beschäftigt; ein Arbeiter der ersten Abtheilung erhält monatlich 3mal so viel und ein Arbeiter der zweiten Abtheilung 4mal so viel Gulden (Thaler) als Arbeiter in seiner Abtheilung sind und der Lohn aller Arbeiter der ersten Abtheilung ist gleich dem $1\frac{1}{64}$fachen vom Lohn aller Arbeiter der zweiten Abtheilung.

15; 12.

28. Zwei Brüder haben zusammen 4000 fl. ausgeliehen und beziehen jährlich gleichviel Zinsen; der ältere erhielt für sein Capital zu den Procenten des jüngern 125 fl., und der jüngere zu den Procenten des ältern nur 45 fl. jährliche Zinsen.

2500, 3% und 1500, 5%.

29. Bei einer Hopfenanlage in Quadratform hatten je 2 Stöcke immer 4' Entfernung; die Stöcke werden umgesetzt, weil sie zu eng an einander waren, die Entfernung soll 5' werden und es werden dadurch 3600 Hopfenstangen erspart. Wie gross ist die Hopfenanlage?

x = 400; 4 Tagw.

30. Ein Rechteck ist um das $2\frac{1}{4}$fache länger als breit; es soll mit 2′ langen und 1,5′ breiten Steinplatten belegt werden, da aber nur Platten in Quadratform zu haben sind, deren Seite 1,5′ beträgt: so braucht man hiezu 361 Steinplatten mehr. Wie lang, wie breit ist das Rechteck, wie viel Steinplatten in beiden Fällen?

$x = 38'$ Breite, $85{,}5'$ Länge.

31. Zwei Boten eilen von einem Orte aus auf 2 Strassen, die mit einander einen rechten Winkel bilden; die Geschwindigkeit des einen ist 4 und des andern 3. Wann beträgt ihre Entfernung 180 Längeneinheiten?

$x = 36.$

---

## β. Gemischte quadratische Gleichungen.

### §. 160.

**Erklärung 1.** Die allgemeine Form einer auf Null reducirten geordneten unreinen quadratischen Gleichung ist:

$$x^2 + px + q = 0.$$

In dieser geordneten Gleichung können p und q positive oder negative, ganze oder gebrochene, einfache oder zusammengesetzte bekannte Grössen vorstellen.

**Lehrsatz.** Jede unreine auf Null reducirte quadratische Gleichung lässt sich in ein Product zweier einfachen auf Null gebrachten Gleichungen auflösen.

Es seien für

$$x^2 + px + q = 0$$

die einfachen Gleichungen

$$x - a = 0 \text{ und } x - b = 0$$

so ist:

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b).$$

Beweis.

Ist

$$x - a = 0 \text{ und } x - b = 0$$

so ist:

$$0 = (x - a)(x - b)$$
$$= x^2 - (a + b)x + ab$$

und

$$x^2 + px + q = 0,$$

folglich auch:

$$x^2 + px + q = x^2 - (a + b)x + ab$$
$$= (x - a)(x - b)$$

ferner ist:

$$a + b = -p$$

und

$$ab = q,$$

beide Werthe in die vorletzte Gleichung rechts eingesetzt, gibt

$$x^2 + px + q = x^2 + px + q.$$

**Erklärung 2.** Da nun aus der Gleichung

$$x - a = 0, \; x = a$$

und aus der Gleichung

$$x - b = 0, \; x = b$$

ist, so sind a und b auch die Werthe (Wurzeln), welche in die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

eingesetzt, dieser Gleichung genügen.

**Erklärung 3.** Aus dem vorstehenden Lehrsatze ist desshalb auch der Grund zu entnehmen, warum jede quadratische Gleichung im Allgemeinen zwei Resultate (Wurzeln) hat.

**Zusatz 1.** In jeder geordneten quadratischen Gleichung enthält das erste Glied das Quadrat der Unbekannten, das zweite Glied die erste Potenz der Unbekannten mit einem Coëfficienten als Summa der beiden Wurzeln dieser Gleichung und das dritte Glied enthält ein Product aus den Summanden des Coëfficienten im zweiten Gliede.

**Zusatz 2.** Die Summa der Wurzeln einer gemischten quadratischen Gleichung ist gleich dem Coëfficienten der Unbekannten des zweiten Gliedes, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen; und das Product der Wurzeln einer gemischten quadratischen Gleichung ist gleich ihrem dritten Gliede.

Wenn

$$x^2 + px + q = (x - a)\;(x - b)$$

so ist:

1. $a + b = -p$
2. $ab = q.$

**Zusatz 3.** Wie sich jede unreine auf Null reducirte quadratische Gleichung als ein Product zweier Factoren darstellen lässt, welche aus der Differenz der Unbekannten und je einem Resultate (Wurzel) bestehen, so lässt sich jedes Trinomium in ein Product zweier Factoren verwandeln. Z. B.

$$x^2 + 3x - 28 = (x - 4)(x + 7).$$

## §. 161.

**Lehrsatz.** Die Unbekannte einer geordneten unreinen quadratischen Gleichung ist gleich dem halben Coëfficienten ihres zweiten Gliedes mit entgegengesetzten Vorzeichen, + oder − die Wurzel aus der algebraischen Summa des Quadrats dieses halben Coëfficienten und der alleinstehenden bekannten Grösse.

Es sei

$$x^2 + px + q = 0$$

so ist:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

**Beweis.**

Es sei

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b) \quad (§. 160),$$

so ist auch:

$$\text{I. } a + b = -p$$

und

$$\text{II. } ab = q.$$

Um die Werthe für a und b aus der gegebenen Gleichung zu bestimmen, wird die Gleichung I quadrirt und von ihr hierauf das 4fache der Gleichung II subtrahirt:

$$a^2 + 2ab + b^2 = p^2$$

$$4ab \quad = \quad 4q$$

$$- \qquad -$$

gibt:

$$a^2 - 2ab + b^2 = p^2 - 4q$$

oder III.:

$$a - b = \sqrt{p^2 - 4q} \text{ (beide Seiten radicirt).}$$

Die Addition von I und III gibt:

$$(a + b) + (a - b) = -p + \sqrt{p^2 - 4q}$$

$$2a = -p + \sqrt{p^2 - 4q}$$

$$a = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Durch Subtraction III von I erhält man:

$$(a + b) - (a - b) = -p - \sqrt{p^2 - 4q}$$

$$2b = -p - \sqrt{p^2 - 4q}$$

$$b = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Werden die Werthe von a und b in die rechte Seite der Gleichung eingesetzt, so ist:

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$$
$$= \left(x - \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)\left(x - \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right).$$

Da aber

$$x^2 + px + q = 0$$

ist, so muss auch:

$$\text{entweder } x - a \text{ oder } x - b = 0$$

sein, §. 35, Zus. 2.

Es ist also entweder:

$$x - \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = 0$$

und

$$x = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

oder:

$$x - \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = 0$$

und

$$x = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Demnach ist allgemein

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

für die gegebene Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0.$$

---

Anmerkung. Statt

$$\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

kann man auch schreiben

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Der Ausdruck $\frac{p^2}{4}$ heisst die quadratische Ergänzung.

**Zusatz.** Enthält das Quadrat der Unbekannten einen Coëfficienten m in der allgemeinen Gleichung, d. h. es sei

$$mx^2 + px + q = 0,$$

so ist:

$$x^2 + \frac{px}{m} + \frac{q}{m} = 0$$

und

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2m}.$$

**Erklärung.** Bei den reinen quadratischen Gleichungen sind die beiden möglichen Wurzeln einander gleich aber entgegengesetzt; bei den unreinen quadratischen Gleichungen dagegen können sie entweder gleich oder von einander verschieden sein und beide positiv oder auch negativ werden.

Die Wurzeln sind

1) reell verschieden, wenn $\frac{p^2}{4} - q$ positiv,

2) imaginär verschieden, wenn $\frac{p^2}{4} - q$ negativ,

3) reell und gleich, wenn $\frac{p^2}{4} - q$ Null ist.

## §. 162.

**Erklärung.** Es gibt einige Arten von Gleichungen, die zwar die Gleichungen des zweiten Grades übersteigen, die sich aber auf quadratische Gleichungen reduciren lassen durch einfache Substitution.

Ihre allgemeinen Formen sind:

$$\text{I. } x^{2n} + p x^n + q = 0.$$

$$\text{II. } \sqrt[n]{x} + p \sqrt[2n]{x} + q = 0.$$

### Auflösung für I.

Man setzt

$$x^n = y,$$

so ist:

$$x^{2n} = y^2;$$

und durch Substitution dieser Werthe:

$$y^2 + p y + q = 0,$$

mithin:

$$y = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Nun ist aber:

$$y = x^n;$$

demnach:

$$\sqrt[n]{y} = x,$$

folglich:

$$x = \sqrt[n]{\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}.$$

### Auflösung für II.

Man setzt: $\sqrt[2n]{x} = z,$

so ist: $\sqrt[n]{x} = z^2,$

und durch Substitution dieser Werthe:

$$z^2 + pz + q = 0,$$

mithin: $z = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$

Nun ist aber: $z = \sqrt[2n]{x},$

demnach: $\sqrt[2n]{x} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$

folglich: $x = \left(\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^{2n}.$

## §. 163.

### Beispiele.

1.

$$\frac{4x - 4}{x - 3} = \frac{3x + 2}{x - 4}$$

$$4x^2 - 20x + 16 = 3x^2 - 7x - 6$$

$$x^2 - 13x + 22 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 88}}{2}$$

$$x = \frac{13 \pm 9}{2}$$

$$x = 11 \text{ u. } 2.$$

2.

$$\sqrt{48x + 313} - 3\sqrt{6x + 34} - 1 = 0$$

$$\sqrt{48x + 313} = 1 + 3\sqrt{6x + 34}$$

$$48x + 313 = 1 + 6\sqrt{6x + 34} + 54x + 306$$

$$6 - 6x = 6\sqrt{6x + 34}$$

$$1 - x = \sqrt{6x + 34}$$

$$1 - 2x + x^2 = 6x + 34$$

$$x^2 - 8x = 33$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 132}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 14}{2}$$

$$x = 11 \text{ und } -3.$$

3.

$$\frac{9x^2 - 16x}{225} = \frac{3x + 4\sqrt{x}}{3x - 4\sqrt{x}}$$

$$\frac{(3x + 4\sqrt{x})(3x - 4\sqrt{x})}{225} = \frac{3x + 4\sqrt{x}}{3x - 4\sqrt{x}}$$

$$\frac{3x - 4\sqrt{x}}{225} = \frac{1}{3x - 4\sqrt{x}}$$

$$(3x - 4\sqrt{x})^2 = 225$$

$$3x - 4\sqrt{x} = 15$$

$$x - \frac{4}{3}\sqrt{x} = 5$$

$$x - \frac{4\sqrt{x}}{3} + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}$$

$$\sqrt{x} - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9.$$

4.

$$x^2 - 7x + 3\sqrt{x^2 - 7x + 4} = 6$$

$$(x^2 - 7x + 4) + 3\sqrt{x^2 - 7x + 4} = 10$$

$$(x^2 - 7x + 4) + 3\sqrt{x^2 - 7x + 4} + \frac{9}{4} = \frac{49}{4}$$

$$\sqrt{x^2 - 7x + 4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - 7x + 4} = 2$$

$$x^2 - 7x + 4 = 4$$

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm 7}{2}$$

$$x = 7.$$

5.

$$7x^2 - 7x - 9\sqrt{7x^2 - 7x + 16} = -6$$

$$(7x^2 - 7x + 16) - 9\sqrt{7x^2 - 7x + 16} = 10$$

$$(7x^2 - 7x + 16) - 9\sqrt{7x^2 - 7x + 16} + \frac{81}{4} = \frac{121}{4}$$

$$\sqrt{7x^2 - 7x + 16} - \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\sqrt{7x^2 - 7x + 16} = 10$$

$$7x^2 - 7x + 16 = 100$$

$$7x^2 - 7x = 84$$

$$x^2 - x = 12$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$x = 4 \text{ und } -3.$$

6.

$$c - d = bx - \frac{3b - cx}{x}$$

$$cx - dx = bx^2 - 3b + cx$$

$$3b = bx^2 + dx$$

$$3 = x^2 + \frac{dx}{b}$$

$$\frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 12b^2}}{2b} = x$$

$$x = \frac{\sqrt{12b^2 + d^2} - d}{2b}.$$

Setzt man bei der Substitution den Ausdruck

$$12b^2 + d^2 = \sqrt{q},$$

**so ist:**

$$R. \frac{\sqrt{q} - d}{2} - 3b - \frac{c\sqrt{q} - cd}{2b} \cdot \frac{2b}{\sqrt{q} - d} =$$

$$\frac{\sqrt{q} - d}{2} - \frac{6b^2 - c\sqrt{q} - cd}{\sqrt{q} - d} =$$

$$\frac{12b^2 + d^2 - 2d\sqrt{q} + d^2 - 12b^2 + 2c\sqrt{q} - 2cd}{2\sqrt{q} - 2d} =$$

$$\frac{d^2 - d\sqrt{q} + c\sqrt{q} - cd}{\sqrt{q} - d} =$$

$$\frac{c(\sqrt{q} - d) - d(\sqrt{q} - d)}{\sqrt{q} - d} = c - d \text{ wie L.}$$

7.

$$n - x = \frac{x}{m} - \frac{x^2 - d}{n}$$

$$mn^2 - mnx = nx - mx^2 + dm$$

$$mx^2 - mnx - nx = dm - mn^2$$

$$x^2 - \frac{x(mn + n)}{m} = d - n^2$$

$$x^2 - \frac{(mn + n)x}{m} + \frac{n^2 + 2mn^2 + m^2n^2}{4m^2} = \frac{n^2 + 2mn^2 + m^2n^2 + 4dm^2 - 4m^2n^2}{4m^2}$$

$$x - \frac{n + mn}{2m} = \sqrt{\frac{n^2 + 2mn^2 + m^2n^2 + 4dm^2 - 4m^2n^2}{4m^2}}$$

$$x - \frac{n + mn}{2m} = \frac{\sqrt{n^2 + 2mn^2 + m^2n^2 + 4dm^2 - 4m^2n^2}}{2m}$$

$$x = \frac{\sqrt{n^2 + 2mn^2 + m^2n^2 + 4dm^2 - 4m^2n^2} + n + mn}{2m}$$

$$= \frac{\sqrt{4dm^2 - 3m^2n^2 + 2mn^2 + n^2} + mn + n}{2m}.$$

Setzt man bei der Substitution den Ausdruck

$$4dm^2 - 3m^2n^2 + 2mn^2 + n^2 = q,$$

so ist:

$$L.\ n - \frac{\sqrt{q} + mn + n}{2m} = \frac{2mn - \sqrt{q} - mn - n}{2m} = \frac{mn - \sqrt{q} - n}{2m}$$

$$R.\ (2n\sqrt{q} + 2mn^2 + 2n^2 - 4dm^2 + 3m^2n^2 - 2mn^2 - n^2 - 2mn\sqrt{q}$$

$$- 2n\sqrt{q} - m^2n^2 - 2mn^2 - n^2 + 4dm^2) : 4m^2n =$$

$$\frac{2m^2n^2 - 2mn\sqrt{q} - 2mn^2}{4m^2n} = \frac{m^2n^2 - mn\sqrt{q} - mn^2}{2m^2n} =$$

$$\frac{mn - \sqrt{q} - n}{2m} \text{ wie L.}$$

8.

$$\sqrt{x^5} - \frac{648}{\sqrt{x}} = 3x$$

$$\sqrt{x^6} - 648 = 3\sqrt{x^3}$$

$$x^3 - 3\sqrt{x^3} = 648$$

$$x^3 - 3\sqrt{x^3} + \frac{9}{4} = \frac{2601}{4}$$

$$\sqrt{x^3} - \frac{3}{2} = \frac{51}{2}$$

$$\sqrt{x^3} = 27$$

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9.$$

9.

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{\frac{50625}{x}} = 2$$

$$\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{50625}$$

$$\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} = 15; \text{ setzt man } \sqrt[4]{x} = z,$$

so ist $z^2 - 2z = 15$

$$z = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4$$

per Subst. $\sqrt[4]{x} = 1 \pm 4$

$$x = (1 \pm 4)^4$$

$$x = 625$$

oder $x = 81$.

10.

$a^{2x} + p a^x = q$; ist $a^x = y$ und $a^{2x} = y^2$, so ist:

$$y^2 + p y = q$$

$$y = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

$$a^x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

$$x \log a = \log\left(\frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}\right)$$

$$x = \frac{\log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}{\log a}.$$

11.

$$\sqrt[x]{b} + p\sqrt[2x]{b} - q = 0.$$

Es sei $\sqrt[2x]{b} = z$ und $\sqrt[x]{b} = z^2$, so ist:

$$z^2 + p z - q = 0$$

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$\sqrt[2x]{b} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$\frac{\log b}{2x} = \log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)$$

$$x = \frac{\log b}{2\log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}.$$

12.

$$x^{m + \log x} = r$$

Es sei $\log x = z$, so ist, nachdem man logarithmirt:

$$(m + \log x) \log x = \log r$$
$$(m + z) z = \log r$$
$$z^2 + m z = \log r;$$
$$z = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + \log r}$$
$$\log x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + \log r}$$
$$x = \text{num} \log \left(-\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + \log r}\right).$$

## §. 164.

### Aufgaben.

I.

1. $\frac{x}{2} + \frac{12}{x} = 7.$ $\qquad x = 12,\ 2.$

2. $\frac{x^2}{9} + 2 - x = 0.$ $\qquad x = 3,\ 6.$

3. $\frac{x^2}{3} + 18 = 5x.$ $\qquad x = 9,\ 6.$

4. $149 x^2 - 5960 = 2682 x.$ $\qquad x = 20,\ -2.$

5. $\frac{x^2}{5} - 26{,}6 = -2{,}4 x.$ $\qquad x = 7,\ -19.$

6. $\frac{12000 x + 32000}{100 x^2} = 10.$ $\qquad x = -4,\ -8.$

7. $x - \frac{49}{7x} = 5.$ $\qquad x = 6{,}14\ldots,\ -1{,}14\ldots$

8. $x - a\sqrt{x} = b.$ $\qquad x = \frac{a^2 + 2b + a\sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$

9. $\frac{1}{2} + \frac{m + n}{x} = -\frac{4mn}{2x^2}.$ $\qquad x = -2m,\ -2n.$

10. $c^2 x^2 - 2 d^2 x - d = 0.$ $\qquad x = \frac{d^2 + \sqrt{c^2 d + d^4}}{c^2}.$

11. $2bcx^2 + (b^2 + c^2) x^2 - b^2 x + \frac{b^2}{4} = \frac{d^2(4bd + c)}{4} + bcx.$ $\qquad x = \frac{b \pm d\sqrt{4bd + c}}{2(b + c)}.$

12. $\left(\frac{b-c}{b+c}\right)x + \frac{4bc}{b-c} = \frac{x^2}{b-c}$. $x = b + c,\ x = \frac{4bc}{b+c}$.

13. $x^2 - \frac{375}{x^2} = 10$. $x = \pm 5,\ \pm\sqrt{-15}$.

14. $\frac{x^6}{\sqrt{25x^3}} - \frac{120}{\sqrt{25x^3}} + \sqrt{25x^3} = 0$. $x = -2,\ \sqrt[3]{3}$.

15. $\sqrt{x^2 - 5x - 4} = 10$. $x = 13,\ -8$.

16. $3x - \frac{162 - 7x}{x} = 34 - 2x$. $x = 9,\ -3\frac{3}{5}$.

17. $8 - x - \frac{9x - 287\frac{1}{6}}{x-3} = \frac{9x-5}{3}$. $x = -\frac{11}{6},\ 6\frac{1}{2}$.

18. $(\sqrt{x} + 4)\sqrt{x} = 1760$. $x = 1600,\ 1936$.

19. $(x^2 + \sqrt{x})x = 46872$. $x = 36$.

20. $\sqrt{7x+4} - 4 - \sqrt{3x-8} = 0$. $x = 11,\ 3$.

21. $\frac{1}{239071} = \frac{1}{2x^3 + 11\sqrt{x^3}}$. $x = 49$.

22. $\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{x^2 - x}{144}$. $x = 16$.

23. $\sqrt{23x + 12} = \sqrt{5x+1} + \sqrt{7x+4}$. $x = 3,\ -\frac{11}{19}$.

24. $2\sqrt{12x + 40} - \sqrt{11x - 6} = 13$. $x = 5,\ 4{,}04$.

25. $\frac{\sqrt{x^2 + 5x}}{6} + \frac{2x^2 + 10x}{12} - 7 = 0$. $x = 4,\ -9;\ 4{,}93,\ -9{,}93$.

26. $\frac{6 + 2x}{4 - x} - \frac{16 + 6x}{5x + 2} = 10$. $x = 3,\ -\frac{2}{3}$.

27. $\frac{85}{120x} = \frac{5}{x^2 + 3x} + \frac{3}{x^2 - 4x}$. $x = 12,\ \frac{5}{17}$.

28. $\frac{7x+1}{2x-1} = \frac{39x - 43}{7}$. $x = 2,\ \frac{3}{13}$.

29. $\frac{30}{x} - \frac{16}{x+1} = \frac{13}{x-2}$. $x = 15,\ -4$.

30. $2x + 19 + 4\sqrt{18x + 9} = 11x + 1$. $x = 4,\ \frac{8}{9}$.

31. $\frac{x}{5+x} - \frac{11x}{11x - 8} + \frac{7}{6 - 4x} = 0$. $x = 1,\ -\frac{40}{47}$.

32. $\frac{x+1}{x-3} = \frac{3x+4}{x-2} - 3$. $x = 7,\ 4$.

33. $\frac{x+1}{x-4} = \frac{4x-5}{x+4} - \frac{13x - 20}{x^2 - 16}$. $x = 9,\ 4$.

34. $\frac{10x-6}{3x-4} = \frac{18x+22}{2x-3} - 12.$ $x = 5,\ 1\frac{6}{19}.$

35. $5\sqrt{3x-20} + \frac{2x-40}{\sqrt{3x-20}} = 3\sqrt{7x}.$ $x = 7,\ 28.$

36. $\frac{2\sqrt{x^{11}}}{125} - \frac{67}{5}\sqrt{x^3} + \frac{2125}{\sqrt{x^5}} = 0$ $x = \pm 5.$

37. $3\sqrt{x-b} + \frac{2\sqrt{5x^2-4bx}}{\sqrt{x-b}} = \frac{5b+5x}{\sqrt{x-b}}.$ $x = 4b,\ -b.$

38. $\frac{x-5\sqrt{x}+80}{x+5\sqrt{x}} = \frac{x^2-25x}{2496}.$ $x = 64,\ -39.$

39. $\frac{x^2-mn^2}{x^4-2mn^2x^2+m^2n^4} = \frac{1}{m^2n^2-nx}.$ $x = \frac{\sqrt{4m^2n^2+4mn^2+n}-n}{2}.$

40. $\frac{18\sqrt{x}-76}{33-4\sqrt{x}} = \frac{12\sqrt{x}+56}{2\sqrt{x}}.$ $x = 49.$

41. $\frac{3\sqrt{8x^2+56x}}{\sqrt{5x+11}} = 3\sqrt{5x+11} - \frac{7x-3}{\sqrt{5x+11}}.$ $x = 18,\ -9.$

42. $2^{2x} + 12(2^x) = 64.$ $x = 2.$

43. $\sqrt[x]{46656} + 8\sqrt[2x]{46656} = 84.$ $x = 3.$

44. $x^{m-\log x} = -p.$ $x = \text{num. log}\left(\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + \log p}\right).$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 53—71; Heis §. 69 B.

II.

45. Das Quadrat einer Zahl ist um 2756 grösser als die Zahl selbst.

$x = 53.$

46. Wenn man eine Zahl mit 27 multiplicirt, so ist das Product um 124 kleiner als das Quadrat dieser Zahl.

$x = 31.$

47. Wenn man das Quadrat einer Zahl mit ihrer um 3 verminderten Wurzel dividirt, erhält man 16 als Quotienten.

$x = 12.$

48. Das Product zweier Zahlen, von denen die eine um 3 kleiner ist als die andere, ist 378.

$x = 21;\ 18.$

49. Wenn man das Quadrat einer Zahl mit der um 26 verminderten Wurzel dividirt, erhält man 108,9 als Quotienten.

$x = 66.$

50. Ein Gärtchen enthält 9350 □′; es ist 25′ länger als breit. Wie lang und wie breit ist es?

$x = 110'$ lang; $85'$ breit.

51. Ein Landmann verkauft einen Acker um 144 Thl. und hat daran gerade so viel Prozente gewonnen als ihn der Acker selbst kostete.

$x = 80$ Thl.

52. Von einem Bataillon fielen in einem heftigen Kampfe eine gewisse Anzahl Soldaten, 3mal so viel und 6 Mann wurden verwundet, 4mal so viel als fielen und 12 Mann wurden gefangen und nur 25mal so viel als fielen und noch 22 Mann giengen unversehrt aus diesem Kampfe hervor. Das Bataillon zählte vor dem Kampfe so viel Mann als die Quadratzahl der Gefallenen und noch 130 Mann.

$x = 30$ M.

53. Von den Dienstboten einer Herrschaft erhält der erste bei einem Familienereignisse ein gewisses Geschenk baar, der zweite das Doppelte des ersten und noch 4 Thl., der dritte das 4fache des zweiten und 6 Thl., der vierte das Doppelte des dritten weniger 7 Thl. Die Summa aller Geschenke beträgt so viel als das Quadrat des um 1 Thl. verminderten Geschenkes des zweiten.

$x = 6.$

54. Ein Wirth hat drei Fässer Wein. Das zweite hält das Doppelte des ersten und 1 Eimer, der Inhalt des dritten ist gleich dem Quadrate des um 4 verminderten Inhaltes des zweiten und sein ganzer Vorrath ist gleich dem Quadrate des um 2 vermehrten Inhaltes des ersten Fasses und zwei Eimern.

$x = 4.$

55. Unter die würdigsten Schüler einer Anstalt wurden in den beiden letzten Jahren je 1200 Thl. gleichmässig vertheilt; im letzten Jahre war ein Schüler weniger als im ersten, dadurch bekam jeder 40 Thl. mehr.

$x = 6, 5.$

56. Zur Füllung eines Wasserbehälters können 2 Röhren benützt werden; die eine braucht hiezu 1 Stunde und 36 Minuten länger als die andere; fliessen beide Röhren zugleich, so ist der Behälter in 36 Minuten gefüllt. In welcher Zeit wird ihn jede der beiden Röhren füllen?

x = 48 Min., II. R. 2 St. 24 Min.

57. Ein Turnplatz von rechteckiger Form, 200′ lang und 100′ breit, soll um 3112,5 □′ vergrössert und doch die Aehnlichkeit der ursprünglichen Form gewahrt werden.

x = 215′; Zunahme der Länge 15′, Zunahme der Breite 7,5′.

58. Auf ein rechteckiges Grundstück von 75′ Länge und 56′ Breite soll ein Haus gebaut werden, das gerade das $^{24}/_{35}$fache des Grundstücks einnimmt und mit seinen Mauern von allen Seiten desselben gleich weit absteht.

x = 11′ Abstand.

59. „Merk' auf, mein junges Mädchen: das Zehnfache von der Quadratwurzel aus einer Schaar Gänse, welche die Wolken sich zusammenziehen sahen, flog auf den Manussee," spricht der phantasiereiche Lehrer in wohlklingender Sanskritsprache und in dieser anzüglichen Redeform fortfahrend: „ein Achtel der ganzen Schaar flog vom Rande des Wassers unter eine Menge Wasserlilien und drei Paare spielten auf dem Wasser. Nun sage mir, mein junges Mädchen mit den schönen Locken, was war die ganze Zahl der Gänse?" *

x = 144.

60. Zu einer Erwachsenen sich wendend beginnt er in einschmeichelnd poëtisches Gewand seine Aufgabe hüllend: „Mein Fräulein! die Quadratwurzel aus der Hälfte einer Anzahl Bienen und acht Neuntel der ganzen Zahl flog auf den Jasmin; eine einzige weibliche Biene summste in Antwort auf das Geschwirr einer männlichen, die in einer Wasserlilie eingeschlossen war. O schönes Fräulein, sag' mir die Anzahl der Bienen?" *

x = 72.

61. Es befinden sich zwei leuchtende Körper in einer Entfernung von 116′; der erste strömt ein 6,9 mal stärkeres Licht aus als

* The Prose Works of W. H. Longfellow, London 1864, IV. pag. 206; mitgetheilt von Rickher.

der zweite. In welcher Entfernung wird ein Gegenstand von beiden Lichtquellen gleich stark beleuchtet? *

$x = 84,\ 32.$

62. Wie hoch springt eine Fontaine, die eine Fallhöhe von 109′ 1″ bayr. hat?

$x = 85'$ Sprunghöhe.

63. Wie hoch springt eine Fontaine bei 168′ Fallhöhe?

$x = 120'.$

64. Wie gross ist die Sprunghöhe bei 338′ 4″ Fallhöhe? **

$x = 200'.$

65. Wenn man auf einer gewissen Stelle am steilen Ufer des Königssee's einen Stein frei in den See fallen lässt, so verfliessen vom Augenblicke seines Fallens bis zu dem Augenblicke, in dem man den Schall seines Aufschlagens auf dem Wasserspiegel wahrnimmt 6,24 Sek. Wie hoch ist hier das Ufer, da bekanntlich ein freifallender Körper in der ersten Sekunde seines Fallens 15′, der Schall dagegen in jeder Sekunde 1000′ (paris.) zurücklegt? ***

$x = 6;\ 540'.$

66. Ein Geschäftsmann bezieht von einer Waare um eine gewisse Summa; das Porto beträgt 5 %. Er verkauft die bezogene Waare um 1025 Thl. und gewinnt dabei soviel Prozente als das $\frac{1}{5}$fache der Einkaufssumma ohne Porto ausmacht.

$x = 500$ Thl.

67. Ein Bote braucht von A nach B 25 Stunden; in derselben Zeit geht ein anderer Bote von einem um 5 Stunden rückwärts gelegenen Orte C ab. Er will aber mit jenem im Orte B zugleich eintreffen und sucht desshalb bei je 4 Stunden Wegs immer 1 Stunde zu gewinnen.

$x = 20.$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 146—154; Heis §. 71 B.

---

* Die Beleuchtungen eines Gegenstandes verhalten sich wie die Stärken der Lichtquellen und umgekehrt wie die Quadrate seiner Entfernungen von denselben.

** 5′ Steighöhe = 5′ 1″ Fall; die zuzugebenden Zolle steigen nach den Quadraten der Anzahl der Einheiten (Einheit = 5′).

*** Die zurückgelegten Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten.

## b. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

### §. 165.

**Erklärung 1.** Jede quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten lässt sich, wie eine quadratische mit einer Unbekannten (§. 160), als ein Product zweier einfachen Gleichungen mit zwei Unbekannten betrachten.

Die allgemeine Form zweier einfachen Gleichungen sei:

$$ax + by + c = d$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma = \delta, \text{ so ist:}$$

$$(ax + by + c)(\alpha x + \beta y + \gamma) = d\delta.$$

Wenn wir dieses formelle Product entwickeln und für die darin vorkommenden Summen und Producte bekannter Zahlen m, n, p, q, r, s, t (cf. §. 160, 1) setzen, so ist die allgemeine Form einer vollständigen quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten

$$mx^2 + ny^2 + pxy + qx + ry + s = t.$$

Diese Glieder treten zwar in den wenigsten Gleichungen vollständig auf; damit hören sie aber nicht auf, quadratische zu sein.

**Erklärung 2.** Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten sind ebenso unbestimmt, wie Gleichungen des I. Grades mit mehreren Unbekannten.

Um in solchen Aufgaben die Werthe der Unbekannten bestimmen zu können, müssen sich auch hier, wie dort, ebenso viele von einander verschiedene und doch nicht in Widerspruch stehende Gleichungen bilden lassen, als Unbekannte gegeben sind.

**Erklärung 3.** Auch hier hat man durch Elimination der einen Unbekannten nach der andern das ganze System der vorhandenen Gleichungen bis auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zu reduciren. Die Elimination vollzieht sich nach den nämlichen Methoden, wie dort (§. 133) und es führt auch hier die eine vor der andern oft rascher zum Ziele, je nach den Formen der gegebenen Gleichungen.

In den meisten Fällen jedoch ist es einfacher den Werth der Unbekannten nicht unmittelbar aus den gegebenen Gleichungen zu bestimmen, sondern durch Umformungen derselben einfache Verbindungen

der Unbekannten: Summen, Differenzen, Producte, zu suchen. Aus diesen lässt sich der Werth jeder Unbekannten leicht bestimmen (cf. §. 134, I). Hiebei sind nach den Formen der Gleichungen verschiedene Methoden zu unterscheiden.

## §. 166.

### Methoden der Auflösungen.

I.

Es sei gegeben:

| a. | | b. |
|---|---|---|
| 1. $xy = p$ | | 1. $xy = p$ |
| 2. $x + y = s$. | | 2. $x - y = d$. |
| 3. $x^2 + 2xy + y^2 = s^2$ | (Quadr. von 2). | $x^2 - 2xy + y^2 = d^2$ |
| 4. $4xy = 4p$ | (4fache von 1). | $4xy = 4p$ |
| 5. $x^2 - 2xy + y^2 = s^2 - 4p$ | (Diffrz. von 3 und 4). | $x^2 + 2xy + y^2 = d^2 + 4p$. |
| 6. $x - y = \sqrt{s^2 - 4p}$ | (Wurzel aus 5). | $x + y = \sqrt{d^2 + 4p}$ |
| 7. $x + y = s$ | (cf. 2). | $x - y = d$ |
| $x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$ | (aus der Summa von 6 u. 7). | $x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4p}}{2}$. |
| $y = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$ | (aus der Diffrz. von 6 u. 7). | $y = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4p}}{2}$. |

**Erklärung.** Da in diesen Beispielen die algebraische Summa $x^2 \pm 2xy + y$ ebenso gut aus $(x \pm y)(x \pm y)$ entstanden sein kann, wie aus $(y \pm x)(y \pm x)$, so müssen die daraus gefundenen Werthe von x und y sich mit einander vertauschen lassen; der Unterschied liegt nur im Vorzeichen der darin vorkommenden Wurzel.

Gleichungen, deren Werthe von x und y vertauscht werden können, wenn man das Vorzeichen der Wurzel berücksichtigt, heissen symmetrisch.

II.

Es sei gegeben:

| a. | | b. |
|---|---|---|
| 1. $x^2 + y^2 = \sigma$ | | $x^2 - y^2 = \delta$ |
| 2. $xy = p$ | | $xy = p$ |
| 3. $2xy = 2p$ | (2fache von 2). | $2xy = 2p$ |
| | | u. s. w. |

4. $x^2 + 2xy + y^2 = \sigma + 2p$ (Summa aus 1 und 3).

5. $x^2 - 2xy + y^2 = \sigma - 2p$ (Diffrz. aus 1 und 3).

6. $x + y = \sqrt{\sigma + 2p}$ (Wurzel aus 4).

7. $x - y = \sqrt{\sigma - 2p}$ (Wurzel aus 5).

Aus 6 und 7 können die Werthe von x und y nach Methode I leicht gefunden werden.

### III.

Es sei gegeben:

a.

1. $x^2 + y^2 = \sigma$

2. $x + y = s$

3. $x^2 + 2xy + y^2 = s^2$ (Quadrat von 2).

4. $2xy = s^2 - \sigma$ (Diffrz. von 3 und 1).

5. $xy = \frac{s^2 - \sigma}{2}$.

b.

$x^2 - y^2 = \delta$

$x - y = d$

$x^2 - 2xy + y^2 = d^2$

u. s. w.

Aus 5 und 2 lassen sich nach I die Werthe für x und y ohne Schwierigkeit bestimmen.

### IV.

Es sei gegeben:

a.

1. $x^3 + y^3 = \sigma$

2. $x + y = s$

3. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = s^3$ (Kubus v. 2).

$x^3 \qquad + y^3 = -\sigma$

$- \qquad -$

4. $3x^2y + 3xy^2 = s^3 - \sigma$ (Diffrz. von 3 und 1).

$3xy(x + y) = s^3 - \sigma$

$3sxy = s^3 - \sigma$ (p. Subst. aus 2).

5. $xy = \frac{s^3 - \sigma}{3s}$.

b.

$x^3 - y^3 = \delta$

$x - y = d$

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = d^3$

u. s. w.

Aus 2 und 5 ergeben sich die Werthe für x und y.

### V.

Es sei gegeben:

a.

1. $x^4 + y^4 = \Sigma$

2. $x + y = s$

b.

1. $x^4 + y^4$

2. $x - y$

Man bildet Biquadrat von 2 u. s. w.

3. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = s^4$ (Biquadrat von 2).

$x^4 \qquad + y^4 = \Sigma$

$- \qquad - \quad -$

$4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = s^4 - \Sigma$ (Diffrz. von 3 und 1).

4. $4xy(x^2 + 2xy + y^2) - 2(xy)^2 = s^4 - \Sigma$

5. $x^2 + 2xy + y^2 = s^2$ (Quadrat aus 2).

$2(xy)^2 - 4s^2xy = \Sigma - s^4$ (p. subst. aus 5 in 4 und $\times - 1$).

$$(xy)^2 - 2s^2xy = \frac{\Sigma - s^4}{2}.$$

6. $(xy)^2 - 2s^2xy + s^4 = \frac{\Sigma - s^4 + 2s^4}{2}$ (quadratische Ergänzung).

7. $xy - s^2 = \pm\sqrt{\frac{s^4 + \Sigma}{2}}$ (Wurzel aus 6.)

8. $xy = s^2 \pm \sqrt{\frac{s^4 + \Sigma}{2}}.$

Aus 8 und 2 lassen sich die Werthe von x und y bestimmen.

## VI.

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{xyz}{x+y} = k$ | $\frac{xyz}{y+z} = m$ | $\frac{xyz}{x+z} = n$ |
| $xyz = kx + ky$ | $xyz = my + mz$ | $xyz = nx + nz.$ |
| $1 = \frac{k}{yz} + \frac{k}{xz}$ | $1 = \frac{m}{xz} + \frac{m}{xy}$ | $1 = \frac{n}{yz} + \frac{n}{xy},$ |

nachdem die drei Gleichungen mit xyz dividirt worden sind.

Setzt man noch:

$$\frac{1}{yz} = x_1, \quad \frac{1}{xz} = x_2; \quad \frac{1}{xy} = x_3,$$

so ist:

$$kx_1 + kx_2 = 1 \quad | \quad mx_2 + mx_3 = 1 \quad | \quad nx_1 + nx_3 = 1.$$

Die Lösung dieser drei Gleichungen gibt:

$$x_1 = \frac{km + mn - kn}{2kmn}$$

$$x_2 = \frac{kn + mn - km}{2kmn}$$

$$x_3 = \frac{km + kn - mn}{2kmn};$$

und durch Substitution erhält man:

4. $$yz = \frac{2kmn}{km + mn - kn} = \alpha.$$

5. $$xz = \frac{2kmn}{kn + mn - km} = \beta.$$

6. $$xy = \frac{2kmn}{km + kn - mn} = \gamma.$$

7. $(xyz)^2 = \alpha\beta\gamma$ (Product aus 4, 5 u. 6).

8. $xyz = \pm\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ (Wurzel aus 7).

$$x = \pm\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha}}$$ (Quotient aus 8 und 4).

$$y = \pm\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}$$ (Quotient aus 8 und 5).

$$z = \pm\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}$$ (Quotient aus 8 und 6).

Es sind nur noch für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die entsprechenden Werthe einzusetzen.

## §. 167.

### Beispiele.

1.

$$y^3 = \frac{xy}{3} \quad\Big|\quad x - y = 2$$

$$3y^2 = x \qquad x = 2 + y$$

$$3y^2 = 2 + y$$

$$3y^2 - y = 2$$

$$y^2 - \frac{y}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y^2 - \frac{y}{3} + \frac{1}{36} = \frac{25}{36}$$

$$y - \frac{1}{6} = \pm\frac{5}{6}$$

$$y = 1$$

$$x = 3.$$

2.

$$3x + 3y = 7{,}8x - 7{,}8y \quad\Big|\quad x + y^2 = 82$$

$$10{,}8y = 4{,}8x \qquad \frac{10{,}8y}{4{,}8} + y^2 = 82$$

$$\frac{10{,}8y}{4{,}8} = x \qquad y^2 + \frac{10{,}8y}{4{,}8} + \frac{29{,}16}{23{,}04} = \frac{1918{,}44}{23{,}04}$$

$$y + \frac{5{,}4}{4{,}8} = \pm\frac{43{,}8}{4{,}8}$$

$$y = \frac{38{,}4}{4{,}8} = 8$$

$$x = 18.$$

3.

$$xy - y = 25 \qquad | \qquad xy + x = 36$$

$$x(y+1) = 36$$

$$x = \frac{36}{y+1}$$

$$\frac{36y}{y+1} - y = 25$$

$$36y - y^2 - y = 25y + 25$$

$$-25 = y^2 - 10y$$

$$0 = y^2 - 10y + 25$$

$$0 = y - 5$$

$$5 = y.$$

$$x = \frac{36}{5+1}$$

$$x = 6$$

4.

$$x^2y + xy^2 = 540 \qquad | \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{12}$$

$$y + x = \frac{5xy}{12}.$$

$$^* \; xy(x+y) = 540$$

$$xy \cdot \frac{5xy}{12} = 540$$

$$(xy)^2 = 1296$$

$$^* \; xy = 36$$

$$36(x+y) = 540$$

$$x + y = 15 \quad !$$

$$^* \; x^2 + 2xy + y^2 = 225$$

$$4xy = 144$$

$$- \qquad -$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 81$$

$$x - y = 9$$

$$x + y = 15 \quad !$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$y = 3.$$

5.

$$- \qquad + \qquad -$$

$$5(x-13)^2 - 12(y-5)^2 = 33 \qquad | \qquad 4(x-13)^2 - 6(y-5)^2 = 30$$

$$8(x-13)^2 - 12(y-5)^2 = 60 \qquad | \qquad 8(x-13)^2 - 12(y-5)^2 = 60$$

$$3(x-13)^2 = 27$$

$$(x-13)^2 = 9$$

$$x - 13 = 3$$

$$x = 16! \text{ rechts subst.}$$

$$36 - 6(y-5)^2 = 30$$

$$6 = 6(y-5)^2$$

$$1 = (y-5)^2$$

$$1 = y - 5$$

$$y = 6.$$

---

Anmerkung. Die mit * und ! bezeichneten Gleichungen müssen im Verlaufe der Operation wieder eingesetzt werden.

6.

$$* \quad (x+y)^2 + (x-y)^2 = 200$$
$$3(x+y)^2 + 3(x-y)^2 = 600$$
$$196 + (x-y)^2 = 200$$
$$(x-y)^2 = 4$$
$$x - y = 2$$
$$y = 6.$$

$$- \qquad - \qquad -$$
$$2(x+y)^2 + 3(x-y)^2 = 404$$
$$3(x+y)^2 + 3(x-y)^2 = 600$$
$$* \quad (x+y)^2 = 196$$
$$x + y = \pm 14$$
$$x + y = 14$$
$$x - y = 2$$
$$x = 8.$$

7.

$$3(x+1)^2 + 5(y-1)^2 = 827$$
$$6(x+1)^2 + 10(y-1)^2 = 1654$$
$$6(x+1)^2 + 9(y-1)^2 = 1590$$
$$- \qquad - \qquad -$$
$$(y-1)^2 = 64$$
$$y - 1 = \pm 8$$
$$y = 9.$$

$$2(x+1)^2 + 3(y-1)^2 = 530$$
$$6(x+1)^2 + 9(y-1)^2 = 1590$$
$$2(x+1)^2 + 192 = 530$$
$$2(x+1)^2 = 338$$
$$(x+1)^2 = 169$$
$$x + 1 = 13$$
$$x = 12.$$

8.

$$a^{xx+yy} = b^m \qquad \Big| \qquad p^{xx-yy} = q^n$$

$$(x^2 + y^2)\log a = m \log b$$
$$(x^2 - y^2)\log p = n \log q$$

$$x^2 + y^2 = \frac{m \log b}{\log a}$$

$$x^2 - y^2 = \frac{n \log q}{\log p}$$

$$2x^2 = \frac{m \log b}{\log a} + \frac{n \log q}{\log p}$$

$$x = \sqrt{\frac{m \log b}{2 \log a} + \frac{n \log q}{2 \log p}}.$$

$$y = \sqrt{\frac{m \log b}{2 \log a} - \frac{n \log q}{2 \log p}}.$$

9.

1. $\frac{x^3 - y^3}{(x + y)(x - y)} = 4\frac{2}{3}.$ | $\frac{x^3 + y^3}{(x + y)(x - y)} = 6.$

2. $\frac{x^3 + y^3}{(x + y)(x - y)} = 6.$

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{7}{9} \text{ (Quotient aus 1 und 2).}$$

$$9x^3 - 9y^3 = 7x^3 + 7y^3$$

$$2x^3 = 16y^3$$

* $x = 2y$; diesen Werth eingesetzt in 1, gibt:

$$\frac{8y^3 - y^3}{(2y + y)(2y - y)} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{7y^3}{3y^2} = \frac{14}{3}$$

$$7y = 14$$

$$y = 2 \text{ und } x = 4.$$

10.

$xy = 1.$ | $x + y + xy = \frac{3m^2 + 1}{m^2 - 1}$

$$-xy = -1$$

* $x + y = \frac{3m^2 - m^2 + 1 + 1}{m^2 - 1} = \frac{2(m^2 + 1)}{m^2 - 1}$

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{4m^4 + 8m^2 + 4}{m^4 - 2m^2 + 1}$$

$$4xy = 4$$

$$- \qquad -$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{4m^4 + 8m^2 + 4 - 4m^4 + 8m^2 - 4}{m^4 - 2m^2 + 1}$$

$$x - y = \frac{4m}{m^2 - 1}$$

* $x + y = \frac{2(m^2 + 1)}{m^2 - 1}$

$$2x = \frac{4m + 2m^2 + 2}{m^2 - 1}$$

$$x = \frac{m^2 + 2m + 1}{m^2 - 1} = \frac{(m+1)(m+1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{m+1}{m-1}$$

$$y = \frac{m-1}{m+1}.$$

$$\text{Substit. I. L. } \frac{m+1}{m-1}\cdot\frac{m-1}{m+1} = 1;\ R = 1.$$

$$\text{„ II. L. } \frac{m+1}{m-1} + \frac{m-1}{m+1} + 1 = \frac{m^2+2m+1+m^2-2m+1}{m^2-1} + 1$$

$$= \frac{2m^2+2+m^2-1}{m^2-1} = \frac{3m^2+1}{m^2-1};$$

$$R. = \frac{3m^2+1}{m^2-1}.$$

## 11.

1.

$$x+y=6$$
$$x^2+2xy+y^2=36$$
$$* \quad x^2+y^2=36-2xy.$$

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=216 \text{ (Cub. v. 1)}$$
$$x^3+y^3=216-3xy(x+y)$$
$$** \quad x^3+y^3=216-3xy.6.$$

| 2.

$$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=3276$$
$$* \quad (36-2xy)(216-18xy)=3276$$
$$7776-432xy-648xy+36x^2y^2=3276$$
$$36x^2y^2-1080xy=-4500$$
$$(xy)^2-30xy=-125$$
$$(xy)^2-30xy+225=100$$
$$! \quad xy-15=\pm 10$$
$$xy=5 \text{ od. } 25.$$

$$! \quad x^2+2xy+y^2=36 \text{ (Quadrat aus 1).}$$
$$4xy = 20$$
$$- \qquad -$$
$$x^2-2xy+y^2=16$$
$$x-y=\pm 4$$
$$x+y=6$$
$$x=5$$
$$y=1.$$

## 12.

1.

$$x^2+y^2+x-y=58$$
$$(x^2+y^2)+(x-y)=58$$

| 2.

$$(x^2+y^2)(x-y)=265$$
$$4(x^2+y^2)(x-y)=1060$$

$$(x^2+y^2)^2+2[(x^2+y^2)(x-y)]+(x-y)^2=3364$$
$$4(x^2+y^2)(x-y) = 1060$$
$$- \qquad -$$
$$(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)(x-y)+(x-y)^2=2304.$$
$$x^2+y^2-(x-y)=48$$
$$x^2+y^2+(x-y)=58 \text{ (Gleichung 1).}$$
$$2(x^2+y^2)=106$$
$$* \quad x^2+y^2=53$$

$$x - y = 58 - (x^2 + y^2) \text{ (nach Gleichung 1).}$$

$$* \quad x - y = 58 - 53$$

$$x - y = 5$$

$$- \quad + \quad - \quad -$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 = 53$$

$$2xy = 28$$

$$xy = 14$$

$$4xy = 56$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 25$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 81$$

$$x + y = \pm 9$$

$$x - y = 5$$

$$x = 7$$

$$y = 2.$$

13.

1. $(x^4 - y^4)(x^2 - y^2) = 640x^2y^2$ | 2. $(x^2 - y^2)(x - y) = 16xy$

$(x^2 - y^2)(x - y) = 16xy$ $\quad$ $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 16xy.$

$$* \quad (x^2 + y^2)(x + y) = 40xy \text{ (Quotient aus 1 und 2).}$$

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 40xy$$

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 16xy$$

$$- \quad + \quad + \quad - \quad -$$

$$2x^2y + 2xy^2 = 24xy$$

$$2xy(x + y) = 24xy$$

$$(x + y) = 12 \quad !$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 144$$

$$x^2 + y^2 = 144 - 2xy!$$

$$* \quad (x^2 + y^2)(x + y) = 40xy$$

$$(144 - 2xy)\,12 = 40xy \quad !!$$

$$(144 - 2xy)\,3 = 10xy$$

$$432 - 6xy = 10xy$$

$$432 = 16xy$$

$$xy = 27$$

$$- \quad -$$

$$4xy = 108$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 144$$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2xy + y^2 &= 36 \\
x - y &= 6 \\
x + y &= 12 \\
\hline
x &= 9 \\
y &= 3.
\end{aligned}
$$

14.

1.

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} &= \frac{7}{2} \\
x + 3\sqrt[3]{x^2 y} + 3\sqrt[3]{x y^2} + y &= \frac{343}{8}. \\
x \qquad\qquad\qquad\qquad y &= \frac{217}{8} \\
- \qquad\qquad\qquad - \quad & \quad - \\
\hline
3\sqrt[3]{x^2 y} + 3\sqrt[3]{x y^2} &= \frac{126}{8} \\
\sqrt[3]{x^2 y} + 3\sqrt[3]{x y^2} &= \frac{42}{8} \\
\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right) &= \frac{42}{8} \\
\sqrt[3]{xy} . \frac{7}{2} &= \frac{42}{8} \text{ (aus 1).} \\
\sqrt[3]{xy} &= \frac{3}{2} \\
xy &= \frac{27}{8}.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
x + y &= 27\frac{1}{8}. \\
x^2 + 2xy + y^2 &= \frac{47089}{64} \\
4xy &= \frac{108}{8} \\
- \qquad\qquad & \quad - \\
\hline
x^2 - 2xy + y^2 &= \frac{46225}{64} \\
x - y &= \frac{215}{8} \\
x + y &= \frac{217}{8} \\
\hline
2x &= \frac{432}{8} = 54 \\
x &= 27 \\
y &= \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

## §. 168.

### Aufgaben.

I.

| | | |
|---|---|---|
| 1. $(x + y)^2 = 100$ | $xy = 24$ | $x = 6, \ y = 4.$ |
| 2. $x^2 + xy = 11$ | $y^2 + xy = 19{,}25$ | $x = 2, \ y = 3\ 5.$ |
| 3. $x^3 + y^3 = 4104$ | $x + y = 24$ | $x = 15, \ y = 9.$ |
| 4. $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = 6\frac{1}{2}$ | $xy = 60$ | $x = 12, \ y = 5.$ |
| 5. $3x - 2y = 7$ | $xy = 20$ | $x = 5, \ y = 4.$ |
| 6. $x + y = 8$ | $x + xy = 20$ | $x = 5, \ y = 3.$ |
| 7. $y^2 - 5x = 5y \quad 9$ | $x + 2y = 15$ | $x = 1, \ y = 7.$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8. | $5xy + 2x + y = 37$ | $\frac{9x}{y} = \frac{4y}{x}$ | $x = 2, \; y = 3.$ |
| 9. | $15x + 8y = 3xy$ | $x + xy = 60.$ | $x = 6, \; y = 9.$ |
| 10. | $\frac{\sqrt{xy}}{8} = \frac{1}{4}$ | $x^2 - y^2 = 15.$ | $x = 4, \; y = 1.$ |
| 11. | $x + y = m$ | $x^2 + y^2 = n$ | $\begin{cases} x = \frac{m \pm \sqrt{2n - m^2}}{2}. \\ y = \frac{m \mp \sqrt{2n - m^2}}{2}. \end{cases}$ |
| 12. | $(x + y)\,xy = pq$ | $xy = q$ | $\begin{cases} x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\ y = \frac{p \mp \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{cases}.$ |
| 13. | $36x^2 - 25y^2 = 119.$ | $6x - 5y = 7$ | $x = 2, \; y = 1.$ |
| 14. | $16x^2 - 9y^2 = 1980$ | $4x - 3y = 30$ | $x = 12, \; y = 6.$ |
| 15. | $y - x = 3$ | $8x + y = \frac{5}{3}xy$ | $x = 3, \; y = 6.$ |
| 16. | $\sqrt{5x + 2y + 11} - 4 = 7$ | $x = \frac{180}{y}$ | $x = 18, \; y = 10.$ |
| 17. | $x\sqrt{y} = 30$ | $x + \sqrt{y} = 13$ | $x = 10, \; y = 9.$ |
| 18. | $4x^2 + 9y^2 = 544$ | $3xy = 120$ | $x = 10, \; y = 4.$ |
| 19. | $x^2y - xy^2 = \frac{4cd}{c^2 - d^2}$ | $xy = 1$ | $x = \frac{c+d}{c-d}, \; y = \frac{c-d}{c+d}.$ |
| 20. | $(x - y)^2 = \frac{144a^2}{a^4 - 18a^2 + 81}$ | $xy = 1$ | $x = \frac{a+3}{a-3}, \; y = \frac{a-3}{a+3}.$ |
| 21. | $xy + x + y = 55$ | $x^2 + y^2 = 85$ | $x = 7, \; y = 6.$ |
| 22. | $x^2 + y^2 = \frac{13}{x - y}$ | $xy = \frac{6}{x - y}$ | $x = 3, \; y = 2.$ |
| 23. | $x^2y + xy^2 = 308$ | $28x + 28y = 11xy$ | $x = 7, \; y = 4.$ |
| 24. | $x^2 + y^2 = \frac{832}{x - y}$ | $\frac{384}{x - y} = xy$ | $x = 12, \; y = 8.$ |
| 25. | $x^3 + y^3 = 730$ | $\sqrt{xy} = 3$ | $x = 9, \; y = 1.$ |
| 26. | $\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3} = 10$ | $\sqrt{x^3y} - \sqrt{xy^3} = 6$ | $x = 4, \; y = 1.$ |
| 27. | $x - 17y = 12$ | $y^4 = \frac{xy^2}{7}$ | $x = 63, \; y = 3.$ |
| 28. | $x - y + xy = 36$ | $x^2 + y^2 = 80$ | $x = 8, \; y = 4.$ |
| 29. | $x^2 - y^2 = \frac{3}{64}$ | $x + y = \frac{3}{8}$ | $x = \frac{1}{4}, \; y = \frac{1}{8}.$ |
| 30. | $\frac{8}{2x + y} = \frac{1}{2}$ | $\frac{7{,}5}{xy} = 1$ | $x = 7{,}5, \; y = 1.$ |

| | | |
|---|---|---|
| 31. $x - y = 1$ | $(xy)^2 = 1\frac{19}{81}$ | $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{2}{3}$. |
| 32. $x^2 + y^2 = 52$ | $xy - x - y = 14$ | $x = 6$, $y = 4$. |
| 33. $x^2 + xy = 16{,}5$ | $xy + y^2 = 13{,}75$ | $x = 3$, $y = 2{,}5$. |
| 34. $\frac{2}{5}(x+1)^2 + \frac{1}{4}(y-8)^2 = 14$ | $(x+1)^2 - \frac{1}{8}(y-8)^2 = 23$ | $x = 4$, $y = 12$. |
| 35. $x^2y - xy^2 = 30$ | $x^3y^2 - x^2y^3 = 300$ | $x = 5$, $y = 2$. |
| 36. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$ | $xy = 144$ | $x = 16$, $y = 9$. |
| 37. $x^2 - y^2 = 261$ | $2xy = 380$ | $x = 19$, $y = 10$. |
| 38. $x^2 + y\sqrt{xy} = 91$ | $y^2 + x\sqrt{xy} = 68{,}25$ | $x = 8$, $y = 4{,}5$. |
| 39. $x + \sqrt{xy} + y = 6\frac{1}{2}$ | $x^2 + xy + y^2 = 22\frac{3}{4}$ | $x = 4\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. |
| 40. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8$ | $x + y = 40$ | $x = 36$, $y = 4$. |
| 41. $y^2 + x\sqrt{xy} = 162$ | $x^2 + y\sqrt{xy} = 81$ | $x = 3$, $y = 12$. |
| 42. $x^2 + y = 32$ | $x\sqrt{y} = 16$ | $x = 4$, $y = 16$. |
| 43. $(x + 14)(y + 12) = 768$ | $x + y = 30$ | $x = 18$, $y = 12$. |
| 44. $xy + y^2 = 220$ | $x^2 - y^2 = 44$ | $x = 12$, $y = 10$. |
| 45. $y\sqrt{x} = 80$ | $x\sqrt{y} = 100$ | $x = 25$, $y = 16$. |
| 46. $x^2 + xy + y^2 = 49$ | $x^2 + y^2 = 34$ | $x = 5$, $y = 3$. |
| 47. $xy - y^2 = \frac{3x}{2}$ | $x^2 - xy = 24y$ | $x = 8$, $y = 2$. |
| 48. $(x + 3) + (y + 2) = 16$ | $x + y = 11$ | $x = 6$, $y = 5$. |
| 49. $\sqrt{x^3y} - \sqrt{xy^3} = 7{,}5$ | $\frac{\sqrt{xy}}{12} = \frac{1}{4}$ | $x = 4{,}5$, $y = 2$. |
| 50. $x^2 + xy + y^2 = 2\frac{1}{9}$ | $xy = \frac{2}{3}$ | $x = 1$, $y = \frac{2}{3}$. |
| 51. $\frac{9}{16}x^2 - 5 = \frac{y^2}{9}$ | $\frac{3x}{4} - \frac{y}{3} = 1$ | $x = 4$, $y = 6$. |
| 52. $\frac{2}{xy} = \frac{1}{24}$ | $\frac{x^2 + y^2}{(xy)^2} = \frac{25}{576}$ | $x = 8$, $y = 6$. |
| 53. $x^3 - y^3 = 5616$ | $x - y = 12$ | $x = 18$, $y = 6$. |
| 54. $x^3 - y^3 = 936$ | $x - y = \frac{240}{xy}$ | $x = 10$, $y = 4$. |
| 55. $x + y = 16$ | $x^3 + y^3 = 1072.$ | $x = 9$, $y = 7$. |
| 56. $x + y = 14$ | $x^3 + y^3 = 15\frac{1}{6}xy$ | $x = 8$, $y = 6$. |
| 57. $x^3 + y^3 + xy = 209$ | $x^3 - 189 = -y^3$ | $x = 5$, $y = 4$. |
| 58. $x^3 + y^3 - 3y^2 = 12 + 3x^2$ | $xy(x+y) + x^2 + y^2 = 68$ | $x = 4$, $y = 2$. |
| 59. $x^2 + xy + y = 21$ | $x^3 - y^3 = 63$ | $x = 4$, $y = 1$. |

60. $x^2 - y^2 = 60$ | $x^4 - y^4 = 4080$ $x = 8,\ y = 2.$

61. $(x^4-y^4)(x^2-y^2)=70{,}3125x^2y^2$ | $(x^2-y^2)(x-y)=3{,}75xy$ $x = 5,\ y = 2{,}5.$

62. $(x^2+y^2)(x+y) = 7344$ | $(x^2-y^2)(x-y) = 864.$ $x = 15,\ y = 9.$

63. $x+y=5$ $x^3+y^3 = \frac{35xy}{6}$ $x = 3,\ y = 2.$

64. $x^3+y^3 = 3x^2+3y^2-4$ | $x^2+y^2+xy(x+y) = 43$ $x = 3,\ y = 2.$

65. $x^3 - y^3 = 448.$ | $x - y = \frac{128}{xy}$ $x = 8,\ y = 4.$

66. $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y} - 6\frac{1}{5} = 0$ | $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y} - 6\frac{1}{7} = 0$ $x = 6,\ y = 1$

67. $x^3+y^3 = 91$ | $xy^3 : yx^3 = 9 : 16$ $x = 4,\ y = 3.$

68. $(x-y)(x^2-y^2) = 360$ | $(x+y)(x^2+y^2) = 680$ $x = 8,\ y = 2.$

69. $\frac{5}{6}(x-2)^2 + \sqrt{2y^2+25} = 98\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}(x-2)^2 + \frac{1}{3}\sqrt{2y^2+25} = 45$

$x = 12,\ y = 10.$

70. $axy+bx+cy=d$ | $\frac{mx}{y} = \frac{ny}{x}$

$$x = \left(\sqrt{b^2n^3+2bc\sqrt{mn}+mn^2+4dn\sqrt{mn}} - bn - c\sqrt{mn}\right) : 2am$$

$$y = \left(\sqrt{b^2n+2bc\sqrt{mn}+c^2m+4d\sqrt{mn}} - b\sqrt{n} - c\sqrt{mn}\right) : 2a\sqrt{n}.$$

71. $3x+4y = \frac{54z}{8}$, $4x+2z = \frac{56y}{6}$, $2x^2+3y^2+z^2 = 372$ — $x = 10.$ $y = 6.$ $z = 8.$

72. $y^2 - xz = 0$, $x^2+z^2 = q - y^2$, $x+y = p - z$ — $x = \frac{3q-p^2}{2p}.$ $y = \frac{p^2-q}{2p}.$ $z = \frac{p^2-q}{p}.$

73. $3yz+4y = 118-9z$, $10tz+5z = 26+4t$, $7\frac{1}{2}tz+4t = 79-10x$, $2xy+3x = 158-2y$ — $x = 6.$ $y = 10.$ $z = 2.$ $t = 1.$

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 52 und Seite 71—80 Heis §. 73.

II.

74. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 5, ihre Summa mit der grössern Zahl multiplicirt, gibt 432.

$x = 16, \; y = 11.$

75. Die Summa zweier Zahlen ist 78, ihr Product 1512.

$x = 42, \; y = 36.$

76. Die Zahl 36 soll so in zwei Theile zerlegt werden, dass ihre Differenz mit dem grössern multiplicirt 560 zum Producte gibt.

$x = 28, \; y = 8.$

77. Die Summa zweier Zahlen ist 14, die Summa ihrer Quadrate 106.

$x = 9, \; y = 5.$

78. Die Differenz zweier Zahlen ist 5, die Summa ihrer Quadrate 557.

$x = 19, \; y = 14.$

79. Von zwei Zahlen ist das Product 231 und die Summa ihrer Quadrate 562.

$x = 21, \; y = 11.$

80. Die Zahl 19 so in zwei Theile zu zerlegen, dass das Product der Theile zur Summa ihrer Quadrate addirt, 277 gibt.

$x = 12, \; y = 7.$

81. Die Zahl 25 in zwei Theile zu zerlegen, dass die Summa der Cuben 6175 ist.

$x = 18, \; y = 7.$

82. Die Quadratwurzel aus dem Producte zweier Zahlen ist 4 und die Differenz ihrer Quadrate ist 60.

$x = 8, \; y = 2.$

83. Zwei Zahlen geben zur Summa 11; wird die erste um 3, die zweite um 2 vermehrt, so geben sie zum Producte 55.

$x = 8, \; y = 3.$

84. Zwei Zahlen zu finden, deren Summa mit der Summa ihrer Quadrate multiplicirt 85 und deren Differenz mit der Differenz ihrer Quadrate multiplicirt zum Producte 45 gibt.

$y = 4, \; y = 1.$

85. Das Product zweier Zahlen zur ersten addirt, gibt 8 zur Summa, ihr 5faches Product ist gleich dem 9fachen der ersten und dem 4fachen der zweiten.

$x = 2, \ y = 3.$

86. Die Differenz zweier Zahlen ist gleich einem Quotienten, der zum Dividenden 16 und zum Divisor das Product dieser Zahlen hat und die Differenz ihrer Cuben ist 56.

$x = 4, \ y = 2.$

87. Es sind zwei Zahlen; die Differenz zwischen der Summa ihrer Quadrate und ihrer einfachen Summa ist gleich 68, zu ihrem Producte aber die einfache Summa addirt, gibt 44.

$x = 8, \ y = 4.$

88. Es sind zwei Zahlen; das Product aus der ersten und der Wurzel der zweiten ist 100, das Product aber aus der zweiten und der Wurzel der ersten ist 80.

$x = 25, \ y = 16.$

89. Es sind zwei Zahlen, vermehrt man die Wurzel aus ihrem Producte um das Quadrat der ersten mal der zweiten, so ist die Summa 2316, vermehrt man aber die Wurzel aus ihrem Producte mal der ersten um das Quadrat der zweiten, so ist diese Summa 273.

$x = 16, \ y = 9.$

90. Die Summa zweier Zahlen ist 5, die Summa ihrer Kuben ist ihr $5\frac{5}{6}$faches Product.

$x = 3, \ y = 2.$

91. Die Differenz zweier Zahlen ist 15, die Hälfte ihres Products ist der Kubus der zweiten.

$x = 18, \ y = 3.$

92. Die Summa zweier Zahlen ist 122 und die Summa ihrer Biquadrate ist 29884932.

$x = 68, \ y = 54.$

93. In einer Schule befinden sich 44 Schüler in zwei Klassen; 112 Thl. sollen so unter die Schüler vertheilt werden, dass jede Klasse die Hälfte bekommt, desshalb erhält jeder Schüler der ersten Klasse $1\frac{1}{2}$ Thl. mehr als ein Schüler der zweiten Klasse.

$x = 16, \ y = 28.$

94. In einem Laboratorium wurden von zwei Abtheilungen Kanonieren 2500 Patronen gefüllt und von beiden gleich viel Pulver gebraucht; hätte die erste so viel Patronen wie die zweite gefüllt, so hätte sie 36 Ctr. Pulver verarbeitet, hätte die zweite so viel Patronen wie die erste gefüllt, so hätte sie nur 16 Ctr. hiezu gebraucht. Wie viel Patronen, wie viel Pulver?

$x = 1000$, $y = 1500$; 24 Ctr. Pulver.

95. Wie gross sind die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn ihre Summa 34′ und die Hypotenuse 26′ lang ist?

Die grössere = 24′, die kleinere = 10′.

96. Die Diagonale eines Zimmers ist 34′, sein Flächeninhalt ist 480 □′. Wie lang und wie breit ist das Zimmer?

$x = 30'$ lang, $y = 16'$ breit.

97. Ein Quadrat hat zur Seite 98′; es soll ein dem Quadrate an Flächenraum gleiches Rechteck abgemessen werden, dessen vier Seiten $1\,^1/_4$ mal so gross werden als die des Quadrats. Wie lang und wie breit muss das Rechteck werden?

$x = 196'$, $y = 49'$.

98. Ein Landwirth will ein schmales Stück Wald in rechteckiger Form und 288 □° à 100 □′ Flächeninhalt an seinen Angrenzer vertauschen. Wie lang und wie breit muss das Tauschobject genommen werden, wenn sein Umfang gerade 944′ haben soll?

$x = 400'$ Länge, 72′ Breite.

99. Das Product dreier Zahlen ist 315, die Summa der Quadrate der beiden ersten mit der dritten Zahl multiplicirt, gibt 666 und die Differenz der dritten und ersten mit dem Quadrate der zweiten multiplicirt, gibt 196.

$x = 5$, $y = 7$, $z = 9$.

100. Die Summa dreier Zahlen ist 45, das Product aus der Summa der zweiten und dritten und aus dem Quadrate der ersten ist 4752 und die Differenz zwischen dem Quadrate der zweiten und der Summa der ersten und dritten ist 195.

$x = 12$, $y = 15$, $z = 18$.

101. Es ist eine dreizifferige Zahl zu suchen; die Quadrate der einzelnen Ziffern, ohne Rücksicht auf ihre dekadische Stellung, geben zur Summa 26, das Quadrat der mittlern ist um 1 grösser

als das doppelte Product der beiden äussern, zieht man aber von der gesuchten Zahl 297 ab, so ist die Differenz gleich der gesuchten Zahl, aber in umgekehrter Ordnung ihrer Ziffern.

$x = 4$, $y = 3$, $z = 1$; die Zahl 431.

102. Zwei Personen reisen nach einem 60 Meilen entfernten Orte und brechen zugleich auf; da aber die erste $^1/_4$ Meile in jeder Stunde mehr zurücklegt als die zweite, so kommt sie um acht Stunden früher zum Ziele.

$x = 1^1/_2$, $y = 1^1/_4$.

103. Zwei Schiffe, die 800 Meilen Entfernung haben, fahren einander entgegen; geht das erste um $46^2/_3$ Stunden früher ab als das zweite, so treffen sie sich auf der Mitte ihrer Fahrt; laufen aber beide gleichzeitig von ihren Hafenplätzen aus, so haben sie nach 25 Stunden eine Entfernung von 375 Meilen.

$x = 5$, $y = 12$.

104. Zwei Regimenter, die 30 Stunden von einander entfernt sind, brechen zugleich auf und marschiren gegen einander, um ihre Garnisonen zu wechseln; sie begegnen sich nach 12 Stunden ihres Aufbruchs, das erste hat zu jeder Stunde Weg $^1/_3$ länger gebraucht als das zweite.

$x = 1$, $y = ^3/_2$.

105. Vom Hauptquartiere wird eine Ordonnanz zur Vorhut abgeordnet, 2 Stunden später wird ihr eine zweite nachgeschickt vom Stabe einer Heeresabtheilung, die 5 englische Meilen näher bei der Vorhut liegt als das Hauptquartier; um die erste einzuholen, braucht die zweite gerade $^1/_6$mal so viel Stunden als sie Meilen in der Stunde zurücklegt, sie würde aber hiezu nur $1^2/_3$ Stunden brauchen, wenn ihre Schnelligkeit 3 und die der ersten $^{41}/_{44}$ englische Meilen mehr betrüge.

$x = 7^1/_4$, $y = 12$.

106. A, B und C spielen mit einander; im ersten Spiele gewann B und C jeder die Hälfte seiner Baarschaft; im zweiten Spiele gewann A und C die Hälfte ihres dermaligen Geldes, im dritten Spiele gewann A und B die Hälfte ihrer nunmehrigen Baar-

schaft und nun hat gerade jeder 54 Franken. Wie gross war die Baarschaft eines Jeden vor dem Spiele?

$x = 70$ Frk., $y = 52$ Frk., $z = 40$ Frk.

107. Ein Bassin kann mit 3 Röhren gefüllt werden; die erste und zweite braucht hiezu 1 Stunde und 10 Minuten, die erste und dritte 1 Stunde und 24 Minuten, die zweite und dritte 2 Stunden 20 Minuten. Wann wird das Bassin gefüllt, wenn die 3 Röhren zugleich fliessen und wie lang braucht jede?

$x = 1^3/_4$ St., $y = 3^1/_2$ St., $z = 7$ St.; alle $= 1$ St.

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 155—175. Heis §. 75.

# Vierter Abschnitt.

# Progressionen und Kettenbrüche.

---

## I. Progressionen.

### §. 169.

**Erklärung 1.** Eine **Progression** oder **Reihe** ist eine Folge von Grössen, die nach einem bestimmten Gesetze zunehmen oder abnehmen.

Die auf einander folgenden Grössen heissen Glieder der Progression oder Reihe und werden nach ihrer Stelle in der Reihe unterschieden als 1., 2., 3., 4., .... $n^{tes}$ Glied.

Der Ausdruck

$$n$$

heisst das allgemeine Glied der Reihe oder Index (Stellenzeiger).

Ist die Anzahl der Glieder bestimmt, so heisst die Progression endlich; ist sie nicht bestimmt, unendlich.

**Erklärung 2.** Alle Progressionen werden wieder unterschieden als arithmetische und geometrische, je nachdem die auf einander folgenden Glieder immer das nämliche arithmetische oder geometrische Verhältniss zu einander haben.

## a. Arithmetische Progressionen.

### §. 170.

**Erklärung.** Eine arithmetische Progression ist eine Reihe von Grössen, in der je zwei auf einander folgende Grössen immer die nämliche **Differenz** geben.

Sind schon die ersten Differenzen der Glieder beständig dieselben, so ist die Progression ersten Ranges Um diese handelt es sich hier; von den arithmetischen Progressionen höhern Ranges wird weiter unten die Rede sein.

Bezeichnen wir das erste Glied mit a und die Differenz mit d, so ist die allgemeine Form von n Gliedern:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d \ldots a+(n-1)d.$$

Der Ausdruck

$$a+(n-1)d$$

heisst das letzte Glied der Reihe.

Ist die Differenz d positiv, so ist die Reihe steigend, ist dagegen d negativ, so ist die Reihe fallend, ist die Differenz $d=0$, so besteht die Reihe aus lauter gleichen Gliedern. Z. B.

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15;\ d=3;$$

$$15,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3;\ d=-3;$$

$$a,\ a,\ a,\ a,\ a;\ d=0.$$

Anmerkung. Arithmetische Reihen sind z. B.:

die Reihe der natürlichen Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . ;

die Reihe der geraden Zahlen: 2. 4, 6, 8, 10, 12;

die Reihe der ungeraden Zahlen: 1, 3, 5, 7, 9, 11.

### §. 171.

**Erklärung.** In der Natur einer arithmetischen Progression liegt es, dass in ihr je drei unmittelbar auf einander folgende Glieder eine **stetige** und je vier unmittelbar auf einander folgende Glieder eine **getrennte** arithmetische Proportion geben. Z. B.:

$$a-(a+d)=(a+d)-(a+2d).$$

$$a-(a+d)=(a+2d)-(a+3d).$$

**Lehrsatz 1.** In einer arithmetischen Progression ist das Endglied gleich der Summa aus dem Anfangsgliede und aus dem Producte der Differenz und der um eins verminderten Anzahl der Glieder.

Bezeichnen wir das Endglied mit z, so ist:

$$z = a + (n - 1)\,d.$$

**Beweis.**

Da das 1. Glied $= a$ ist,
und „ 2. „ $= a + d$,
„ „ 3. „ $= a + 2\,d$,
„ „ 4. „ $= a + 3\,d$,
. . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . .
„ „ 12. „ $= a + 11\,d$, so ist:
das $n^{te}$ Glied $= a + (n - 1)\,d$,
folglich $z = a + (n - 1)\,d$.

**Lehrsatz 2.** Die Summa einer arithmetischen Reihe ist gleich der Summa des Anfangs- und Endglieds und dem halben Producte aus der Anzahl der Glieder.

Bezeichnen wir die Summa mit S, so ist:

$$S = (a + z)\frac{n}{2}$$

$$= [a + [a + (n - 1)\,d]]\frac{n}{2} \text{ (p. subst. aus vorigem Satze)},$$

$$= \frac{2\,a\,n + d\,n^2 - d\,n}{2}.$$

**Beweis.**

Es ist die Summa des ersten und letzten Gliedes

$$a + [a + (n - 1)\,d] = 2\,a + (n - 1)\,d$$

und

$2\,a + (n - 1)\,d = (a + d) + [a + (n - 2)\,d] =$ Summa aus dem 2. und vorletzten Gliede.

$= (a + 2\,d) + [a + (n - 3)\,d] =$ Summa aus dem dritten und drittletzten Gliede,

d. h. in einer arithmetischen Progression ist die Summa des ersten und letzten Gliedes gleich der Summa zweier anderen Glieder, die von den äussern gleich weit abstehen und bei einer ungeraden Gliederanzahl gleich dem zweifachen mittlern. Um S zu bestimmen, hat man die Summa des ersten und letzten Gliedes

$$2a + (n - 1)d$$

so oft zu nehmen als Gliederpaare vorhanden sind; das sind aber bei n Gliedern $\frac{n}{2}$, folglich:

$$S = [2a + (n - 1)d]\frac{n}{2},$$

$$= (a + z)\frac{n}{2}.$$

**Erklärung.** Der Werth von S heisst Summenformel oder summatorisches Glied.

**Zusatz 1.** In der arithmetischen Reihe der natürlichen Zahlen ist:

$$S = n^2.$$

**Zusatz 2.** Da zwei Gleichungen ausreichen, um zwei Unbekannte zu bestimmen, so lassen sich aus den beiden Gleichungen:

$$\text{I. } z = a + (n - 1)d,$$

$$\text{II. } S = \frac{(a + z)n}{2},$$

wenn von den Grössen a, d, n, z, S drei gegeben sind, die beiden fehlenden leicht bestimmen.

Anmerkung. cf. nachstehende Tabelle.

| Nr. | Gegeben: | Zu suchen: | Formeln: | Diese Formeln erhält man: |
|---|---|---|---|---|
| 1 | a, d, n | z | $= a + (n - 1)d.$ | Lehrsatz §. 171, 1. |
| 2 | a, n, S | z | $= \frac{2S}{n} - a.$ | Lehrsatz §. 171, 2. |
| 3 | d, n, S | z | $= \frac{S}{n} + \frac{(n-1)d}{2}.$ | Den Werth von a aus Lehrsatz 1 in Lehrsatz 2 eingesetzt. |
| 4 | a, d, S | z | $= -\frac{d}{2} \pm \sqrt{2dS + a^2 - ad + \frac{d^2}{4}}.$ | Werth von n aus Satz 1 in 2 eingesetzt. |

| Nr. | Gegeben: | Zu suchen: | Formeln: | Diese Formeln erhält man: |
|---|---|---|---|---|
| 5 | a, n, z | S | $= (a + z)\frac{n}{2}$. | Satz 2 §. 171. |
| 6 | a, d, n | S | $= an + (n - 1)\frac{dn}{2}$. | Werth von z aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 7 | a, d, z | S | $= \frac{a + z}{2} + \frac{(z + a)(z - a)}{2d}$. | Werth von n aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 8 | d, n, z | S | $= nz - \frac{nd}{2}(n - 1)$. | Werth von a aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 9 | a, d, z | n | $= \frac{z - a}{d} + 1$. | Aus Satz 1. |
| 10 | a, z, S | n | $= \frac{2S}{a + z}$. | Aus Satz 2. |
| 11 | a, d, S | n | $= \frac{d - 2a}{2d} \pm \sqrt{\frac{2S}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2}$. | Werth von z aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 12 | d, z, S | n | $= \frac{2z + d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2z + d}{2d}\right)^2 - \frac{2S}{d}}$. | Werth von a aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 13 | d, n, z | a | $= z - (n - 1)d$. | Aus Satz 1. |
| 14 | S, n, z | a | $= \frac{2S}{n} - z$. | Aus Satz 2. |
| 15 | d, n, S | a | $= \frac{S}{n} - \frac{d}{2}(n - 1)$. | Werth von z aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 16 | d, z, S | a | $= \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 - 2dS}$. | Werth von n aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 17 | a, n, z | d | $= \frac{z - a}{n - 1}$. | Aus Satz 1. |
| 18 | a, n, S | d | $= \frac{2(S - an)}{n(n - 1)}$. | Werth von z aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 19 | a, z, S | d | $= \frac{z^2 - a^2}{2S - z - a}$. | Werth von n aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 20 | n, z, S | d | $= \frac{2(nz - S)}{n(n - 1)}$. | Werth von a aus 1 in 2 eingesetzt. |

## §. 172.

### I. Beispiele.

1. Bei wie viel Gliedern einer arithmetischen Progression, deren Differenz $^1/_2$, deren letztes Glied 18 ist, beträgt die Summa $325\,^1/_2$?

**Auflösung.** Gegeben ist $d = {^1/_2}$, $z = 18$, $S = 325\,^1/_2$; daraus ist n zu bestimmen. cf. Formel 12.

Antw. $n = 31$.

2. Bei einer Preisvertheilung sollen in einer Klasse an die fünf ersten Schüler Preisbücher im Gesammtwerthe von $27\,^1/_2$ Thl. vertheilt werden; der Preis des ersten soll einen Werth von $8\,^1/_2$ Thl. haben und jeder folgende Preis soll immer um gleichviel weniger werth sein als der vorhergehende. Welchen Werth hat der Preis eines Jeden?

**Auflösung.** Gegeben ist $n = 5$, $z = 8\,^1/_2$, $S = 27\,^1/_2$; zu bestimmen ist d. cf. Formel 20.

Antw. erste $= 8^1/_2$, zweite $= 7$, dritte $= 5^1/_2$, vierte $= 4$, fünfte $= 2^1/_2$ Thl.

3. Zwischen 4 und $12\,^2/_3$ sollen 12 Glieder interpolirt (eingeschaltet) werden, um eine arithmetische Reihe zu bilden.

**Auflösung.** Gegeben ist $a = 4$, $n = 14$, $z = 12\,^2/_3$; zu bestimmen ist d. cf. Formel 17.

Antw. 4, $4^2/_3$, $5^1/_3$, 6, $6^2/_3$, $7^1/_3$, 8, $8^2/_3$, $9^1/_3$, 10, $10^2/_3$, $11^1/_3$, 12, $12^2/_3$.

4. Die Zahl 36 so in 10 Theile zu zerlegen, dass jeder folgende um $^1/_3$ grösser ist als der vorhergehende.

**Auflösung.** Gegeben ist $d = {^1/_3}$, $n = 10$, $S = 36$; es ist a zu bestimmen. cf. Formel 15.

Antw. $2^1/_{10}$, $2^{13}/_{30}$, $2^{23}/_{30}$, $3^1/_{10}$, $3^{13}/_{30}$, $3^{23}/_{30}$, $4^1/_{10}$, $4^{13}/_{30}$, $4^{23}/_{30}$, $5^1/_{10}$.

### II. Aufgaben.

5. In einer arithmetischen Progression ist das erste Glied 28, die Differenz $1\,^1/_3$ und die Anzahl der Glieder 11. Wie gross ist das letzte Glied, wie gross die Summa aller Glieder?

Antw. $z = 41^1/_3$, $S = 381\,^1/_3$.

6. Die Differenz und die Anzahl der Glieder zu finden, wenn das erste Glied 15, das letzte 99 und die Summa aller Glieder = 741 ist.

Antw. $d = 7$, $n = 13$.

7. Wie gross ist die Differenz und das letzte Glied einer Reihe, wenn das erste Glied 20 und die Summa der 15 ersten Glieder 510 ist?

Antw. $d = 2$, $z = 48$.

8. Die Anzahl und Summa der Glieder zu finden, wenn das erste Glied 9, die Differenz = — 2 und das letzte Glied = — 25 ist.

Antw. $n = 18$, $S = -144$.

9. Bei einer Pflanzung in Trapezform mit parallelen Reihen zählt man bei der ersten Reihe 5 Bäume, bei jeder folgenden immer 7 Bäume mehr als bei der vorhergehenden; auf der wie vielsten stehen gerade 117 Bäume.

Antw. 17.

10. Ein Tourist legt einen Weg von $78\frac{3}{4}$ deutschen Meilen in 15 Tagen zurück; er macht jeden Tag $\frac{1}{4}$ Meile mehr als an dem vorhergehenden. Wie viel Meilen macht er am letzten und wie viel am ersten Tage?

Antw. $a = 3\frac{1}{2}$ M.; $z = 7$ M.

11. Beim Abteufen eines Schachtes kommt die erste Klafter auf 4 Thl. Arbeitslohn; jede folgende aber kostet $\frac{2}{3}$ Thl. mehr. Wie theuer kommt die letzte Klafter, wenn der Arbeitslohn für den ganzen Schacht auf $116\frac{2}{3}$ Thl. kommt und wie tief ist er?

Antw. $z = 12\frac{2}{3}$ Thl.; $n = 14$ Klftr.

12. Ein frei fallender Körper fällt in der ersten Sekunde 15′ (paris.) und in jeder darauf folgenden 30′ mehr als in der vorhergehenden; er braucht von einem Thurme herab gerade 4 Sekunden. Wie hoch ist der Thurm?

Antw. $S = 240'$.

13. Eine Schuld von 8100 Thl. soll ratenweise in halbjährigen Terminen getilgt werden. Wenn nun die erste Rate 400 Thl. beträgt und jede folgende um 50 Thl. höher sein soll als die vorhergehende, in wie viel Jahren ist die Schuld getilgt, und wie gross ist die letzte Rate?

Antw. $n = 12$ Term. i. e. 6. J.; $z = 950$ Thl.

14. Ein Körper legt in der ersten Zeiteinheit 4 Längeneinheiten zurück, in jeder folgenden aber 7 Längeneinheiten mehr als in der vorhergehenden. Wie viel Längeneinheiten legt er in der 23. Zeiteinheit zurück und wie gross ist der ganze Weg, den er bis dahin gemacht?

Antw. $z = 158$, $S = 1863$.

15. Wenn eine Summe von 6372 Thl., welche erst am Anfang des 9. Jahres fällig würde und in Folge dessen erst von dieser Zeit an verzinst werden müsste, in der Weise schon jetzt abgetragen wird, dass 9mal je am Anfange eines Jahres immer 600 Thl. angezahlt werden, so fragt es sich welcher Zinsfuss bei dieser Berechnung zu Grunde liegt.

Antw. $4\frac{1}{2}\%$.

16. Ein Kapital von 2000 Thl. zu $5\%$ auf einfache Zinsen ausgeliehen, wird am Ende jeden Jahres um 300 Thl. vermehrt. Was betragen die dafür bezogenen Zinsen in den ersten 20 Jahren?

Antw. 4850 Thl.

17. In einer Spielbank wird für einen einzelnen Treffer das 20fache des Einsatzes ausbezahlt. Es setzt Jemand zuerst 1 Ducaten, und da er nicht gewinnt, so setzt er zwei, das dritte Mal drei u. s. w. Wie lang kann er das fortsetzen, um durch einen einzigen Treffer seinen ganzen Einsatz wieder zu gewinnen?

Antw. 39 mal.

18. Einem Heere, das im ersten Tage nur 2 Stunden und in jedem folgenden eine Stunde mehr als im vorhergehenden zurücklegt, wird 4 Tage später eine Abtheilung Reiterei nachgeschickt, die im ersten Tage 8 Stunden, in jedem folgenden aber 2 Stunden mehr zurücklegt als im vorhergehenden. In wie viel Tagen wird sie das vorausmarschirende Heer eingeholt haben?

Antw. in 4 Tagen.

19. Zwei Regimenter, die 34 deutsche Meilen von einander entfernt sind, brechen zugleich auf und marschiren gegen einander, um ihre Garnisonen zu wechseln. Das eine macht im ersten Tag 2 Meilen und jedem folgenden Tag eine Meile mehr als im vorhergehenden, das andere dagegen macht gleich am ersten Tage 8 Meilen, jedem folgenden aber 2 Meilen weniger als am vorhergehenden. Wann begegnen sie sich?

Antw. $x = 4$ Tag.

20. Für eine ausgezeichnete Waffenthat wird eine Infanterieabtheilung von ihrem Divisionschef mit einer Summa Geldes belohnt; der Tapferste erhält das Meiste und jeder Folgende immer gleichviel weniger als der vorhergehende. Bei der Vertheilung werden die Antheile zweier Verwundeten zweien ihrer Kameraden übergeben. Beide verwahren die 4 Antheile in einer einzigen Börse bis zur Genesung ihrer Kameraden. Nun wusste aber Keiner mehr, wie viel Jedem gebührt; der eine erinnert sich nur, dass er bei der Vertheilung der Dritte und sein blessirter Kamerad der Neunte war und 76 Thl. im Ganzen empfangen habe, und der Andere wusste noch, dass er im Ganzen nur 28 Thl. bekommen hat und dass er der Elfte und sein Kamerad der Siebenzehnte war. Wie viel erhielt Jeder?

Antw. Dritte = 47 Thl., Neunte = 29 Thl., Elfte = 23 Thl., der Siebenzehnte = 5 Thl.

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 176—186; Heis §. 81 u. 82.

---

## b. Geometrische Progressionen.

### §. 173.

**Erklärung.** Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Grössen, in der je zwei auf einander folgende Glieder immer den nämlichen Quotienten geben.

Der constante Quotient heisst Exponent und wird von uns mit q bezeichnet; das erste Glied einer geometrischen Progression sei wieder a, so ist die allgemeine Form von n Gliedern

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ \ldots,\ aq^{n-1}.$$

Der Ausdruck

$$aq^{n-1}$$

heisst das letzte Glied der Reihe.

Ist der Exponent eine ganze Zahl, so ist die Reihe steigend; ist er aber ein ächter Bruch, so ist die Reihe fallend; ist er = 1, so besteht die Reihe aus lauter gleichen Gliedern. Z. B.

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16 \text{ i. e. } q = 2,$$

$$108,\ 36,\ 12,\ 4,\ 1\frac{1}{3} \text{ i. e. } q = \frac{1}{3},$$

$$a,\ a,\ a,\ a,\ a \text{ i. e. } q. = 1.$$

Anmerkung. Eine Reihe aus gleichen Gliedern kann arithmetisch und geometrisch sein.

## §. 174.

**Erklärung.** In der Natur einer geometrischen Progression liegt es, dass je drei unmittelbar auf einander folgende Glieder eine stetige und je vier auf einander folgende Glieder eine getrennte geometrische Proportion bilden. Z. B.:

$$a : aq = aq : aq^2,$$

$$a : aq = aq^2 : aq^3.$$

**Lehrsatz 1.** Das Endglied ist gleich dem Producte aus dem Anfangsgliede und dem Exponenten potenzirt mit der um eins verminderten Gliederanzahl.

Bezeichnen wir das Endglied mit z, so ist:

$$z = aq^{n-1}.$$

### Beweis.

Wenn

das 1. Glied $= a$, das 2. $= aq$,

„ 3. „ $= aq^{3-1}$, „ 4. $= aq^{4-1}$,

so ist

„ $n^{te}$ „ $= aq^{n-1}$,

folglich

$$z = aq^{n-1}.$$

**Lehrsatz 2.** Die Summa einer geometrischen Progression ist gleich dem Producte aus dem Anfangsgliede und aus dem mit der Gliederanzahl potenzirten Quotienten weniger eins, dividirt durch den um eins verminderten Quotienten.

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

### Beweis.

In der geometrischen Reihe:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^{n-1}$$

sind:

$$a:aq,\ aq:aq^2,\ aq^2:aq^3,\ aq^3:aq^4\ldots$$

gleiche Verhältnisse; desshalb ist die Summa aller Vorderglieder

$$= S - aq^{n-1},$$

die Summa aller Hinterglieder

$$= S - a,$$

Demnach:

$$S - aq^{n-1} : S - a = a : aq, \text{ cf. §. 152, 3,}$$

folglich:

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{aq^n - a}{q - 1},$$

$$= \frac{zq - a}{q - 1}, \text{ per Subst. aus Lehrsatz 1.}$$

**Zusatz 1.** Ist die Progression fallend, so ist:

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

**Zusatz 2.** Ist die Progression unendlich fallend, so ist $q < 1$ und $n = \infty$, folglich $q^\infty = 0$ und

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

## §. 175.

**Erklärung.** Alle periodischen Decimalbrüche und alle entwickelten Quotienten aus Divisionen von der Form $\frac{a}{b \pm x}$ cf. §. 61, 4, sind unendlich fallende geometrische Reihen und werden wie diese summirt, d. h. in einen gewöhnlichen Bruch umgewandelt.

Jede Reihe von Brüchen, deren Zähler periodisch wiederkehren und deren Nenner fortschreitende Potenzen einer und derselben Zahl sind, heisst Kettenreihe.

**Zusatz.** Es sei die gegebene Kettenreihe:

$$a\beta^{-1} + c\beta^{-2} + a\beta^{-3} + c\beta^{-4} + a\beta^{-5} + \ldots,$$

so ist:

$$S = \frac{a\beta + c}{\beta^2 - 1}.$$

### Beweis.

Die gegebene Kettenreihe lässt sich als eine unendlich fallende geometrische Progression darstellen, wenn man die Glieder der ersten Periode zusammen

als Anfangsglied nimmt und jede folgende Periode durch Factorenzerlegung in Producte umwandelt, von denen jedes einen Factor hat, gleich der ersten Periode, d. h.:

$$(a\beta + c)\beta^{-2} + (a\beta + c)\beta^{-4} + (a\beta + c)\beta^{-6} + \ldots$$

Es sei nun

$$a = (a\beta + c)\beta^{-2},$$

so ist:

$$q = \beta^{-2},$$

folglich:

$$S = \frac{(a\beta + c)\beta^{-2}}{1 - \beta^{-2}} = \frac{(a\beta + c)\beta^{-2}}{1 - \frac{1}{\beta^2}} = \frac{a\beta + c}{\beta^2 - 1}.$$

### Umgekehrt.

Ein ächter Bruch wird für eine gegebene Basis in eine Kettenreihe umgewandelt, wenn man den Zähler mit der Basis multiplicirt, das gewonnene Product durch den Nenner dividirt und mit dem Reste wieder wie mit dem Zähler verfährt. Die Quotienten sind die Zähler der Kettenreihe. Z. B.: Es sei $\frac{1}{5}$ in eine Kettenreihe mit der Basis 8 umzuwandeln, so ist:

$$\frac{1 \times 8}{5} = 1, \text{ Rest } 3; \quad \frac{3 \times 8}{5} = 4, \text{ Rest } 4; \quad \frac{4 \times 8}{5} = 6, \text{ Rest } 2;$$

$$\frac{2 \times 8}{5} = 3, \text{ Rest } 1 \ldots,$$

folglich:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{8} + \frac{4}{8^2} + \frac{6}{8^3} + \frac{3}{8^4} + \frac{1}{8^5} + \frac{4}{8^6} + \ldots$$

## §. 176.

**Erklärung.** Da zwei Gleichungen ausreichen, um zwei Unbekannte zu bestimmen, so lassen sich aus den Gleichungen:

$$\text{I. } z = a\,q^{n-1},$$

$$\text{II. } S = \frac{q\,z - a}{q - 1} = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1},$$

wenn von den fünf Grössen a, q, n, z, S drei gegeben, die Werthe der beiden andern leicht auffinden, wie aus der folgenden Tabelle zu ersehen ist:

| Nr. | Gegeben: | Gesucht: | Formel: | Diese Formel ergibt sich: |
|---|---|---|---|---|
| 1 | a, q, n | | $= a q^{n-1}$. | Lehrsatz 1, §. 174. |
| 2 | a, q, S | | $= \frac{a + (q-1) S}{q}$. | Lehrsatz 2, §. 174. |
| 3 | a, n, S | z | $z (S - z)^{n-1} - a (S - a)^{n-1} = 0$. | Werth von q aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 4 | q, n, S | | $= \frac{S (q - 1) q^{n-1}}{q^n - 1}$. | Werth von a aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 5 | a, q, z | | $= \frac{z q - a}{q - 1}$. | Lehrsatz 2. |
| 6 | a, q, n | S | $= \frac{a (q^n - 1)}{q - 1}$. | Werth von z aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 7 | q, n, z | | $= \frac{z (q^n - 1)}{(q - 1) q^{n-1}}$. | Werth von a aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 8 | a, n, z | | $= \left(z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}\right) : \left(z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}\right)$. | Werth von q aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 9 | a, q, z | | $= \frac{\log z - \log a}{\log q} + 1$. | Aus Satz 1. |
| 10 | a, q, S | n | $= \frac{\log [a + (q - 1) S] - \log a}{\log q}$. | Werth von z aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 11 | q, z, S | | $= \frac{\log z - \log (S + q z - q S)}{\log q} + 1$. | Werth von a aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 12 | a, z, S | | $= \frac{\log z - \log a}{\log (S - a) - \log (S - z)} + 1$. | Werth von q aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 13 | q, n, z | | $= \frac{z}{q^{n-1}}$. | Aus Satz 1. |
| 14 | q, z, S | | $= z q - (q - 1) S$. | Aus Satz 2. |
| 15 | q, n, S | a | $= \frac{(q - 1) S}{q^n - 1}$. | Werth von z aus 1 in 2 eingesetzt. |
| 16 | z, n, S | | $a (S - a)^{n-1} - z (S - z)^{n-1} = 0$. | Werth von q aus 1 in 2. |

| Nr. | Gegeben: | Gesucht: | Formel: | Diese Formel ergibt sich: |
|---|---|---|---|---|
| 17 | a, n, z | q | $= \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$. | Aus Satz 1. |
| 18 | a, z, S | q | $= \frac{S-a}{S-z}$. | Aus Satz 2. |
| 19 | a, n, S | q | $q^n - \frac{S}{a} q + \frac{S-a}{a} = 0$. | Werth von z aus 1 in 2. |
| 20 | z, n, S | q | $q^n - \frac{S}{S-z} \cdot q^{n-1} + \frac{z}{S-z} = 0$. | Werth von a aus 1 in 2. |

## §. 177.

### 1. Beispiele.

1. Zwischen 1 und 1024 sollen 9 Glieder interpolirt werden, um eine geometrische Reihe zu bilden.

**Auflösung.** Gegeben ist:

$$a = 1,\ z = 1024,\ n = 11;$$

es ist q zu bestimmen. cf. Formel 17.

$$q = 2.$$

2. Das siebente Glied einer geometrischen Reihe ist $= 729$, das elfte $= 59049$. Welches ist das erste Glied, wie heisst der Exponent und wie gross ist die Summa von den 12 ersten Gliedern?

**Auflösung.** Nach Formel 1 ist:

$$a q^{10} = 59049$$

$$a q^6 = 729$$

Durch Division: $$q^4 = \frac{59049}{729}$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{59049}{729}} = \sqrt[4]{81} =$$

$$\frac{\log 81}{4} = \frac{1{,}9084850}{4} = 3.$$

Nach der Formel 13 ist:

$$a = \frac{729}{3^6} = 1.$$

Nach der Formel 6 ist:

$$S = \frac{1(3^{12} - 1)}{2} = \frac{12 \log 3 - 1}{2} = 265720.$$

3. Ein Wirth hebt aus einem Fasse Wein von m Mass, die Mass zu d Kreuzer, $n_1$ Mass Wein heraus und ersetzt diesen Abgang des Fasses mit $n_1$ Mass Wasser, das ihm gar nichts kostet. Nachdem der Wasserzusatz dem Weine sich mitgetheilt hat, hebt er wieder $n_1$ Mass heraus und ersetzt sie durch Wasser. Wie oft darf er diese Manipulation wiederholen, wenn die Mass der Mischung noch k Kreuzer kosten soll?

**Auflösung.** Finden sich im Fasse m Mass des reinen Weins und werden $n_1$ Mass herausgenommen, so können nach dem ersten Abzapfen nur noch $m - n_1$ darin sein. Das zweite Mal können nicht mehr $n_1$ Mass reinen Weines herausfliessen, weil indessen $n_1$ Mass Wasser sich mit ihm vermischt haben und ein Theilchen dieses Wassers wieder mit abfliesst, sondern nur

$$(m - n_1)\frac{n_1}{m}.$$

Demnach finden sich nach dem zweiten Abzapfen

$$(m - n_1) - (m - n_1)\frac{n_1}{m} = \frac{(m - n_1)^2}{m}$$

Mass reinen Weines im Fasse, nach dem dritten Abzapfen

$$\frac{(m - n_1)^2}{m} - \frac{n_1}{m} \cdot \frac{(m - n_1)^2}{m} = \frac{(m - n_1)^3}{m^2},$$

nach dem vierten Abzapfen

$$\frac{(m - n_1)^4}{m^3},$$

nach dem $n^{ten}$ Abzapfen

$$\frac{(m - n_1)^n}{m^{n-1}}.$$

Dies gibt:

$$\left(\frac{(m - n_1)^n}{m^{n-1}}\right) d$$

als Werth des im Fasse befindlichen Weines $= m k$ als Werth der ganzen Mischung; folglich:

$$n \log (m - n_1) + \log d - (n - 1) \log m = \log m + \log k$$

$$n = \frac{\log d - \log k}{\log m - \log (m - n_1)}.$$

4. Wie heisst die Summa der Kettenreihe

$$\frac{a}{x} - \frac{am}{x^2} + \frac{am^2}{x^3} - \frac{am^3}{x^4} + \frac{am^4}{x^5} + \ldots?$$

**Auflösung.** Gegeben ist

$$a = \frac{a}{x},\ q = -\frac{m}{x},\ \text{und } n = \infty,$$

zu bestimmen ist S. cf. Formel 6.

$$\text{Antw. } S = \frac{a}{x} : \left(1 + \frac{m}{x}\right) = \frac{a}{x} : \frac{x+m}{x} = \frac{ax}{x^2 + mx} = \frac{a}{x+m}.$$

5. Welchem Bruche ist die Kettenreihe

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \frac{4}{5^6} + \ldots$$

gleich?

**Auflösung.** Die gegebene Reihe ist

$$= \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5^2}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5^2}\right)\frac{1}{5^2} + \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5^2}\right)\frac{1}{5^4} + \ldots$$

$$= \frac{14}{25} + \frac{1}{25}\left(\frac{14}{25}\right) + \frac{1}{25^2}\left(\frac{14}{25}\right) + \ldots$$

Nun ist gegeben

$$a = \frac{14}{25},\ q = \frac{1}{25},\ n = \infty,$$

folglich

$$S = \frac{14}{25} : \left(1 - \frac{1}{25}\right) = \frac{7}{12}.$$

6. Welchen gemeinen Bruch gibt der gemischt periodische Decimalbruch 2,4659090 ...?

**Auflösung.**

$$2{,}4659090 = 2{,}465 + 90\,(0{,}00001 + 0{,}0000001 + \ldots).$$

Demnach

$$a = 0{,}00001,\ q = 0{,}01,\ n = \infty,$$

folglich

$$S = \frac{0{,}00001}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}00001}{0{,}99} = \frac{1}{99000},$$

und

$$2{,}465 = 2\frac{465}{1000},\ 2\frac{465}{1000} + \frac{1 \cdot 90}{99000} = 2\frac{41}{88}.$$

7. In der geometrischen Progression

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4 \ldots$$

soll jedes Glied in $\nu$ Theile getheilt werden, dass alle Glieder

wieder eine geometrische Reihe bilden, die $\nu$ mal so viel Glieder hat als die Hauptreihe.

**Auflösung.** Es sei das erste Glied der gesuchten Reihe $\alpha$, ihr Exponent oder Quotient $= \varphi$, so ist die Reihe:

$$\alpha,\ \alpha\varphi,\ \alpha\varphi^2 \ldots \alpha\varphi^{\nu-1};\ \alpha\varphi^{\nu},\ \alpha\varphi^{\nu+1},\ \alpha\varphi^{\nu+2} \ldots \alpha\varphi^{2\nu-1};$$
$$\alpha\varphi^{2\nu},\ \alpha\varphi^{2\nu+1},\ \alpha\varphi^{2\nu+2} \ldots$$

Von dieser Reihe müssen die $\nu$ ersten Glieder summirt dem ersten Gliede der Hauptreihe gleich sein; es ist desshalb

$$\text{I.}\ \alpha,\quad \alpha\varphi,\quad \alpha\varphi^2 + \ldots\ldots \alpha\varphi^{\nu-1} = \text{a}.$$
$$\text{II.}\ \alpha\varphi^{\nu},\ \alpha\varphi^{\nu+1},\ \alpha\varphi^{\nu+2} + \ldots \alpha\varphi^{2\nu-1} = \text{a q}.$$
$$\text{III.}\ \alpha\varphi^{\nu},\ \alpha\varphi^{\nu+1},\ \alpha\varphi^{\nu+2} + \ldots \alpha\varphi^{2\nu-1} = \text{a}\varphi^{\nu}\ \text{(Product aus I.} \times \varphi^{\nu}).$$

Aus II. und III. kommt:

$$\text{a q} = \text{a}\varphi^{\nu},$$
$$\text{q} = \varphi^{\nu},$$
$$\varphi = \sqrt[\nu]{\text{q}}.$$

Summirt man nach I. die $\nu$ ersten Glieder der neuen Reihe cf. §. 176, 6, so ist die Summa $= \sigma$,

$$\sigma = \frac{\alpha(\varphi^{\nu} - 1)}{\varphi - 1} = \text{a},$$

folglich:

$$\alpha = \frac{\text{a}(\varphi - 1)}{\varphi^{\nu} - 1} = \frac{\text{a}(\sqrt[\nu]{\text{q}} - 1)}{\text{q} - 1},$$

weil

$$\text{q} = \varphi^{\nu}\ \text{und}\ \varphi = \sqrt[\nu]{\text{q}}.$$

Nun ist gegeben:

$$\alpha = \frac{\text{a}(\sqrt[\nu]{\text{q}} - 1)}{\text{q} - 1},\ \varphi = \sqrt[\nu]{\text{q}},$$

damit lassen sich alle Glieder der neuen Reihe bestimmen; diese ist:

$$\frac{\text{a}(\sqrt[\nu]{\text{q}} - 1)}{\text{q} - 1},\ \frac{\text{a}(\sqrt[\nu]{\text{q}} - 1)\sqrt[\nu]{\text{q}}}{\text{q} - 1},\ \frac{\text{a}(\sqrt[\nu]{\text{q}} - 1)\sqrt[\nu]{\text{q}^2}}{\text{q} - 1} \ldots\ldots$$

und die Summa von n solchen Gliedern ist:

$$\text{S} = \frac{\text{a}(\sqrt[\nu]{\text{q}^{\text{n}}} - 1)}{\text{q} - 1} = \frac{\text{a}(\sqrt[\nu]{\text{q}}^{\frac{\text{n}}{\nu}} - 1)}{\text{q} - 1},$$

denn nach dem Verhältnisse, in welchem die gegebene Reihe zur gesuchten steht, kann es einerlei sein, ob man n Glieder der gesuchten oder $\frac{n}{\nu}$ Glieder der gegebenen addirt.

## II. Aufgaben.

8. Wenn in einer geometrischen Reihe das erste Glied 4, der Exponent = 3 und die Summa = 13120 ist, wie heisst das letzte Glied und wie viel Glieder zählt die Reihe?

Antw. z = 8748, n = 8.

9. In einer geometrischen Reihe ist das erste Glied = a, der Exponent gleich q, wie viel Glieder braucht man zur Summa = S und wie gross ist z?

| | 1. | 2. | | 1. | 2. |
|---|---|---|---|---|---|
| a = | 1, | = 8, | Antw. n = | 12, | = 7, |
| q = | 3, | = 1,5, | z = | 177147. | = 91,125. |
| S = | 265720. | = $257\frac{3}{8}$. | | | |

10. In einer geometrischen Reihe ist das erste Glied = a, das $n^{te}$ Glied = z, wie gross ihre Summa, wie gross ihr Exponent?

| | 1. | 2. | | 1. | 2. |
|---|---|---|---|---|---|
| a = | 2,5, | 6, | Ant. q = | 3, | 1,5 |
| n = | 10. | 7, | S = | 73811,25. | $193\frac{1}{32}$. |
| z = | 49207,5. | $68\frac{11}{32}$. | | | |

11. Wie gross ist die Summa der unendlichen Reihe, wenn

$$a = 1,\ q = \tfrac{1}{4} \text{ und } n = \infty?$$

Antw. S = $1\frac{1}{3}$.

12. Wie heisst die Summa der Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots?$$

Antw. S = 1.

13. Welche Summa erhält man aus der Reihe

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}-\frac{1}{54}+\ldots?$$

Antw. $S = \frac{3}{8}$.

14. Die Summa einer geometrischen Reihe von 7 Gliedern beträg

257,375, ihr Exponent ist 1,5; wie gross ist das Anfangs- und Endglied?

Antw. $a = 8$, $z = 91{,}125$.

15. Wie heisst die Summa der Kettenreihe

$$\frac{a}{b} + \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} + \frac{ax^3}{b^4} + \ldots ?$$

Antw. $\frac{a}{b - x}$.

16. Welchen gemeinen Brüchen sind die unbegrenzten periodischen Decimalbrüche

0,378378 ..., 0,297297 ..., 0,13636 ...

gleich?

Antw. $\frac{14}{37}$, $\frac{11}{37}$, $\frac{3}{22}$.

17. Der Bruch $\frac{4}{5}$ ist in eine Kettenreihe mit der Basis 9 umzuwandeln.

Antw. $\frac{7}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{7}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \frac{7}{9^5} + \frac{1}{9^6} + \ldots$

18. Der gemeine Bruch $\frac{8}{9}$ in eine Kettenreihe mit der Basis 11 umzuwandeln.

Antw. $\frac{9}{11} + \frac{8}{11^2} + \frac{6}{11^3} + \frac{1}{11^4} + \frac{2}{11^5} + \frac{4}{11^6} + \frac{9}{11^7} + \frac{8}{11^8} + \ldots$

19. Das dritte Glied einer geometrischen Reihe ist $= 50$, das siebente Glied ist $= 31250$; wie gross ist das erste Glied, wie gross der Exponent, wie gross das neunte Glied und wie gross die Summa der 9 ersten Glieder?

Antw. $a = 2$, $q = 5$, $z = 781250$, $S = 976562$.

20. Wenn

$$a = 1,\ q = -\frac{1}{3},\ n = \infty,$$

wie gross ist S?

Antw. $S = \frac{3}{4}$.

21. In einer geometrischen Reihe von 13 Gliedern ist das Product des fünften und siebenten Gliedes $= 1024$ und das Product des ersten und zwölften ist doppelt so gross; wie heisst der Exponent und wie das Anfangs- und Endglied und wie gross ist die Summa?

Antw. $q = 2$, $a = 1$, $z = 4096$, $S = 8191$.

22. In einer geometrischen Reihe von 7 Gliedern ist die Summa des ersten und letzten Gliedes $= 1460$, die Summa des ersten und mittlern nur 56.

Antw. $a = 2$, $q = 3$.

23. Mittelst einer Luftpumpe hat man nach 3 Kolbenzügen eine 9fache Verdünnung der Luft erzielt und mit dem 8. Zuge eine 2187fache. Nach welchem Verhältnisse trat die Verdünnung der Luft ein und wie viel Kolbenzüge müssen gemacht werden, wenn eine 59049fache Verdünnung erzielt werden soll?

Antw. $q = 3$, $n = 11$.

24. Jemand betheiligt sich an einem Spiele und setzt das erste Mal $^6/_{35}$ Thlr. oder 3 Sechser; er verliert. Nun will er aber seinen Einsatz so lang verdoppeln bis er gewinnt. Nach 12 ungünstigen Spielen muss er aufhören, weil seine mitgebrachte Baarschaft so weit verspielt ist, dass er nur noch ein Billet zur Heimfahrt bezahlen kann, welches 3 fl. 30 kr. oder 2 Thlr. kostet; wie viel sein letzter Einsatz, wie viel sein Verlust, und wie viel seine mitgebrachte Baarschaft?

Antw. $z = 614^2/_5$ fl. oder $351^3/_{35}$ Thlr.; Verlust $= 1228^1/_2$ fl. oder 702 Thlr. Ganze Baarschaft 704 Thlr., 1232 fl.

25. Sessa Ebn Daher, der Erfinder des Schachspiels, durfte sich vom indischen Könige Shehram eine Gnade ausbitten. Er erbat sich nur Weizenkörner, und zwar nur soviel, als die Summa ausmacht, wenn für das erste Feld des Schachbrettes 1 Korn und für jedes folgende Feld immer noch einmal so viel Körner als für das vorhergehende gerechnet würden. Wie viele Scheffel oder Centner des Staates M machen diese Körner aus, wenn auf einen Liter a Körner oder wenn b Körner ein Kilogramm wiegen?

In wie viel Jahren würden die berechneten Scheffel in M geerndtet werden, wenn der jährliche Ertrag eines Morgens $= c$ Scheffel, der Flächeninhalt von $M = d$ geographische Quadratmeilen, eine geographische Quadratmeile $= 7420,158$ Metern und das ganze Land als bebaut vorausgesetzt wird? In wie viel Jahren würden die berechneten Scheffel unter gleicher Voraussetzung auf der Erdoberfläche geerndtet werden, wenn dieselbe zu 9281916 Quadratmeilen angenommen wird? *

---

* Nach Hofmann.

| | α. | β. | γ. | δ. |
|---|---|---|---|---|
| M = | Bayern, | Oesterreich, | Preussen, | Württemberg, |
| a = | 15000 | 14400 | 14980 | 13600 |
| b = | 21000 | 20300 | 20587 | 19100 |
| c = | $4^1/_4$ | $26^1/_4$ | $12^2/_4$ | 5 |
| d = | 1387,5 | 12121 | 5101,8 | 355 |

Antw. 1. Frage: 18 446744 073709 551615.

2. Frage: α. 5530658 Mill. Scheffel oder 15686020 Mill. Centner.
β. 20828140 „ Metz „ 16226550 „ „
γ. 22405240 „ Sch. „ 17416330 „ „
δ. 7653370 „ „ „ 19854540 „ „

3. Frage: α. 58041,07 Jahre, 8,67622.
β. 6843,185 „ , 8,93633.
γ. 15972,72 „ , 8,779396.
δ. 246819,4 „ , 9,439957.

26. Das tiefe c einer sechzehnfüssigen Orgelpfeife macht in der Secunde 32 einfache Schwingungen; wie viel macht seine höhere Terz, Quart, Quint, Septim, wie viel cis, dis, fis, da bekanntlich die höhere Octave in einer Secunde doppelt so viel Schwingungen macht als der Grundton. *

Antw. Terz = 40,3175, Quart = 42,7149, Quint = 47,9458, Septim = 60,4079, cis = 33,9028, dis = 38,0546, fis = 45,2548.

27. Wenn der Grundton c in einer Secunde 120 Schwingungen macht, wie viel macht seine höhere und tiefere Octav, wie viel die höhere Terz und Quart, wie viel cis und dis in der höhern und wie viel des und b in der untern Octav?

Antw. $\bar{c}$=240, c = 60, Terz = 151,1904, Quart = 160,1807, cis = 127,1354, dis = 142,7048, des = 63,5677, b = 106,0977.

28. Ein Fass enthält 60 Mass Wein à 48 Kreuzer; hebt man eine Mass heraus und ersetzt sie mit Wasser und wiederholt dasselbe sobald sich der Wasserzusatz dem Weine mitgetheilt hat, so entsteht die Frage, wie oft darf das wiederholt werden, wenn die im Fasse verbleibende Mischung à Mass 42 Kreuzer werth sein soll?

Antw. 7,9 . . . mal.

29. Ein anderes Fass enthält 180 Mass Wein à 30 Kreuzer, hebt

* Nr. 26 u. 27 finden ihre Anwendung in der Acustik.

man erst 2 Mass heraus und ersetzt sie mit Wasser und hebt hernach, wenn sich die Mischung zwischen Wasser und Wein vollzogen hat, wieder 2 Mass heraus, und ersetzt sie abermals mit Wasser, so fragt es sich, wie oft kann diese Manipulation hier wiederholt werden, wenn die Mass der im Fasse verbleibenden Mischung nur 18 Kreuzer kosten soll?

Antw. 45,718 mal.

30. In der geometrischen Reihe 5, 40, 320, 2560... soll jedes Glied so in drei Theile zerlegt werden, dass diese selbst wieder eine geometrische Reihe geben. Wie heisst diese Reihe und wie gross ist die Summa der 10 ersten Glieder?

Antw. $^5/_7$, $1^3/_7$, $2^6/_7$, $5^5/_7$, $11^3/_7$ . . . S = $730^6/_7$.

31. Ein Hüttenbesitzer zahlt nach einem abgeschlossenen Accord beim Abteufen eines Schachtes für die erste Kubikklafter 12 fl., für jede folgende das Dreifache der vorhergehenden. Wie hoch kommen $4^2/_3$ Klafter?

Antw. S = 1004 fl. 54 kr.

32. Achilles verfolgt eine Schildkröte, die in 1 Stadium Entfernung vor ihm hergeht, mit 12mal grösserer Geschwindigkeit. Langt Achilles bei der Stelle an, wo die Schildkröte zu Anfang sich befand, so ist diese um $^1/_{12}$ Stadium weiter; durchläuft Achilles diese kleine Strecke von $^1/_{12}$ Stadium, so wird die Schildkröte um $^1/_{144}$ weiter sein u. s. f. Achilles wird wohl die Schildkröte nie ganz erreichen, wie sehr er sich ihr auch nähern mag?! *

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 191—199; Heis §. 83 und 84: 1 — 13.

---

* Dieses Sophisma des Zeno enthält in verdeckter Weise eine Zeitbeschränkung, die dem Achilles in der Folge zugemuthet wird. Macht er davon Gebrauch, so wird er die Schildkröte nie erreichen. Legt aber Achilles 1 Stadium in 2 Minuten Zeit zurück (1 Stadium = 125 Schritt) und bleibt er sich in der Schnelligkeit der Bewegung gleich, so erreicht er die Schildkröte in $2^2/_{11}$ Minuten.

# Anwendung der geometrischen Reihen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung.

## A. Zinseszins-Rechnung.

### §. 178.

**Erklärung.** Ein Capital steht auf Zinseszinsen, wenn die am Ende jedes Termins fälligen Zinsen zum Capitale geschlagen und mit diesem verzinst werden.

Das auf Zinseszins angelegte Capital heisst der gegenwärtige baare Werth und die Summa, auf die es in einem gewissen Zeitraume anwächst, heisst der zukünftige Werth des Capitals oder Endwerth; der Unterschied zwischen Capital und Endwerth heisst Disconto oder Rabatt.

Wir haben es demnach hier mit vier Grössen zu thun, mit dem baaren Werthe, dem Zinsfusse, der Ausstandszeit und dem Endwerthe, die wir mit a, p, n, w bezeichnen.

Da diese vier Grössen in einer gegenseitigen Abhängigkeit zu einander stehen, so lässt sich unter Anwendung der geometrischen Progressionen leicht die vierte bestimmen, wenn drei davon bekannt sind, und diese Operation heisst Zinseszins-Rechnung.

### §. 179.

Ist ein Capital a um p Procent n Jahre auf Zinseszins angelegt, so ist der Endwerth

I. $$w = a q^n.$$

Denn a Capital trägt im ersten Jahre Zinsen

$$= \frac{ap}{100},$$

demnach Capital und Zinsen im ersten Jahre

$$= a + \frac{ap}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

= Capital für das zweite Jahr; die Zinsen hievon im zweiten Jahre

$$= \frac{ap}{100}\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

demnach Capital und Zinsen im zweiten Jahre

$$= a\left(1+\frac{p}{100}\right)+\frac{a\,p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$$

= Capital für das dritte Jahr; die Zinsen hievon

$$=\frac{a\,p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,$$

demnach Capital und Zinsen im dritten Jahre

$$=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+\frac{a\,p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3,$$

Capital und Zinsen im vierten Jahre

$$=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^4,$$

Capital und Zinsen im $n^{\text{ten}}$ Jahre

$$=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Somit haben wir hier eine geometrische Reihe, deren Exponent

$$=\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

auch Zinsexponent oder Vermehrungsfactor genannt.

Setzen wir nun

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)=q,$$

so ist:

$$w = a\,q^n.$$

Daraus ergibt sich:

II. $$a=\frac{w}{q^n}.$$

III. $$p=\left(\sqrt[n]{\frac{w}{a}}-1\right)100.$$

IV. $$n=\frac{\log w-\log a}{\log q}.$$

**Zusatz 1.** Disconto

$$= w - a = a\,q^n - a = a\,(q^n-1). \quad \text{Substit. aus I.}$$

$$= w-\frac{w}{q^n}=\frac{w\,q^n-w}{q^n}=\frac{w\,(q^n-1)}{q^n}. \quad \text{„ „ II.}$$

**Zusatz 2.** Sind die Zinsen halbjährig, vierteljährig, monatlich zu berechnen, so ist:

$$w=a\left(1+\frac{p}{200}\right)^{2n}.$$

$$w=a\left(1+\frac{p}{400}\right)^{4n}.$$

$$w=a\left(1+\frac{p}{1200}\right)^{12n}.$$

**Zusatz 3.** Steht ein Capital a um p % nicht blos n ganze Jahre sondern noch um einen Theil des letzten Jahres, den wir mit $\frac{x}{y}$ bezeichnen wollen, auf Zinseszins aus, so ist:

$$w = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left(1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{p}{100}\right).$$

Denn wenn a Capital in einem Jahre $\frac{ap}{100}$ Zinsen trägt, so muss

$$a\left(1 + \frac{p}{110}\right)^n$$

Capital in $\frac{x}{y}$ Jahren

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{p}{100}\right)$$

Zinsen abwerfen, demnach Zins und Capital

$$= a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n + a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{p}{100}\right);$$

hieraus

$$w = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left(1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{p}{100}\right) = a\,q^n \cdot \left(1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{p}{100}\right).$$

Anmerkung. Vorstehende Sätze gelten auch von andern Grössen, die jährlich um einen bestimmten aliquoten Theil wachsen, z. B. vom Bestand eines Waldes, von der Bevölkerung eines Landes u. s. w.

## §. 180.

Wenn ein Capital a jährlich um sich selbst erhöht wird und auf Zinseszinsen aussteht, so ist:

$$\text{V.} \qquad w = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Denn die eingezahlten Capitalien stehen nach der Zeit der Einzahlung

$$n - 1,\ n - 2,\ n - 3,\ n - 4 \ldots 3,\ 2,\ 1,\ 0 \text{ Jahre}$$

auf Zinseszinsen. Nach dieser Zeit sind die verschiedenen Werthe des eingezahlten Capitals a nach §. 179, I.:

$$a\,q^{n-1},\ a\,q^{n-2},\ a\,q^{n-3},\ a\,q^{n-4} \ldots a\,q^3,\ a\,q^2,\ a\,q,\ a \text{ (geometrische Reihe)};$$

folglich ist der Endwerth oder die Summa aller Zahlungen sammt Zinsen:

$$w = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \text{ (cf. §. 176, Formel 6)};$$

daraus ergibt sich:

VI. $$a = \frac{w(q-1)}{q^n - 1}.$$

VII. $$n = \frac{\log[a + w(q-1)] - \log a}{\log q}.$$

## §. 181.

Wird ein auf Zinseszins angelegtes Capital a am Ende eines jeden Jahres um eine gewisse Summa b vermehrt oder vermindert, so ist:

VIII. $$w = a q^n \pm \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Denn das auf Zinseszins angelegte Capital a wächst in n Jahren auf den Werth

$$= a q^n \text{ (cf. I)}$$

und wird das angelegte Capital am Ende eines jeden Jahres um die Summa b vermehrt oder vermindert, so beträgt dieses nach n Jahren

$$= \frac{b(q^n - 1)}{q - 1} \text{ cf. V.}$$

Es sei nun

$$a \pm b = w,$$

so ist:

$$w = a q^n \pm \frac{b(q^n - 1)}{q - 1};$$

daraus ergibt sich:

IX. $$a = \frac{w(q-1) \pm b(q^n - 1)}{q^n (q-1)}.$$

X. $$b = \frac{(w - a q^n)(q - 1)}{q^n - 1}.$$

XI. $$n = \frac{\log[(q-1) w \pm b] - \log[(q-1) a \pm b}{\log q}.$$

## §. 182.

### Beispiele zur Anwendung.

1.

Wie gross muss ein Capital sein, das zu 5 % auf Zinseszins angelegt, nach 11 Jahren ebenso viel Werth sein soll als 2000 Thl. zu 8 % nach 20 Jahren.

**Auflösung.** Das Capital sei x, und da der Zinsexponent

$$= 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05,$$

so ist der Endwerth nach 11 Jahren

$$= x\,(1{,}05)^{11};$$

das andere Capital ist 2000 Thl., sein Zinsexponent

$$= 1{,}08,$$

folglich Endwerth nach 20 Jahren

$$= 2000\,(1{,}08)^{20}.$$

Daher ist:

$$x\,(1{,}05)^{11} = 2000\,(1{,}08)^{20}.$$

$$\log x + 11 \log 1{,}05 = \log 2000 + 20 \log 1{,}08.$$

$$\log x = \begin{cases} \log 2000 = 3{,}3010300 \\ + 20 \log 1{,}08 = 0{,}6684760 \\ - 11 \log 1{,}05 = 9{,}7669177 - 10 \end{cases}$$

$$3{,}7364237.$$

$$x = 5450{,}341 \text{ Thl.}$$

2.

Der Käufer eines Gutes bleibt einen Theil des Kaufschillings schuldig. Diesen Rest soll er nach dem Kaufvertrage in der Weise abtragen, dass er 8 Jahre lang am Anfang jedes Jahres 5520 Thl. zahlt. Er verwendet aber in dieser Zeit alle Erübrigungen auf Melioriren des Gutes, so dass er gar nichts abzahlen konnte, wie viel ist er nach Verlauf von 8 Jahren schuldig, wenn von den festgesetzten Anzahlungen 4 % und Zinseszinsen gerechnet werden?

**Auflösung.** Gegeben ist

$$a = 5520, \quad q = 1{,}04, \quad n = 8;$$

daher nach §. 180, V:

$$w = \frac{5520\,(1{,}04^8 - 1)}{0{,}04},$$

$$\log w = \log 5520 + \log (1{,}04^8 - 1) - \log 0{,}04;$$

nun ist:

$$1{,}04^8 = 8 \log 1{,}04 = 1{,}368568,$$

$$\log w = \begin{cases} \log (1{,}04^8 - 1) = \log 0{,}368568 = 0{,}5665176 - 1 \\ + \log 5520 = 3{,}7419391 \\ - \log 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2 = 1{,}3979400 \end{cases}$$

$$4{,}7063967.$$

$$w = 50862{,}38 \text{ Thl.}$$

3.

Jemand hat 6000 Thl. Baarvermögen zu 5 % auf Zinseszinsen angelegt und legt jährlich noch 500 Thl. zu gleichem Zinsfusse dazu; wie viel hat er in 15 Jahren erübrigt, wie gross ist sein ganzes Vermögen?

**Auflösung.** Gegeben ist

$$a = 6000 \text{ Thl.}, \; q = 1{,}05, \; n = 15 \text{ und } b = 500.$$

Daher nach §. 181, VIII:

$$w = 6000 \,.\, 1{,}05^{15} + \frac{500\,(105^{15} - 1)}{0{,}05},$$

$$\log w = \left\{ \begin{array}{lll} \log 6000 & = 3{,}7781513 & \\ + 15 \log 1{,}05 & = 0{,}3178395 & \\ & \phantom{=} 4{,}0959908, \text{ num.} = 12473{,}57. & \\ \text{plus:} & & \\ \log 500 & = \phantom{+} 2{,}6989700 & \\ + \log (1{,}05^{15} - 1) & = + 0{,}0329924 & \\ - \log 0{,}05 & = + 1{,}3010300 & \\ & \phantom{=} 4{,}0329924, \text{ num.} = + 10789{,}27 & \end{array} \right.$$

$$w = 23262{,}84 \text{ Thl.}$$

4.

Ein reicher Mann vermachte im Jahre 1856 sein ganzes rentirendes Vermögen von 200000 Thl. seinen Verwandten, jedoch mit der Bedingung, dass sie die Summa, welche er bis zu seinem Tode noch erspart, als Stipendienfond anlegen. Sein Vermögen stand zu 5 % aus; von den Zinsen brauchte er jährlich 2000 Thl. für sich; er starb erst in diesem Jahre (1868), gerade 12 Jahre, nachdem er sein Testament gemacht hatte. Wie gross war der Stipendienfond?

**Auflösung.** Gegeben ist

$$a = 200000, \; q = 1{,}05, \; n = 12 \text{ und } b = 2000.$$

Daher nach §. 181, VIII:

$$w = 200000 \,.\, 1{,}05^{12} - \frac{2000\,(1{,}05^{12} - 1)}{0{,}05}.$$

$$\log w = \begin{cases} \log 200000 = 5{,}3010300 \\ +\ 12 \log 1{,}05 = 0{,}2542716 \\ \qquad 5{,}5553016, \quad \text{num.} = 359171{,}2. \\ \text{minus:} \\ \log 2000 = 3{,}3010300 \\ +\ \log(1{,}05^{12} - 1) = 0{,}9008345 - 1 \\ -\ \log 0{,}05 = +\ 1{,}3010300 \\ \qquad 4{,}5028945, \quad \text{num} = -\ 31834{,}24 \end{cases}$$

$$w = 327336{,}96 \text{ Thl.}$$

Erbtheil der Verwandten = 200000 Thl.

Stipendienfond = 127336,96 Thl.

## B. Rentenrechnung.

### §. 183.

**Erklärung.** Unter Rente versteht man eine in gleichen Terminen zu beziehende Summa, welche die festgesetzten Zinsen eines eingezahlten Capitals übersteigt. Ist die Anzahl der Termine bestimmt, in welchen eine Rente bezogen werden kann, so heisst die Rente Zeit- oder Jahrrente; hängt die Anzahl der Termine vom Tod des Bezugsberechtigten ab, so heisst sie Leib- oder Lebensrente.

Das Capital, welches zur Erlangung einer Rente eingezahlt werden muss, heisst Einsatz oder Mise.

Die Person, welche die Rente auszahlt, heisst der Rentengeber, und der sie bezieht, der Rentner.

So haben wir es auch hier mit vier Grössen zu thun, mit dem Einsatze, dem Zinsexponenten, der Rente und der Anzahl der Jahre, in der sie zu beziehen ist, die wir mit a, q, r, n bezeichnen.

Wie bei der Zinseszinsrechnung, so lässt sich auch hier leicht die vierte Grösse bestimmen, wenn drei davon bekannt sind, und diese Operation heisst Rentenrechnung.

### §. 184.

Ist der Zinsexponent q, so ist der baare Werth einer Zeitrente r, die man n Jahre lang am Ende eines jeden Jahres bezieht:

I. $$a = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}.$$

Denn der Endwerth des auf Zinseszinsen angelegten Capitals a muss von Jahr zu Jahr kleiner werden, weil die alljährlich in Abzug zu bringende Summa r die einfachen Zinsen übersteigt, bis endlich nach n Jahren w = 0 ist. Desshalb ist nach §. 181, VIII:

$$a q^n - \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} = w = 0 \text{ (r für b eingesetzt)},$$

folglich:

$$a = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)};$$

daraus ergibt sich:

II. $$r = \frac{a q^n (q - 1)}{q^n - 1}.$$

III. $$n = \frac{\log r - \log[r - a(q - 1)]}{\log q}.$$

## §. 185.

Soll eine n Jahre laufende Rente auf einmal baar ausgezahlt werden, so hat dies nach dem mittlern Zahlungstermine zu geschehen.

Bezeichnen wir diesen mit m, so ist:

IV. $$m = \frac{\log n + \log(q - 1) + n \log q - \log(q^n - 1)}{\log q}.$$

Denn von einer n Jahre laufenden Rente r ist der baare Werth nach §. 184, I.:

$$\alpha) \quad a = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)};$$

und die n Jahre laufende Rente r ist = n r, eine Summa, die erst nach m Jahren zu zahlen wäre; ihr baarer Werth ist nach §. 179, II.:

$$\beta) \quad a = \frac{n r}{q^m}.$$

Nun erhält man aus der Vergleichung von $\alpha$ und $\beta$

$$\frac{n r}{q^m} = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)};$$

dies führt durch Logarithmirung und Entwicklung des Werthes von m auf Gleichung IV.

## §. 186.

Wird k Jahre lang zu Anfang eines jeden Jahres eine gewisse Summa a eingezahlt, um sich nach Verlauf dieser Zeit eine n Jahre laufende Rente r zu verschaffen, so ist der baare Werth der Einlage:

$$\text{V.} \qquad a = \frac{r(q^n - 1)}{q^{n+1}(q^k - 1)}.$$

Denn die Einlage beträgt am Ende des $k^{ten}$ Jahres nach §. 180, V:

$$w = \frac{a\,q(q^k - 1)}{q - 1},$$

da hier die letzte Einzahlung nicht a, sondern aq ist, weil sie schon auf ein Jahr mit zu verzinsen war. Die Summa

$$\frac{a\,q(q^k - 1)}{q - 1}$$

ist nun die Einlage oder Mise für eine n Jahre laufende Rente; desshalb hat man nach §. 184, I:

$$\frac{a\,q(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)};$$

daraus erhält man Gleichung V und

$$\text{VI.} \qquad r = \frac{a\,q^{n+1}(q^k - 1)}{q^n - 1},$$

$$\text{VII.} \qquad n = \frac{\log r - \log[r - a\,q(q^k - 1)]}{\log q},$$

$$\text{VIII.} \qquad k = \frac{\log[q^n(r + a\,q) - r] - \log a - (n + 1)\log q}{\log q}.$$

## §. 187.

### Beispiele zur Anwendung.

1.

Jemand möchte gern auf 20 Jahre eine Rente, er zahlt hiezu 5000 Thl. ein, die zu $3\frac{1}{2}$ % verzinset werden; wie gross ist die Rente?

**Auflösung.** Gegeben ist

$$a = 5000, \quad n = 20, \quad q = 1{,}035;$$

daher ist nach §. 184, II:

$$r = \frac{5000 \,.\, 1{,}035^{20} \,.\, 0{,}035}{1{,}035^{20} - 1}.$$

$$\log r = \begin{cases} \quad\log 5000 = 3{,}6989700 \\ + 20 \log 1{,}035 = 0{,}2988060 \\ + \quad\log 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2 \\ - \quad\log (1{,}035^{20} - 1) = + 0{,}0044595 \end{cases}$$

$$2{,}5463035.$$

$$r = 351{,}8062 \text{ Thl.}$$

2.

Ein Beamter wollte seiner Familie eine Rente verschaffen und zahlte desshalb am 3. März 1859 300 Thl. in eine Lebensversicherungs-anstalt, diese Einlage wiederholte er bis zu seinem Tode alljährlich; er starb am 4. März 1868 und hatte die auf diesen Termin fallende Einlage schon erlegt. Wie hoch wird die Rente sein, welche seine Familie am 3. März 1869 erheben kann, wenn sie dieselbe 16 Jahre geniessen soll und wenn die Einlagen bei der Anstalt zu 4 % verzinset werden?

**Auflösung.** Gegeben ist

$$a = 300, \quad q = 1{,}04, \quad n = 16 \text{ und } k = 10;$$

daher ist nach §. 186, II:

$$r = \frac{300 \,.\, 1{,}04^{17} \,.\, (1{,}04^{10} - 1)}{(1{,}04^{16} - 1)}.$$

$$\log r = \begin{cases} \quad\log 300 = 2{,}4771213 \\ + 17 \log 1{,}04 = 0{,}2895661 \\ + \quad\log (1.04^{10} - 1) = + 0{,}6814610 - 1 \\ - \quad\log (1{,}04^{16} - 1) = + 0{,}0589967 \end{cases}$$

$$2{,}5071451$$

$$r = 321{,}4734 \text{ Thlr.}$$

3.

Wie gross ist der baare Werth einer n Jahre laufenden Rente r, die alljährlich in einer arithmetischen Reihe steigt und deren Differenz r, wenn der Zinsexponent q ist?

**Auflösung.** Die n Jahre laufenden einzelnen Renten sind:

$$r,\ 2r,\ 3r,\ 4r,\ \ldots nr$$

und

$$\frac{r}{q},\ \frac{2r}{q^2},\ \frac{3r}{q^3},\ \frac{4r}{q^4},\ \ldots \frac{nr}{q^n}$$ (die baaren Werthe cf. §. 179, II).

$$\text{I. } x = \frac{r}{q} + \frac{2r}{q^2} + \frac{3r}{q^3} + \frac{4r}{q^4} + \ldots + \frac{(n-1)r}{q^{n-1}} + \frac{nr}{q^n}, \text{ wenn } x = \text{Summa aller baaren Werthe.}$$

$$\text{II. } \frac{x}{q} = \frac{r}{q^2} + \frac{2r}{q^3} + \frac{3r}{q^4} + \ldots + \frac{(n-2)r}{q^{n-1}} + \frac{(n-1)r}{q^n} + \frac{nr}{q^{n+1}} \text{ (Product aus I.} \times \frac{1}{q}\text{).}$$

$$\text{III. } x - \frac{x}{q} = \left(\frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} + \frac{r}{q^4} + \ldots + \frac{r}{q^{n-1}} + \frac{r}{q^n}\right) - \frac{nr}{q^{n+1}} \text{ (Differenz zwischen I—II).}$$

$$\text{IV. } x\left(\frac{q-1}{q}\right) = \left[\left(\frac{r}{q^{n+1}} - \frac{r}{q}\right) : \frac{1}{q} - 1\right] - \frac{nr}{q^{n+1}},$$

nachdem nach §. 174, Lehrsatz 2, der in Klammern stehende Ausdruck als geometrische Reihe summirt ist.

$$x = \frac{1}{q-1}\left[\frac{q^n - 1}{(q-1)q^n} \cdot rq - \frac{nr}{q^n}\right].$$

4.

Wie gross ist der baare Werth einer n Jahre laufenden Rente r, die alljährlich in einer geometrischen Reihe steigt und deren Quotient e, wenn der Zinsexponent q ist?

**Auflösung.** Die n Jahre laufenden Renten sind:

$$\text{I. } r,\ re,\ re^2,\ re^3,\ \ldots\ re^{n-1}$$

und

$$\text{II. } \frac{r}{q},\ \frac{re^1}{q^2},\ \frac{re^2}{q^3},\ \frac{re^3}{q^4},\ \ldots\ \frac{re^{n-1}}{q^n},$$

die baaren Werthe der einzelnen Renten cf. §. 179, II.

Da in der Reihe II. das Anfangsglied $\frac{r}{q}$, der Quotient $\frac{e}{q}$ und das Endglied $\frac{re^{n-1}}{q^n}$ ist, so ist die Summa x aller baaren Werthe:

$$x = \frac{\frac{r}{q}\left(\left(\frac{e}{q}\right)^n - 1\right)}{\frac{e}{q} - 1} = \frac{r}{q^n}\left(\frac{e^n - q^n}{e - q}\right) = r\left(\frac{e^n}{q^n} - 1\right) : (e - q).$$

## §. 188.

### Aufgaben.

1. Ein Bedienter will seinen jährlichen Lohn von 30 Thl. bei seinem Herrn zu 5 % auf Zinseszins stehen lassen; wie viel hat er sich auf diese Weise nach 12 Jahren erspart?

   Antw. 477½ Thl.

2. Wie gross ist der Endwerth eines Capitals von 900 Thl. in 15 Jahren zu $3\frac{1}{2}$ % auf Zinseszins angelegt?

Antw. 1507,81 Thl.

3. In wie viel Jahren erreicht eine Stiftung von 32000 Thl. auf Zinseszins zu 3 % angelegt einen Werth von 340506,8 Thl., um damit ein Polytechnicum nach dem Wunsche des Stifters zu gründen?

Antw. 80 Jahre.

4. Eine Stadt zählt gegenwärtig 12000 Seelen, wie gross ist ihre Bevölkerung nach 20 Jahren bei einer jährlichen Zunahme von 3 %?

Antw. 21673 E.

5. Ein Erlenschlag hält gegenwärtig 800 Klafter; wie viel Klafter hält er in 6 Jahren bei einem jährlichen Zuwachs von 28,5 %?

Antw. 3601,71 Klafter.

6. Eine Stadt hatte bei der Volkszählung im Januar 1868 10000 und vor 5 Jahren 8502 Einwohner; wie viel Procent beträgt der Zuwachs?

Antw. 3,3 %.

7. Das Vermögen einer Stiftung ist in 70 Jahren von 32100 fl. auf 152382 fl. 48 kr. gestiegen; zu wie viel Procent war es auf Zinseszins angelegt?

Antw. 2 fl. 15 kr.

8. Ein Theil Nordamerika's zählte vor geraumer Zeit 2 Millionen Einwohner und gegenwärtig 14489380, wie lange ist das her, wenn jährlich eine Zunahme von 2 % statt fand?

Antw. 100 Jahre.

9. Wie gross wird ein Capital von 5000 Thl. nach 30 Jahren zu 4 %, wenn die Zinsen vierteljährig gerechnet und wieder zum Capital geschlagen werden?

Antw. $16502\frac{1}{20}$ Thl.

10. Wie lang muss ein Capital zu $4\frac{1}{2}$ % ausstehen, wenn es fünfmal so gross werden soll?

Antw. 36,56..

11. In wie viel Jahren wird ein Capital von 3500 Thl. auf Zinses-

zins zu 5 % angelegt, ebenso gross als ein Capital von 1500 Thl. zu 6 % in 20 Jahren?

Antw. 6,51 . .

12. Auf welche Summa erwächst ein Capital von 3000 Thl. mit Zinseszins zu 5 % in $20\frac{1}{2}$ Jahre?

Antw. 8158,89 Thl.

13. Auf welche Summa erwächst die Einlage von 400 fl. 36 kr., die am Ende eines jeden Jahres bei einer Cassa gemacht wird durch Zinseszinsen zu $5\frac{1}{2}$ % bis zum Schlusse des zwanzigsten Jahres?

Antw. 13968,27 fl.

14. Wie gross ist bei einem Disconto von $3\frac{1}{2}$ % der baare Werth einer Summa von 36500 Thl., die erst nach 8 Jahren fällig wird?

Antw. 27718 Thl. 15 Sgr.

15. Wie gross ist bei einem Disconto von 5 % der baare Werth eines Capitals von 1437 fl., das erst nach 12 Jahren flüssig wird?

Antw. 800,1753 fl.

16. Ein Pächter blieb 5 Jahre lang seinen Pachtschilling zu 2000 Thl. schuldig; wie viel hat er am Ende des fünften Jahres zu zahlen, wenn Zinseszinsen zu $3\frac{1}{2}$ % gerechnet werden?

Antw. 10724 Thl. $25\frac{1}{2}$ Sgr.

17. Für ein Stück Wald bietet der eine Käufer 40000 Thl. ohne Zinsen zahlbar in 7 Jahren, der Andere bietet nur 30000 Thl. zahlbar in 3 Jahren, aber ebenfalls ohne Zinsen; welcher ist der Meistbietende, wenn die Zinsen zu 5 % gerechnet werden?

Antw. I. 28427 Thl. $7\frac{1}{2}$ Sgr.; II. $25915\frac{3}{25}$ Thl.

18. Wäre zu Christi Geburt ein Pfenning auf Zinseszins zu 5 % angelegt worden, zu welchem Capitale wäre er bis Ende dieses Jahres (1868) angewachsen?

Antw. 15 Sextillionen 900150 Quintillionen Gulden.

19. Eine Bank hat 1560000 Thl. zu 3 % und hat dieses Capital ausgeliehen zu 5 %; wie viel hat sie am Ende des fünfzehnten Jahres gewonnen, wenn Zinseszinsen gerechnet werden?

Antw. 539556 Thl.

20. Ein Offizier muss von seinem rentirenden Vermögen, das im Ganzen 15467 fl. beträgt und zu 5 % auf Zinseszins aussteht, am Ende jeden Jahres 600 fl. zusetzen; wie wird der Stand seines Vermögens nach 10 Jahren sein?

**Antw. 17647 fl. nahezu.**

21. Jemand nimmt von einem Capitale von 4254 fl., das zu 3 % auf Zinseszinsen aussteht, am Ende eines jeden Jahres 400 fl. zu seinem Unterhalte weg; in wie viel Jahren ist dieses Capital aufgezehrt?

**Antw. 13 Jahr.**

22. Der gegenwärtige Bestand eines Waldes hält 255000 Klafter, sein jährlicher Zuwachs beträgt $2\frac{1}{2}$ %, es werden jährlich 1000 Klafter geschlagen; wie gross ist sein Bestand nach 40 Jahren?

**Antw. 617290,62 Klafter.**

23. Wie gross wird ein Capital von 80000 fl. in 10 Jahren durch Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}$ %, wenn am Ende eines jeden Jahres $1\frac{1}{2}$ % auf Verwaltung abgehen?

**Antw. 107513,2 fl.**

24. Ein Wald hat einen jährlichen Zuwachs von 4 % und einen dermaligen Bestand von 30000 Klafter, wie viele Jahre dürfen am Ende eines Jahres 800 Klafter geschlagen werden, wenn der Wald noch $38009\frac{2}{5}$ Klafter halten soll?

**Antw. 15 Jahre.**

25. Ein Staat macht ein Militäranlehen von 30 Millionen Thl. zu 5 % und will dasselbe in 50 Jahren wieder getilgt haben, indem er jährlich eine bestimmte Summa zahlt, bei der die Zinsen mit eingerechnet sind; wie gross ist diese Summa?

**Antw. 1643302 Thl.**

26. Jemand ermittelt den Stand seines Vermögens am Ende des Jahres 1867, er sieht dass es von 30000 Thl. auf 38009 Thl. gestiegen ist, obschon er am Ende eines jeden Jahres 800 Thl. zu seinem Unterhalte weggenommen hat; wie viel Jahre waren hiezu erforderlich, wenn es auf Zinseszins zu 4 % angelegt war?

**Antw. 15 Jahre.**

27. Der Bestand eines Waldes hält zur Zeit 20000 Klafter, sein jährlicher Zuwachs beträgt 5 %; wie viel Klafter dürfen jährlich gefällt werden, wenn er in 22 Jahren abgetrieben sein soll?

Antw. 1519,41 Klafter.

28. Eine Schuld von 15000 Thl. soll nach 7 Jahren mit Zinseszins zu 3 % gezahlt werden; durch welche je am Ende eines Jahres wiederkehrenden gleich grossen Abschlagszahlungen könnte diese Schuld in der nämlichen Zeit getilgt werden, wenn hier der Zinsfuss $4\frac{1}{2}$ % beträgt?

Antw. $2545\frac{1}{2}$ Thl.

29. Jemand hat nach 20 Jahren 10000 fl. ohne Zinsen zu erheben, er will aber dafür während dieser Zeit mit Anfang eines jeden Jahres eine gleiche Rente, so dass die ganze Schuld in 20 Jahren getilgt ist, wenn dieser Berechnung 4 % Zinseszinsen zu Grunde gelegt werden.

Antw. 335,82 fl.

30. Jemand hat eine jährliche Rente von 600 Thl. auf 20 Jahre zu geniessen; wie viel wäre ihr baarer Werth, im Fall er sie verkaufen wollte, die Zinsen zu 4 % gerechnet?

Antw. 8154,18 Thl.

31. Jemand besitzt einen Werth von 20000 Thl., er will ihn in eine jährliche Rente von 1500 Thl. verwandeln; wie lang kann er diese Rente beziehen, wenn die Zinseszinsen zu 5 % gerechnet werden?

Antw. $22\frac{1}{2}$ Jahre.

32. Ein Onkel will seinen 3 Neffen eine 36 Jahre lang am Ende eines Jahres zu beziehende Zeitrente von 6000 fl. verschaffen; wie gross ist die Mise, wenn dieselbe zu 5 % verzinset wird?

Antw. 99281,1 fl.

33. Wie gross ist der baare Werth einer Zeitrente von 2000 fl., die 30 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres fällig ist, wenn die Zinsen zu 4 % gerechnet werden?

Antw. 34584 fl.

34. Wenn eine Zeitrente von 200 Thl. 7 Jahre lang zu geniessen ist und der Zinsfuss 4 % beträgt, wie gross ist der baare Werth?

Antw. 1200 Thl.

35. Auf wie viel Jahre kann man sich bei einer baaren Einzahlung von 6000 Thl. und Zinseszinsen zu 5 % eine Rente von 390 Thl. 9 Silbergroschen verschaffen, die am Ende jeden Jahres flüssig wird?

Antw. 30 Jahre.

36. Eine Tante will ihren Neffen während seiner Studienzeit in Genuss einer Rente von 500 Thl. setzen, die er 6 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres beziehen kann; welche Einlage ist hiezu erforderlich, wenn dieselbe zu $3\frac{1}{2}$ % verzinset wird?

Antw. 2664 Thl. nahezu.

37. Jemand erlegt bei einer Lebensversicherungsgesellschaft 25 Jahre lang am Anfang jeden Jahres 475 Thl., um sich dadurch eine Zeitrente auf 20 Jahre zu begründen, die am Ende jeden Jahres flüssig wird; wie hoch ist diese Rente bei Zinseszinsen zu $3\frac{1}{2}$ %?

Antw. 1347,32 Thl.

38. Wenn man bei einer Lebensversicherungsanstalt je nach 3 Jahren eine Einlage von 120 Thl. $20\frac{1}{2}$ Sgr. bis zum Schlusse des dreissigsten Jahres anlegt, welche Rente kann man dafür 10 Jahre lang am Ende jeden Jahres beziehen, wenn Zinseszinsen zu $3\frac{1}{2}$ % gerechnet werden?

Antw. $240\frac{1}{2}$ Thl. nahezu.

39. Bei einem Gutsverkaufe melden sich 3 Käufer; der erste bietet 225000 Thl. unter der Bedingung, dass er nur 25000 Thl. sofort baar und 10 Jahre nach einander mit Ende jeden Jahres 20000 Thl. einzahlen darf, der zweite bietet 230000, will 50000 Thl. sogleich erlegen und 18 Jahre lang 10000 Thl. am Ende jeden Jahres, der dritte bietet nur 194200 Thl., aber Baarzahlung. Wer hat von den 3 Käufern am meisten geboten, wenn die Zinsen zu 4 % gerechnet werden?

Antw. I. 187217,6 Thl., II. 176592,7 Thl., III. 194200 Thl.

40. Was ist der baare Werth einer jährlich in arithmetischer Progression und zwar um sich selbst steigenden Rente von 160 fl., die 20 Jahre lang am Ende eines Jahres zu beziehen ist, wenn die Zinseszinsen zu 4 % gerechnet werden?

Antw. 20024 fl. nahezu.

41. Was ist der baare Werth einer alljährlich in geometrischer Progression mit dem Quotienten 2 steigenden Rente von 110 Thl., die 15 Jahre lang am Schlusse jedes Jahres zu beziehen ist, wenn die Zinsen zu $3\frac{1}{2}$ % gerechnet werden?

Antw. 2229403 Thl.

42. Von einem Anlehen im Betrage zu 1000000 Thl., das halbjährig zu 2 % verzinset wird, werden am Ende des ersten Jahres $\frac{1}{2}$ % zurückbezahlt; in jedem folgenden Jahre wird der Tilgungsfond um 6 % höher als im vorhergehenden; wie gross ist der baare Werth der im Verlaufe von 44 Jahren auf Verzinsung und Tilgung des Anlehens verwendeten Summen, wenn ein halbjähriger Disconto von 2 % oder ein jährlicher Disconto von $3\frac{1}{2}$ % berechnet wird? (Hofmann.)

Antw. 997623 oder 1095690 Thl.

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 200—224; Heis §. 84, 14—69.

---

# II. Stufenbrüche.

## §. 189.

**Erklärung 1.** Ein Stufen- oder Kettenbruch ist ein continuirlicher Bruch, dessen Nenner oder Zähler aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, der abermals aus einer ganzen Zahl und aus einem Bruche zusammengesetzt ist.

Je nachdem sich die Bruchreihe im Nenner oder Zähler fortsetzt, unterscheidet man absteigende und aufsteigende Stufenbrüche.

**Erklärung 2.** Die Stufenbrüche werden mit Vortheil gebraucht, um Verhältnisse zwischen sehr grossen Zahlen durch kleinere möglichst annähernd auszudrücken, um irrationale Quadratwurzeln durch rationale Brüche darzustellen; ferner zur Bestimmung des Logarithmus einer Zahl und zur Auflösung diophantischer Gleichungen.

## a. Absteigende Stufenbrüche.

§. 190.

**Erklärung 1.** Der allgemeine Ausdruck eines absteigenden Stufenbruches ist:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}}}$$

**Erklärung 2.** Die Brüche

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{d},$$

aus welchen der absteigende Stufenbruch dadurch entsteht, dass zum Nenner des vorangehenden der nachfolgende immer addirt wird, heissen Glieder des Stufenbruches.

Die Nenner dieser Glieder:

$$a,\ b,\ c,\ d\ldots$$

bezeichnen positive ganze Zahlen. Je nachdem die Anzahl dieser Glieder begrenzt oder unbegrenzt ist, heisst ein Stufenbruch endlich oder unendlich.

**Erklärung 3.** Wird ein absteigender Stufenbruch bei irgend einem dem Endgliede vorangehenden Gliede abgebrochen, etwa bei $\frac{1}{c}$, so heisst der abgekürzte Stufenbruch:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots}}}$$

Partialbruch oder Näherungswerth des Stufenbruches.

§. 191.

**Erklärung.** Ein gemeiner Bruch wird in einen absteigenden Stufenbruch verwandelt, wenn man sowohl seinen Zähler als seinen Nenner durch den Zähler dividirt, wodurch man einen Bruch erhält, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner eine ganze Zahl (Quotient der Division) und ein Bruch ist; mit diesem

letzten Bruche verfährt man wieder wie mit dem ursprünglich gegebenen und setzt diese Operation fort bis die Division aufgeht.

Ist der gegebene Bruch unächt, so hat man erst die Ganzen abzusondern. Z. B.:

$$\frac{371}{162} = 2 + \frac{47}{162}.$$

$$\frac{47}{162} = \frac{47:47}{162:47} = \frac{1}{162:47} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{21}{47}}$$

$$\frac{21}{47} = \frac{21:21}{47:21} = \frac{1}{47:21} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{21}}$$

$$\frac{5}{21} = \frac{5:5}{21:5} = \frac{1}{21:5} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}};$$

folglich:

$$\frac{371}{162} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}}.$$

## §. 192.

**Lehrsatz.** Aus zwei gegebenen Partialwerthen eines Stufenbruches und seinem folgenden Gliede erhält man den nächsten Partialwerth, wenn man Zähler und Nenner des zweiten Partialwerthes mit dem letzten Gliede multiplicirt und zu diesen Producten Zähler und Nenner des ersten Partialwerthes addirt.

Es sei der Kettenbruch

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cdots \, . \, \cfrac{1}{r}}}}}$$

und seine auf einander folgenden Näherungswerthe

$$\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{C}, \frac{\delta}{D}, \ldots, \frac{\mu}{M}, \frac{\pi}{P}, \ldots$$

und r das letzte Glied eines zu bestimmenden Partialwerthes $\frac{\varrho}{R}$, so ist:

$$\frac{\varrho}{R} = \frac{\pi r + \mu}{P r + M}.$$

**Beweis.**

Denn es ist:

I. $\frac{\alpha}{A} = \frac{a}{1}$, folglich $\alpha = a$ und $A = 1$.

II. $\frac{\beta}{B} = a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b}$, folglich $\beta = ab + 1$ und $B = b$.

III. $$\frac{\gamma}{C} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = a + \frac{c}{bc + 1} = \frac{abc + c + a}{bc + 1} = \frac{(ab + 1) . c + a}{bc + 1}$$

$$= \frac{\beta . c + \alpha}{B . c + A}, \text{ durch Substit. aus II. und I.}$$

Nimmt man zu c noch das folgende Glied $\frac{1}{d}$ dazu und setzt $c + \frac{1}{d}$ für c ein in III, so ist:

IV. $$\frac{\delta}{D} = \frac{\beta(c + \frac{1}{d}) + \alpha}{B(c + \frac{1}{d}) + A} = \frac{\beta c d + \beta + \alpha d}{B c d + B + A d} = \frac{(\beta c + \alpha) d + \beta}{(B c + A) d + B}$$

$$= \frac{\gamma d + \beta}{C d + B}, \text{ durch Substit. aus III.}$$

Da nun der dritte Partialwerth

$$= \frac{\beta . c + \alpha}{B . c + A},$$

und der vierte Partialwerth

$$= \frac{\gamma . d + \beta}{C . d + B},$$

so muss für die auf einander folgenden Partialwerthe $\frac{\mu}{M}$ und $\frac{\pi}{P}$ der r^te sein:

$$\frac{\pi r + \mu}{P r + M} = \frac{\varrho}{R}.$$

## §. 193.

**Lehrsatz.** Die Differenz zweier auf einander folgenden Partialwerthe eines Stufenbruches ist immer gleich einem Bruche, der zum Nenner das Product der Nenner der beiden Partialwerthe und zum Zähler die Einheit entweder positiv oder negativ hat, je

nachdem der Subtrahend ein gerader oder ungerader Näherungswerth ist.

Es sei

$$\text{I. } \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} = -\frac{1}{AB},$$

$$\text{II. } \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} = +\frac{1}{BC},$$

$$\text{III. } \frac{\gamma}{C} - \frac{\delta}{D} = -\frac{1}{CD},$$

so ist:

$$\text{m. } \frac{\mu}{M} - \frac{\pi}{P} = \pm\frac{1}{MP}.$$

**Beweis.**

Denn es ist:

$$\text{ad I. } \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} = \frac{\alpha B - A\beta}{AB} = \frac{ab - 1(ab+1)}{AB} = -\frac{1}{AB}, \text{ durch Subst. §. 192.}$$

$$\text{ad II. } \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} = \frac{\beta C - B\gamma}{BC} = \frac{\beta(Bc + A) - B(\beta c + \alpha)}{BC} \quad (\text{§. 192})$$

$$= \frac{A\beta - \alpha B}{BC} = +\frac{1}{BC},$$

da $\alpha B - A\beta$ aus I. $= -1$, so muss $A\beta - \alpha B = +1$ sein.

$$\text{ad III. } \frac{\gamma}{C} - \frac{\delta}{D} = \frac{\gamma D - \delta C}{CD} = \frac{\gamma(Cd + B) - C(\gamma d + \beta)}{CD} \quad (\text{§. 192})$$

$$= \frac{B\gamma - \beta C}{CD} = -\frac{1}{CD} \text{ cf. II.};$$

folglich:

$$\text{ad m. } \frac{\mu}{M} - \frac{\pi}{P} = \pm\frac{1}{MP}.$$

**Zusatz 1.** Je mehr sich die Partialwerthe dem Werthe des ganzen Stufenbruches nähern, desto kleiner werden ihre Differenzen, da jede folgende immer kleiner ist als die Hälfte der vorhergehenden.

**Zusatz 2.** Die Partialwerthe eines Stufenbruches nehmen abwechselnd zu und ab, je nachdem sie positiv oder negativ sind.

## §. 194.

**Lehrsatz.** Der vollständige Werth eines Stufenbruches liegt immer zwischen zwei auf einander folgenden Partialwerthen,

weil von diesen die ungeraden immer kleiner, die geraden immer grösser sind als der volle Werth des Hauptbruches.

**Beweis.**

Denn bezeichnen wir mit $\frac{\pi}{P}$ den ganzen Werth eines Stufenbruches, so ist nach §. 193:

$$\text{I. } \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} = -\frac{1}{AB},$$

$$\text{II. } \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} = +\frac{1}{BC},$$

$$\text{III. } \frac{\gamma}{C} - \frac{\delta}{D} = -\frac{1}{CD},$$

$$\text{IV. } \frac{\delta}{D} - \frac{\mu}{M} = +\frac{1}{DM},$$

$$\text{V. } \frac{\mu}{M} - \frac{\pi}{P} = -\frac{1}{MP},$$

$$\text{VI. } \frac{\alpha}{A} - \frac{\pi}{P} = -\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{BC}\right) - \left(\frac{1}{CD} - \frac{1}{DM}\right) - \frac{1}{MP} \text{ (Summa aus I}-\text{V).}$$

$$\text{VII. } \frac{\beta}{B} - \frac{\pi}{P} = +\left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{CD}\right) + \left(\frac{1}{DM} - \frac{1}{MP}\right) \text{ (Summa aus II}-\text{V).}$$

Nun sind nach §. 193 die eingeklammerten Differenzen

$$\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{BC}\right) \text{ u. s. w.}$$

positive Zahlen, folglich ist:

$$\frac{\alpha}{A} \text{ (erster Partialwerth)} < \frac{\pi}{P} \text{ aus VI und}$$

$$\frac{\beta}{B} \text{ (zweiter Partialwerth)} > \frac{\pi}{P} \text{ aus VII.}$$

**Zusatz.** Ein Partialwerth ist vom vollständigen Werthe des Stufenbruches um weniger verschieden als ein Bruch dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner das Product aus dem Nenner dieses und seines nächstfolgenden Partialwerthes. cf. §. 193 und 194 Lehrsatz.

## §. 195.

**Lehrsatz.** Die Partialwerthe eines Stufenbruches sind in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, weil deren Zähler und Nenner immer relative Primzahlen sind.

### Beweis.

Denn wenn $\frac{\varrho}{R}$ irgend einen Partialwerth bezeichnet und $\frac{\pi}{P}$ den diesem zunächst vorangehenden, so ist:

$$\frac{\pi}{P} - \frac{\varrho}{R} = \frac{\pi R - \varrho P}{PR} = \pm \frac{1}{PR} \quad \text{cf. §. 193,}$$

folglich auch:

$$\pi R - \varrho P = \pm 1;$$

enthielte nun $\frac{\varrho}{R}$ einen gemeinschaftlichen Factor $\omega$, so müsste er auch in

$$\frac{\pi R - \varrho P}{PR} = \pm 1$$

enthalten sein, was bei der Einheit unmöglich ist.

## §. 196.

**Lehrsatz.** Die auf einander folgenden Partialwerthe geben in den kleinsten Zahlen die Grösse des ganzen Stufenbruches genau an.

### Beweis.

Denn wäre zwischen den beiden auf einander folgenden Partialwerthen $\frac{\pi}{P}$ und $\frac{\varrho}{R}$ ein anderer Bruch $\frac{\tau}{T}$ möglich, so müsste dieser dem vollständigen Werthe des Kettenbruches näher kommen als $\frac{\varrho}{R}$ und es wäre ohne Rücksicht auf die Vorzeichen:

$$\frac{\pi}{P} - \frac{\tau}{T} < \frac{\pi}{P} - \frac{\varrho}{R},$$

folglich:

$$\frac{\pi T - \tau P}{PT} < \frac{\pi R - \varrho P}{PR} < \frac{1}{PR} \quad \text{cf. §. 193.}$$

und

$$\frac{\pi T - \tau P}{T} < \frac{1}{R} \quad \text{(nach Division durch P),}$$

also

$$(\pi T - \tau P) R < T,$$

was unmöglich ist, da

$$\pi T - \tau P$$

nicht gleich Null sein kann, denn sonst wäre auch

$$\frac{\pi}{P} = \frac{\tau}{T},$$

was der Annahme widerspricht.

## §. 197.

### I. Beispiele.

1. Den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$$

in einen gewöhnlichen Bruch umzuwandeln.

**1. Auflösung.**

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)}}}} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\frac{3}{4}}}}$$

$$= \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\left(\frac{51}{4}\right)}}} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\frac{4}{51}}} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\left(\frac{361}{51}\right)}} = \cfrac{1}{4+\frac{51}{361}} = \frac{361}{1495}.$$

**2. Auflösung.** Man setzt alle Nenner des Stufenbruches neben einander über einen Bruchstrich und zwar den ersten oder obersten Nenner auf die äusserste Linke; hierauf setzt man unter den letzten Nenner rechts die Einheit und über diese hinaus Null. Man findet nun jede folgende Zahl der neu zu bildenden Reihe, wenn man die vorhergehende untere Zahl mit der darüber stehenden multiplicirt und zum Producte die rechts in der untern Horizontalreihe stehende Zahl addirt. Die vorletzte Zahl ist der Zähler und die letzte der Nenner des aufzusuchenden Bruches; d. h.:

$$\frac{\quad\;\; 4 \quad 7 \quad 12 \quad 1 \quad 3 \qquad\quad}{1495 \quad 361 \quad 51 \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 0} = \frac{361}{1495}.$$

2. Der Bruch $\frac{1361}{2582}$ soll in einen Kettenbruch verwandelt werden.

**Auflösung** in kürzerer Form als §. 191:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 8 & & 1 & & 2 & & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 2 & \\
2582 & : & 1361 & : & 1221 & : & 140 & : & 101 & : & 39 & : & 23 & : & 16 & : & 7 & : & 2 & : & 1
\end{array}$$

$$\frac{1361}{1221} \quad \frac{1221}{140} \quad \frac{1120}{101} \quad \frac{101}{39} \quad \frac{78}{23} \quad \frac{23}{16} \quad \frac{16}{7} \quad \frac{14}{2} \quad \frac{6}{1} \quad \frac{2}{0}.$$

Die durch Division gewonnenen Quotienten 1, 1, 8, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2 bilden die Nenner des Stufenbruches.

3. Wie heissen die Partial- oder Näherungswerthe von dem Bruche $\frac{108}{695}$?

**Auflösung.** Es sind erst wie in der vorigen Aufgabe die Nenner des Stufenbruches zu bilden:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 6 & & 2 & & 3 & & 2 & & 1 & & 4 & \\
695 & : & 108 & : & 47 & : & 14 & : & 5 & : & 4 & : & 1
\end{array}$$

$$\frac{648}{47} \quad \frac{94}{14} \quad \frac{42}{5} \quad \frac{10}{4} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{4}{0}.$$

Aus diesen Nennern 6, 2, 3, 2, 1, 4 des Stufenbruches lassen sich die Partialwerthe unmittelbar ableiten. Man setzt die Nenner über einen Bruchstrich und zwar den ersten auf die äusserste Linke, unter ihn einen Bruch, der zum Zähler die Einheit und zum Nenner ihn selber hat; über diesen Bruch hinaus links setzt man $\frac{0}{1}$; beide Brüche betrachtet man als gegebene Näherungswerthe, aus denen sich nach §. 192 die übrigen leicht entwickeln lassen. D. h.:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 6 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\
\hline
\frac{0}{1}, & \frac{1}{6}, & \frac{2}{13}, & \frac{7}{45}, & \frac{16}{103}, & \frac{23}{148}, & \frac{108}{695}.
\end{array}$$

## II. Aufgaben.

4. Wie heissen die gewöhnlichen Brüche von nachstehenden Kettenbrüchen:

I. $1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}}$.

II. $30 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$.

$$\text{III. } 2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{82+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}}}}}.$$

Antw. I. $\frac{803}{695}$. II. $\frac{1967}{65}$. III. $\frac{999701}{467711}$.

5. Verwandle nachstehende Brüche in Kettenbrüche:

I. $\frac{1878}{581}$. II. $\frac{1}{1,02764}$. III. $\frac{415}{723}$.

Antw. I. 3, 4, 3, 3, 2, 2, 2.
II. 0, 1, 36, 5, 1, 1, 2, 1, 17.
III. 0, 1, 1, 2, 1, 7, 4, 3.
} Nenner.

6. Wie ist der nachstehende Bruch:

$$\frac{(bcd+d+b)q+bc+1}{(abcd+cd+ad+ab+1)q+abc+c+a}$$

in einen Stufenbruch umzuwandeln?

$$\text{Antw. } \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{q}}}}}.$$

7. Wie heissen die Näherungswerthe von nachfolgenden Brüchen?

I. $\frac{361}{428}$. II. $\frac{105}{43}$. III. $\frac{20935}{86400}$. IV. 2,426. V. 34,0727.

Antw. I. 1, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{16}{19}$, $\frac{27}{32}$, $\frac{70}{83}$, $\frac{97}{115}$.

II. 2, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{7}$, $2\frac{4}{9}$, $2\frac{19}{43}$.

III. $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{29}$, $\frac{8}{33}$, $\frac{55}{227}$, $\frac{63}{260}$.

IV. 2, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{5}$, $2\frac{3}{7}$, $2\frac{23}{54}$.

V. 34, $\frac{1}{13}$, $34\frac{1}{14}$; $34\frac{4}{55}$...

Nachstehende Verhältnisse sind in möglichst kleinen Zahlen angenähert darzustellen:

8. 2 : 1,9129312.

Antw. 1 : 1, 22 : 21, 23 : 22, 758 : 725...

9. Das Verhältniss eines preussischen Fusses à 139,13 pariser Linien zu einem Meter à 443,296 pariser Linien.

Antw. 1 : 3, 5 : 16, 11 : 35, 16 : 51, 43 : 137, 145 : 462, 913 : 2909, 1058 : 3371...

10. Das Verhältniss eines bayerischen Fusses = 129,38 zu einem Meter.

Antw. 1 : 3, 2 : 7, 5 : 17, 7 : 24, 61 : 209...

11. Das Verhältniss einer württembergischen Elle à 272,288 pariser Linien zu einer bayerischen Elle = 369,272 pariser Linien.

Antw. 3 : 4, 14 : 19, 59 : 80, 73 : 99, 20426 : 27701...

12. Das Verhältniss einer bayerischen Elle = 833,011 Millimeter zu einer Wiener Elle = 779,9224 Millimeter.

Antw. 1 : 1, 15 : 14, 16 : 15, 47 : 44, 204 : 191.

13. Das Verhältniss eines preussischen Centners = 51448,21 Gramm zu einem österreichischen = 56001,22 Gramm.

Antw. 37 : 34, 86 : 79, 123 : 113, 5616 : 6113.

14. Das Verhältniss des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfang 1 : 3,1415926536.

Antw. Quotienten sind: 3, 7, 15, 1, 292; 1 : 3, 7 : 22, 106 : 333, 113 : 355. *

15. Das Verhältniss eines rheinpfälzischen Ohms = 100 Liter zu einem österreichischen Eimer (40 österreichische Mass) = 56,605 Liter.

Antw. 1 : 1, 2 : 1, 7 : 4, 23 : 13, 30 : 17, 53 : 30, 1514 : 857:

---

* Das vierte Verhältniss 113 : 355 = 0,318309859 unterscheidet sich vom gegebenen
1 : 3,1415926536 = 0,318309886 nur um
0,000000027.

16. Das Verhältniss des synodischen Mondsmonats = 29,530588 Tage zum tropischen Sonnenjahr = 365,2422 Tagen (Heis).

Antw. 1 : 12, 2 : 25, 3 : 37, 8 : 99, 11 : 136, 19 : 235.

17. Das Verhältniss eines preussischen Morgens = 2553,22 Quadratmeter zu einem österreichischen Joch = 5755,74 Quadratmeter.

Antw. 1 : 2, 3 : 7, 4 : 9, 55 : 124, 59 : 133, 232 : 523.

18. Das Verhältniss von einem Kilogramm ≐ 1000 Gramm zu einem preussischen Pfund = 467,7110 Gramm.

Antw. 2 : 1, 15 : 7, 62 : 29, 511 : 239, 2617 : 1224, 3128 : 1463 ...

19. Wie viel ist Quecksilber schwerer als Phosphor, wenn das specifische Gewicht des Quecksilbers 13,598 und des Phosphor 1,770 ist?

Antw. $7,\ 7\frac{2}{3},\ 7\frac{13}{19},\ 7\frac{15}{22},\ 7\frac{43}{63}$ mal ...

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, II. Theil, Seite 248—249; Heis §. 85.

---

## b. Aufsteigende Stufenbrüche.

### §. 198.

**Erklärung 1.** Der allgemeine Ausdruck eines aufsteigenden Stufenbruches ist:

$$\cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1}{d}}{c}}{b}}{a}$$

**Erklärung 2.** Da sich jeder aufsteigende Stufenbruch oder Theilbruchreihe (Heis) als eine Reihe von Brüchen darstellen lässt, von denen jeder folgende immer ein aliquoter Theil des zunächst vorangehenden ist und da alle zum Zähler die Einheit haben, so ist auch die Reihe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abcd}$$

als allgemeiner Ausdruck eines aufsteigenden Stufenbruches zu betrachten.

Bezeichnen wir in dieser Reihe den ersten Bruch mit A, den zweiten mit B, den dritten mit C, den vierten mit D..., so erhält obige Reihe die einfache Form:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}A + \frac{1}{c}B + \frac{1}{d}C + \frac{1}{e}D.$$

## §. 199.

### I. Beispiel.

1. Der Bruch $\frac{68}{149}$ soll in einen aufsteigenden Stufenbruch verwandelt werden.

**1. Auflösung.**

Es sei

$$\frac{68}{149} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abcd} \ldots,$$

so ist:

$$68a = 149 + \frac{149}{b} + \frac{149}{bc} + \frac{149}{bcd},$$

$$a = \frac{149}{68} + \left[\left(\frac{149}{b} + \frac{149}{bc} + \frac{149}{bcd}\right) : 68\right].$$

Nun ist:

$$\frac{149}{68} = 2 + \frac{13}{68};$$

es soll aber a eine ganze Zahl sein, desshalb muss der eingeklammerte Quotient plus $\frac{13}{68}$ wenigstens gleich der Einheit sein, so dass a wenigstens $2 + 1 = 3$ ist. Wenn aber $a = 3$, so ist $68a = 204$, folglich:

$$204 = 149 + \frac{149}{b} + \frac{149}{bc} + \frac{149}{bcd} \qquad a = 3.$$

$$55 = \frac{149}{b} + \frac{149}{bc} + \frac{149}{bcd}$$

$$55b = 149 + \frac{149}{c} + \frac{149}{cd}$$

$$b = \frac{149}{55} + \left[\left(\frac{149}{c} + \frac{149}{cd}\right) : 55\right] \qquad b = 3.$$

$$165 = 149 + \frac{149}{c} + \frac{149}{cd}$$

$$16c = 149 + \frac{149}{d} \text{ u. s. w.} \qquad c = 10.$$

$$11d = 149 \text{ u. s. w.} \qquad d = 13.$$

Demnach ist:

$$\frac{68}{149} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3.3.10} + \frac{1}{3.3.10.13}.$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}A + \frac{1}{10}B + \frac{1}{13}C.$$

$$= \frac{1}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{41}{90},\ \frac{267}{585}.$$

**2. Auflösung.** Leichter findet man die erforderlichen Quotienten auf folgende Weise:

```
            149 : 68 =  3 = a
            204
         149 : 55    =  3 = b
         165
      149 : 16       = 10 = c
      160
   149 : 11          = 13 = d
   143
 . . . 6             . . . . . .
```

### II. Aufgaben.

2. Wie heissen die Partialwerthe des aufsteigenden Stufenbruches

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abcd}?$$

Antw. $\frac{1}{a},\ \frac{b+1}{ab},\ \frac{bc+c+1}{abc},\ \frac{bcd+cd+d+1}{abcd}.$

3. Man soll den Bruch $\frac{529}{1139}$ in einen aufsteigenden Stufenbruch umwandeln und seine Partialwerthe bestimmen.

Antw. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{7}E + \frac{1}{5}F + \frac{1}{19}G + \frac{1}{57}H \ldots$

Die Näherungswerthe:

$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{16},\ \frac{22}{48},\ \frac{89}{192},\ \frac{624}{1344};$$

aus dem absteigenden Stufenbruch heissen die Näherungswerthe:

$$\frac{6}{13},\ \frac{7}{15},\ \frac{13}{28},\ \frac{98}{211},\ \frac{111}{239},\ \frac{209}{450},\ \frac{529}{1139} \ldots$$

4. Man soll den Bruch $\frac{89}{203}$ in einen aufsteigenden Stufenbruch umwandeln und seine Partialwerthe bestimmen.

Antw. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}A + \frac{1}{5}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{6}D + \frac{1}{3}E \ldots$

Die Partialwerthe sind:

$$\frac{1}{3},\ \frac{5}{12},\ \frac{13}{30},\ \frac{21}{48};$$

die Partialwerthe aus dem absteigenden Kettenbruche wären:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \frac{7}{16},\ \frac{25}{57}.$$

5. Das Verhältniss eines bayerischen Metzen = 1868,26 pariser Kubikzoll zu einem österreichischen Metzen = 3100 pariser Kubikzoll in einen aufsteigenden Stufenbruch zu verwandeln und seine Partialwerthe anzugeben.

Antw. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}A + \frac{1}{40}B + \frac{1}{16}C + \frac{1}{20}D + \frac{1}{18}E + \frac{1}{22}F \ldots$

Partialwerthe:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{241}{400},\ \frac{3857}{6400}.$$

6. Welche Brüche sind folgenden aufsteigenden Stufenbrüchen gleich?

I. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{3}D + \frac{1}{2} \ldots$ (Periode 2, 3, 2...)

II. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C \ldots$ (Periode 2, 3...)

III. $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}A + \frac{1}{m}B + \frac{1}{n}C + \frac{1}{m}D \ldots$ (Periode m, n...)

IV. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}A + \frac{1}{c}B + \frac{1}{d}C + \frac{1}{a}D \ldots$ (Periode a, b, c, d...)

Antw. I. $= \frac{9}{11}$, II. $= \frac{7}{9}$, III. $= \frac{m+1}{mn-1}$, IV. $= \frac{bcd+cd+d+1}{abcd-1}$.

7. Den Ueberschuss eines tropischen Jahres 5 St. 48 Min. 47,8 Sec. über 365 Tage in einen aufsteigenden Stufenbruch zu verwandeln (Heis).

Antw. $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}A + \frac{1}{18}B + \frac{1}{54}C + \frac{1}{80}D \ldots$

Anmerkung. Zur Uebung siehe Heis §. 86.

## §. 200.

# Anwendung der Stufenbrüche.

### 1. Beispiele.

1. Es ist mittelst eines Stufenbruches die diophantische Gleichung zu lösen:

$$27x = 8 + 10y.$$

**Auflösung.** Es ist aus 27 : 10 ein Stufenbruch zu entwickeln; der gibt:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{8}{3}, & \frac{27}{10}. \end{array}$$

Da nun

$$\frac{27}{10} - \frac{8}{3}$$

positiv ist, wie die Zahl 8 in der gegebenen Gleichung, so ist:

$$\begin{aligned} x &= 8.3 + 10n \text{ und } & y &= 8.8 + 27n \text{ cf. §. 140.} \\ &= 24 + 10n & &= 64 + 27n \\ &= 14 & &= 37 \\ &= 4 & &= 10. \end{aligned}$$

2. Auf gleiche Weise soll folgende Gleichung gelöst werden:

$$13x - 8y = 1.$$

**Auflösung.** Aus 13 : 8 erhält man:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{13}{8}, \end{array}$$

Da nun

$$\frac{13}{8} - \frac{5}{3}$$

negativ ist, während die Zahl 1 in der gegebenen Gleichung positiv ist, so ist:

$$\begin{aligned} x &= -1.3 + 8n \text{ und } & y &= -1.5 + 13n \\ &= -3 + 8n & &= -5 + 13n \\ &= 5 & &= 8. \end{aligned}$$

3. Aus 41 soll mit Hilfe eines Stufenbruches die Quadratwurzel gezogen werden.

**Auflösung.**

$$x = \sqrt{41} = 6 + \frac{\sqrt{41} - 6}{1} \left(= \frac{1}{a}\right)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5} = 2 + \frac{\sqrt{41} - 4}{5} \left(= \frac{1}{a_1}\right)$$

$$a_1 = \frac{5}{\sqrt{41} - 4} = \frac{\sqrt{41} + 4}{5} = 2 + \frac{\sqrt{41} - 6}{5} \left(= \frac{1}{a_2}\right)$$

$$a_2 = \frac{5}{\sqrt{41} - 6} = \frac{\sqrt{41} + 6}{1} = 12 + \frac{\sqrt{41} - 6}{1} \left(= \frac{1}{a_3}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5} = 2 + \frac{\sqrt{41} - 4}{5} \left(= \frac{1}{a_4}\right).$$

$$\sqrt{41} = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

Daraus erhält man folgende Partialwerthe:

$$\begin{array}{cccccc} 6 & 2 & 2 & 12 & 2 & 2 \\ \hline \frac{6}{1}, & \frac{13}{2}, & \frac{32}{5}, & \frac{397}{62}, & \frac{826}{129}, & \frac{2049}{320}. \end{array}$$

4. Der Brigg'sche Logarithmus von 180 ist durch einen Stufenbruch zu bestimmen.

**Auflösung.** Es sei x der gesuchte Logarithmus, so ist:

$$x = \log 180$$

und

$$10^x = 180,$$

folglich $x < 3$ und $> 2$, etwa

$$x = 2 + \frac{1}{x_1};$$

dann ist:

$$10^{2 + \frac{1}{x_1}} = 180$$

und

$$100 \,.\, 10^{\frac{1}{x_1}} = 180$$

ferner:

$$10^{\frac{1}{x_1}} = 1{,}8$$

$$10 = 1{,}8^{x_1},$$

folglich $x_1 < 4$ und $> 3$, etwa

$$x_1 = 3 + \frac{1}{x_2};$$

dann ist:

$$10 = 1{,}8^{3 + \frac{1}{x_2}}$$

$$10 = 5{,}832 \,.\, 1{,}8^{\frac{1}{x_2}}$$

$$\frac{10}{5{,}832} = 1{,}8^{\frac{1}{x_2}}$$

$$1{,}7146 = 1{,}8^{\frac{1}{x_2}}$$

$$1{,}7146^{x_2} = 1{,}8,$$

folglich $x_2 < 2$ und $> 1$, etwa

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}.$$

Dann ist:

$$1{,}7146^{1 + \frac{1}{x_3}} = 1{,}8$$

$$1{,}7146 \,.\, 1{,}7146^{\frac{1}{x_3}} = 1{,}8$$

$$1{,}7146^{\frac{1}{x_3}} = \frac{1{,}8}{1{,}7146} = 1{,}0498$$

$$1{,}7146 = 1{,}0498^{x_3},$$

folglich $x_3 < 12$ und $> 11$, etwa

$$x_3 = 11 + \frac{1}{x_4}.$$

Dann ist:

$$1{,}0498^{11 + \frac{1}{x_4}} = 1{,}7146$$

$$1{,}0498^{11} \,.\, 1{,}0498^{\frac{1}{x_4}} = 1{,}7146$$

$$1{,}0498^{\frac{1}{x_4}} = \frac{1{,}7146}{1{,}0498^{11}} = 1{,}0023$$

$$1{,}0498 = 1{,}0023^{x_4},$$

folglich $x_4 < 11$ und $> 10$, etwa

$$x_4 = 10 + \frac{1}{x_5} \dots$$

Demnach ist:

$$\log 180 = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{10}}}}.$$

Daraus die Partialwerthe:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 11 & 10 \\ \hline \frac{2}{1}, & \frac{7}{3}, & \frac{9}{4}, & \frac{106}{47}, & \frac{1069}{474}; \end{array}$$

also ist:

$$\log 180 = \frac{1069}{474} = 2{,}2552778$$

und log 180 nach den Tabellen

$$= 2{,}2552725$$

$$\text{Differenz} = 0{,}0000053.$$

5. $\sqrt{33}$ ist in einen aufsteigenden Stufenbruch umzuwandeln.

**Auflösung.**

$$\sqrt{33} = 5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abcd} + \dots$$

$$33 = 25 + \frac{10}{a}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} + \dots\right) + \frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} + \dots\right)^2,$$

$$8a = 10 + 10\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{bc} + \dots\right) + \frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} + \dots\right)^2,$$

$$a = 2$$

$$6 = 10\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{bc} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} + \dots\right)^2$$

$$12 = 20\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{bc} + \dots\right) + 1 + 2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{bc} + \dots\right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{bc} + \dots\right)^2$$

$$11b = 22 + 22\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{cd} + \dots\right) + \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{cd} + \dots\right)^2$$

$$b = 3$$

$$11 = 22\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{cd} + \dots\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{cd} + \dots\right)^2$$

$$11c = 22 + 22\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{de} + \ldots\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{cd} + \ldots\right)^2$$

$$32c = 66 + 66\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{de} + \ldots\right) + \frac{1}{c}\left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{de} + \ldots\right)^2$$

$$c = 3\ldots$$

## II. Aufgaben.

6. Die nachfolgenden diophantischen Gleichungen sind mittelst Stufenbrüche aufzulösen:

a) $162x - 47y = 42$;
b) $68x - 157y = -110$;
c) $33x - 302 = 28y$;
d) $18x = 68 + 13y$.

Antw. a) $x = 2 + 47n$ und $y = 6 + 162n$,
b) $x = 3 + 157n$ und $y = 2 + 68n$,
c) $x = 10 + 28n$ und $y = 1 + 33n$,
d) $x = 11 + 13n$ und $y = 10 + 18n$.

7. $\sqrt{22}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{39}$, $\sqrt{61}$ sind in Stufenbrüche umzuwandeln und deren Partialwerthe zu bestimmen.

Antw. $\sqrt{22} = 5,\ 4\frac{2}{3},\ 4\frac{5}{7},\ 4\frac{12}{17},\ 4\frac{29}{41}\ldots$

$\sqrt{14} = 3,\ 4,\ 3\frac{2}{3},\ 3\frac{3}{4},\ 3\frac{8}{11},\ 3\frac{11}{15}\ldots$

$\sqrt{39} = 6,\ 6\frac{1}{4},\ 6\frac{6}{25},\ 6\frac{25}{104},\ 6\frac{156}{649}\ldots$

$\sqrt{61} = 7,\ 8,\ 7\frac{4}{5},\ 7\frac{5}{6},\ 7\frac{24}{29},\ 7\frac{29}{36}\ldots$

8. $\sqrt{a^2 + 1}$ ist in einen Stufenbruch zu verwandeln.

Antw. $$\sqrt{a^2 + 1} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a}}}.$$

9. Für die Zahl 54321 ist der Brigg'sche Logarithmus durch einen Stufenbruch aufzufinden.

Antw. $4,\ 5,\ 4\frac{2}{3},\ 4\frac{3}{4},\ 4\frac{11}{15},\ 4\frac{25}{34},\ 4\frac{61}{83},\ 4\frac{269}{366}\ldots$

10. Die Wurzeln $\sqrt{53}$, $\sqrt{33}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$ sind in aufsteigende Stufenbrüche oder Theilbruchreihen zu verwandeln.

Antw. $\sqrt{53} = 7 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}A + \frac{1}{12}B + \frac{1}{14}C + \frac{1}{217}D \ldots$

$$\sqrt{33} = 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{27}D \ldots$$

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}A + \frac{1}{16}B + \frac{1}{18}C \ldots$$

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}A + \frac{1}{16}B + \frac{1}{18}C + \frac{1}{143}D \ldots$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}A + \frac{1}{19}B + \frac{1}{19}C \ldots$$

Anmerkung. cf. Heis §. 87.

# Fünfter Abschnitt.

# Combinationslehre, Wahrscheinlichkeitsrechnung, binomischer Lehrsatz, arithmetische Reihen höherer Ordnung.

---

## I. Combinationslehre.

### §. 201.

**Erklärung 1.** Die Combinationslehre oder Syntactik stellt die verschiedenen Gesetze auf, nach welchen man mit gegebenen Dingen verschiedenartige Verbindungen vornehmen kann.

Die gegebenen Dinge, welche nach gewissen Gesetzen verschiedenartig verbunden werden können, heissen Elemente und werden mit a, b, c, d ... oder mit 1, 2, 3, 4, ... bezeichnet. Elemente kommen nur nach ihrer Stellung zu einander in Betracht; ihre natürliche Stellung zu einander (a, b, c, d) heisst Zeiger oder Index und je nach ihrer Stellung im Index werden die Elemente als niedere und höhere unterschieden: c hat einen höhern Rang als b und d einen höhern als c.

**Erklärung 2.** Verbindungen aus mehreren oder auch aus allen Elementen eines gegebenen Index heissen Complexionen. Je nach der Stellung ihrer Elemente unterscheidet man höhere und niedere Complexionen: die Complexion (acb) ist höher als

die Complexion (a b c), weil in jener das höhere Element c an einer frühern Stelle erscheint als in dieser.

Folgen die Complexionen so auf einander, dass immer die nächst höhere an die nächst niedere sich reiht, so heissen sie geordnet, und so lange Complexionen dasselbe Anfangselement haben, gehören sie zu derselben Ordnung.

Ordnungen von gleich viel Elementen bilden eine Klasse.

Die Elemente können nach drei verschiedenen Gesetzen mit einander verbunden werden: Permutation, Combination (im engeren Sinne) und Variation.

---

# a. Permutation.

§. 202.

**Erklärung 1.** Die Permutation lehrt eine gegebene Menge von Elementen, so oft als möglich, in einer andern Ordnung zu neuen Complexionen zusammenstellen.

Die neuen Complexionen heissen Permutationsformen. Diese werden unterschieden als Permutationen ohne und mit Wiederholung, je nachdem die gegebenen Elemente alle verschieden oder nur theilweise verschieden sind.

Der allgemeine Ausdruck für dieses Verfahren ist:

Perm. (a b c d . . .).

Es sei m die Anzahl der gegebenen Elemente, so ist der allgemeine Ausdruck für die Anzahl aller möglichen Permutationen:

P (m).

**Erklärung 2.** Um aus einem gegebenen Index alle möglichen Permutationen in richtiger Aufeinanderfolge zu entwickeln, hat man, von rechts nach links vorwärts gehend, immer das höhere Element an die Stelle des nächst niedern zu setzen und dieser Versetzung die davon unberührten Elemente unverändert beizufügen. Damit wird so lange fortgefahren, bis man auf eine Permutation stösst, in welcher die Elemente in umgekehrter Ordnung wie im Index stehen. Z. B.:

Perm. (a b) =

I. II. Ordnung

a b b a $= 1 . 2 . = 2 = P(2)$

Perm. (a b c) =

| I. | II. | III. Ordnung | |
|---|---|---|---|
| a b c | b a c | c a b | = 1 . 2 . 3 = 6 = P (6). |
| a c b | b c a | c b a | |

Perm. (a b c d) =

| I. | II. | III. | IV. Ordnung | |
|---|---|---|---|---|
| a b c d | b a c d | c a b d | d a b c | = 1 . 2 . 3 . 4 . = 24 = P (24). |
| a b d c | b a d c | c a d b | d a c b | |
| a c b d | b c a d | c b a d | d b a c | |
| a c d b | b c d a | c b d a | d b c a | |
| a d b c | b d a c | c d a b | d c a b | |
| a d c b | b d c a | c d b a | d c b a | |

Perm. (a a b) =

| I. | II. Ordnung | |
|---|---|---|
| a a b | b a a | $= \frac{1 . 2 . 3}{1 . 2} = 3 = P (3).$ |
| a b a | | |

**Erklärung 3.** Aus den vorangehenden Beispielen ist ersichtlich, die Anzahl aller Permutationen eines gegebenen Index ist ein Product, das zu seinen Factoren Glieder einer arithmetischen Reihe hat, deren Differenz und erstes Glied die Einheit ist. Dieses Product selbst heisst Factorielle.

## §. 203.

**Lehrsatz 1.** Bei m verschiedenen Elementen ist die Anzahl aller Permutationen gleich der $m^{ten}$ Factoriellen von eins.

$$P (m) = m !\ *$$

**Beweis.**

Denn es ist:

$$P (1) = 1 . \qquad = 1!$$
$$P (2) = 1 . 2 . \qquad = 2!$$
$$P (3) = 1 . 2 . 3 \qquad = 3!$$
$$P (4) = 1 . 2 . 3 . 4 \qquad = 4!$$
$$P (m) = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . (m - 2) . (m - 1) . m = m!$$

* m! Ausdruck für die $m^{te}$ Factorielle von 1 nach Kramp.

**Lehrsatz 2.** Befinden sich unter den m gegebenen Elementen p gleiche, so ist die Anzahl aller Permutationen gleich der $m^{ten}$ Factoriellen von eins dividirt durch die $p^{te}$ Factorielle von eins.

$$\frac{P(m)}{P(p)} = \frac{m!}{p!}$$

**Beweis.**

1 Element ist in diesem Falle unmöglich.

2 " " " " " $= \frac{1.2}{1.2} = 1!$

3 " mit 2 gleichen $= \frac{1.2.3}{1.2} = \frac{3!}{2!}$

4 " " 3 " $= \frac{1.2.3.4}{1.2.3} = \frac{4!}{3!}$

m " " p " $= \frac{1.2.3\ldots(m-2).(m-1).m}{1.2\ldots(p-1).p} = \frac{m!}{p!}$.

Oder:

Wären die m Elemente alle verschieden, so wäre nach §. 203, 1

$$P(m) = m!$$

Es befindet sich aber unter dieser Anzahl von Permutationen eine andere

$$P(p) = p! \quad §. 203, 1,$$

welche jene in ihren Umfang durch sich selbst beschränkt; darum ist

$$\frac{P(m)}{P(p)} = \frac{m!}{p!}.$$

**Zusatz.** Befinden sich unter den m gegebenen Elementen p gleiche einer Art und r gleiche einer andern, so ist die Anzahl aller Permutationen gleich der $m^{ten}$ Factoriellen von eins dividirt durch das Product der $p^{ten}$ und $r^{ten}$ Factoriellen von eins.

$$\frac{P(m)}{P(p).P(r)} = \frac{m!}{p!\ r!}.$$

## §. 204.

### 1. Beispiele.

1. Wie oft lassen sich aus den Wörtern:

„duodecim signa zodiaca“

die Buchstaben permutiren?

**Auflösung.** Damit sind 20 Elemente gegeben, darunter befinden sich aber 5 Wiederholungen verschiedener Art:

$$aaa = a^3,\ c^2,\ d^3,\ i^3,\ o^2,$$

wie aus der Anordnung der Elemente

a a a c c d d d e g i i i m n o o s u z

zu ersehen ist, folglich ist:

$$P(20) = \frac{20!}{3!\ 2!\ 3!\ 3!\ 2!} = \frac{2432902008176640000}{864}$$

$$= 2815858805760000 \text{ Perm.}$$

2. Wie oft lassen sich die Wörter der nachstehenden Hexameter:

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces

permutiren?

**Auflösung.** Damit sind 13 Elemente ohne Wiederholung gegeben, folglich:

$$P(13) = 13! = 6227020800 \text{ Perm.}$$

3. Wie oft hat man die Complexion c d e i s u zu permutiren, um den Namen des römischen Consuls Decius zu erhalten, der 340 im ersten samnitischen Kriege den Heldentod starb?

**Auflösung.** Man hat festzustellen, wie viele Permutationen des Index c d e i s u der Permutation vorangehen, die den Namen Decius gibt; es sind hier 145, folglich ist die 146. die gesuchte, wie im nachstehenden dargethan ist:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D | des Index | c d e i s u | gibt | 1 . 5 ! = | 120 | Perm. |
| e | „ „ | c e i s u | „ | 1 . 4 ! = | 24 | „ |
| c | „ „ | c i s u | „ | 0 . 3 ! = | 0 | „ |
| i | „ „ | i s u | „ | 0 . 2 ! = | 0 | „ |
| u | „ „ | s u | „ | 1 . 1 ! = | 1 | „ |
| s | „ „ | s | „ | 0 . 0 ! = | 0 | „ |
| Decius | | | | = | 145 + 1 | Perm. |

4. Wie heisst die 6008. Permutation der Complexion

a d e i n r s u?

**Auflösung.** Man dividirt 6008 — 1 (cf. vorig. Beisp.) mit der Anzahl der Permutationen aller Ordnungen ausser derjenigen, in welcher sich der erste Buchstabe des gesuchten Wortes als Ordnungsbuchstabe befindet, der Quotient und +1 bezeichnet

diese Ordnung; mit jedem wiederkehrenden Reste verfährt man ebenso, nachdem man zuvor jeden gefundenen Buchstaben aus dem Index entfernt hat. Es ist also:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6007 : 7! = 1 | und | 1 + 1 = d in adeinrsu |
| | 5040 | | |
| | 967 : 6! = 1 | „ | 1 + 1 = e in aeinrsu |
| | 720 | | |
| | 247 : 5! = 2 | „ | 2 + 1 = n in ainrsu |
| | 240 | | |
| | 7 : 4! = 0 | „ | 0 + 1 = a in airsu. |
| | 0 | | |
| | 7 : 3! = 1 | „ | 1 + 1 = r in irsu |
| | 6 | | |
| | 1 : 2! = 0 | „ | 0 + 1 = i in isu |
| | 0 | | |
| | 1 : 1! = 1 | „ | 1 + 1 = u in su |
| | 1 | | |
| | 0 : 0! = 0 | „ | 0 + 1 = s in s |
| also | 6007 + 1 Permutation | | = denarius. |

5. Die wie vielste Permutation der Complexion aaeilnprst gibt den Namen des grossen kirchlichen Tondichters Palestrina († 1594)?

**Auflösung** cf. 3. Beispiel.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | des Index | $a^2eilnprst$ | gibt | $\frac{6.9!}{2!}$ = | 1088640 | Perm. |
| a | „ | „ $a^2eilnrst$ | „ | 0.8! = | 0 | „ |
| l | „ | „ aeilnrst | „ | 3.7! = | 15120 | „ |
| e | „ | „ aeinrst | „ | 1.6! = | 720 | „ |
| s | „ | „ ainrst | „ | 4.5! = | 480 | „ |
| t | „ | „ ainrt | „ | 4.4! = | 96 | „ |
| r | „ | „ ainr | „ | 3.3! = | 18 | „ |
| i | „ | „ ain | „ | 1.2! = | 2 | „ |
| n | „ | „ an | „ | 1.1! = | 1 | „ |
| a | „ | „ a | „ | 0.0! = | 0 | „ |
| Palestrina | | | | = | 1105077+1 | Perm. |

## II. Aufgaben.

6. Wie viel Permutationen gibt die Complexion a b c d e f?

Antw. 720.

7. Wie oft lassen sich die Buchstaben von Magdala permutiren?

Antw. 840.

8. Wie viel Permutationen gibt das griechische Alphabet?

Antw. 620448401733239439360000.

9. Wie viel Permutationen geben die Complexionen

$a^2 b^2 c$, $a^3 b^2 c^3$, $a^5 b c^2 d^3$, $a^3 b^2 c^3 d^2 e$?

Antw. I. 30, II. 560, III. 27720, IV. 277200.

10. Gegeben ist die Complexion $a^3 b^2 c$; wie viel Permutationen fangen mit $a^3$, mit $b^2$ und mit c und b an und wie viel schliessen mit $a^2$?

Antw. I. 3, II. 4, III. 10, IV. 16, V. 9.

11. Wie heissen die Anagramme der 8., 10., 15. und 24. Permutation des Wortes Amor?

Ant. I. Maro, II. mora, III. Omar, IV. Roma.

12. Wie oft hat man die Wörter des Hexameters

„infandum regina jubes renovare dolorem (Virg.)

zu permutiren, um wieder einen Hexameter zu bekommen?

Antw. 14. Perm.

13. Wie heisst die 109. Permutation der Complexion $a^3 e m^3$?

Antw. Mammaea (Mutter des Kais. Alex. Severus).

14. Die wie vielste Permutation ist k h l o i g der Complexion g h i k l o?

Antw. 402.

15. Wie heisst die 95168. Permutation der Complexion a c d e i l n o u?

Antw. Deucalion (Sohn des Prometheus).

16. Ein Distichon von J. a Lasco heisst:

„Aspice! nam raro mittit timor arma, nec ipsa,
Si se mente reget, non tegeret Nemesis“; *

wie oft hat man die Buchstaben des Hexameters und Penta-

* Das Distichon ist mitgetheilt von Heis.

meters zu permutiren, damit beide zusammen wieder das nämliche Distichon geben?

Antw. Hexameter:
1033314762747033692966665133752320000000

Pentameter:
822283838447792281772556288000000.

17. Wie oft hat man die sämmtlichen Wörter des nachfolgenden Doppeldistichon zu permutiren, um wieder ein Doppeldistichon zu bekommen, aber mit ganz entgegengesetztem Sinne?

„Vaticinor tibi, quod terrestris laurea cinget
Tempora, nec magnas spes mare destituet,
Gens tua dejiciet Russos, nec Gallica virtus
Denique frangetur robur ad Arminium.“ *

Antw. 3102242008666197196800000.

Anmerkung. Zur Uebung cf. Hofmann, III. Theil, S. 226—228; Heis §. 88 und §. 90, 1—7.

---

## b. Combination.

### §. 205.

**Erklärung 1.** Die Combination lehrt, eine gegebene Menge von Elementen, so oft als möglich, in Gruppen von 2, 3, 4... Elementen ohne Rücksicht auf ihren Rang zu neuen Complexionen zusammenstellen.

Die neuen Complexionen heissen Combinationsformen. Combinationen mit gleich viel Elementen bilden eine Klasse; die Combinationen der ersten Klasse heissen Unionen, die der zweiten Binionen (Amben), die der dritten Ternionen (Ternen), die der vierten Quaternionen (Quaternen)...; soviel Elemente im Index, so viel Klassen, aber nur wo es sich um Combinationsformen ohne Wiederholung handelt.

Auch hier ist der Unterschied zu machen zwischen Combinationen mit und ohne Wiederholung; bei diesen darf ein Element nur einmal in einer Form erscheinen, bei jenen beliebig oft. Combinationen mit Wiederholung sind desshalb unbegrenzt.

* Vor der Niederlage Napoleons I. in Russland.

Der allgemeine Ausdruck für diese Operation ist:

Comb. (a b c d . . .)

Es sei k das Zeichen der Klasse und r das Zeichen der Wiederholung (repetitio), so sind die allgemeinen Ausdrücke für alle möglichen Combinationen:

I. ohne Wiederholung $C_k$ (m), II. mit Wiederholung $\overset{r}{C_k}$ (m).

**Erklärung 2.** Um aus einem gegebenen Index, der die I. Klasse bildet, die Combinationen der II. Klasse abzuleiten, hat man mit dem 1. Element das 2., 3., 4. . . . . $m^{te}$ zu verbinden und mit dem 2. Element das 3., 4. . . ., $m^{te}$ . . . und mit dem (m — 1) Element das $m^{te}$; um die Combinationen der III., IV. . . (m — 1) und $m^{te}$ Klasse zu bestimmen, verfährt man ebenso, indem man immer mit der nächst vorhergehenden Klasse combinirt.

Wenn man aber an die vorausgehende Klasse das 1. Element von der 1. Ordnung an, das 2. von der 2., das 3. von der 3., das $m^{te}$ von der $m^{ten}$ Ordnung an beifügt, erhält man Combinationen mit Wiederholungen. Z. B.:

Comb. (a b c d e f) =

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underset{1}{\text{Comb.}}$ (a b c d e f) = a | b | c | d | e | f | = 6 Comb. u. 6 Ord. |
| $\underset{2}{\text{Comb.}}$ (a b c d e f) = a b | a c | a d | a e | a f | | = 5 Comb. der 1. Ord. |
| | b c | b d | b e | b f | | = 4 „ „ 2. „ |
| | | c d | c e | c f | | = 3 „ „ 3. „ |
| | | | d e | d f | | = 2 „ „ 4. „ |
| | | | | e f | | = 1 „ „ 5. „ |

Summa aller Combinationen der II. Klasse = 15.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\underset{3}{\text{Comb.}}$ (a b c d e f) = a b c | a b d | a b e | a b f | = 10 Comb. der 1. Ord. |
| | a c d | a c e | a c f | |
| | a d e | a d f | | |
| | a e f | | | |
| | b c d | b c e | b c f | = 6 Comb. der 2. Ord. |
| | b d e | b d f | | |
| | b e f | | | |
| | c d e | c d f | | = 3 Comb. der 3. Ord. |
| | c e f | | | |
| | d e f | | | = 1 Comb. der 4. Ord. |

Summa aller Combinationen der III. Klasse = 20.

$\underset{4}{\text{Comb.}}$ (abcdef) = abcd abce abcf abde abdf abef
acde acdf acef
adef = 10 Comb. d. 1. Ord.

bcde bcdf bcef
bdef = 4 Comb. d. 2. Ord.

cdef = 1 Comb. d. 3. Ord.

---

Summa aller Combinationen der IV. Klasse = 15.

$\underset{5}{\text{Comb.}}$ (a b c d e f) = a b c d e a b c d f a b c e f a b d e f
a c d e f = 5 Comb. d. 1. Ord.

b c d e f = 1 Comb. d 2. Ord.

---

Summa aller Combinationen der V. Klasse = 6.

$\underset{6}{\text{Comb.}}$ (a b c d e f) = a b c d e f „ VI. „ = 6.

$\overset{r}{\underset{k}{\text{Comb.}}}$ (a b c) =

---

$\overset{r}{\underset{1}{\text{Comb.}}}$ (a b c) = a b c = 3 Ordnungen.

---

$\overset{r}{\underset{2}{\text{Comb.}}}$ (a b c) = a a a b a c = 1. Ordnung.

b b b c = 2. Ordnnng.

c c = 3. Ordnung.

---

$\overset{r}{\underset{3}{\text{Comb.}}}$ (a b c) = a a a a a b a a c
a b b a b c
a c c = 1. Ordnung.

b b b b b c
b c c = 2. Ordnung.

c c c = 3. Ordnung.

---

$\overset{r}{\underset{4}{\text{Comb.}}}$ (a b c) = a a a a a a a b a a a c
a a b b a a b c
a a c c
a b b b a b b c
a b c c
a c c c = 1. Ordnung.

b b b b b b b c
b b c c
b c c c = 2. Ordnung.

c c c c = 3. Ordnung.

. . . . . .

## §. 206.

**Lehrsatz 1.** Bei m Elementen ist die Anzahl aller Combinationen der $k^{ten}$ Klasse ohne Wiederholung gleich der $k^{ten}$ getheilten fallenden Factoriellen von m.

$$C_k(m) = \binom{m}{k}.$$

### Beweis.

Denn ein Element gibt eine Union, folglich m Elemente m Unionen. mithin:

$$C_1(m) = m \text{ Unionen}$$

und

$$m.(m-1) \text{ wären } m.(m-1) \text{ Binionen,}$$

wobei aber jede Union zweimal als Permutation aufträte, was bei der Combination unmöglich ist; mithin ist:

$$C_2(m) = \frac{m(m-1)}{1.2};$$

ebenso:

$$C_3(m) = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},$$

und

$$C_4(m) = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4},$$

endlich

$$C_k(m) = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots[m-(k-1)]}{1.2.3.4\ldots k} = \binom{m}{k}.$$

Anmerkung. Im Ausdruck $\binom{m}{k}$ ist m Basis und k Zeiger; derselbe wird gelesen; m mit dem Zeiger k oder m über k (Euler); Hofmann e. a. schreiben diesen Quotienten $^{m}k$.

**Lehrsatz 2.** Bei m Elementen ist die Anzahl aller Combinationen der $k^{ten}$ Klasse mit Wiederholung gleich der $k^{ten}$ getheilten steigenden Factoriellen von m.

$$\overset{r}{C}_k(m) = \binom{m+k-1}{k}.$$

### Beweis.

Denn jedes Element mit allen und noch einmal mit sich selbst verbunden wäre $= m.(m+1)$ Binionen, wobei aber jede Binion zweimal aufträte, was nicht sein darf. Mithin ist:

$$\overset{r}{C}_2(m) = \frac{m.(m+1)}{1.2},$$

ebenso

$$\overset{r}{C}_3(m) = \frac{m.(m+1).(m+2)}{1.2.3},$$

und

$$\overset{r}{C}_4(m) = \frac{m.(m+1).(m+2).(m+3)}{1.2.3.4},$$

endlich

$$\overset{r}{C}_k(m) = \frac{m.(m+1).(m+2).(m+3)\ldots[m+(k-1)]}{1.2.3.4\ldots k} = \binom{m+k-1}{k}.$$

## §. 207.

### I. Beispiele.

1. Wie oft lässt sich die Zahl 6 in Summen mit ganzen Summanden zerfällen?

**Auflösung.**

I. 6; II. 15, 24, 33; III. 114, 123, 222; IV. 1113, 1122; V. 11112; VI. 111111.

2. Wie viel Diagonalen sind in einem n Eck möglich?

**Auflösung.** Die Summa aller Linien des n Eckes ist

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots 2+1 = \frac{n(n-1)}{1.2}.$$

Unter diesen Linien befinden sich aber auch noch die n Seiten des n Eckes selbst, folglich sind die möglichen Diagonalen

$$= \frac{n(n-1)}{1.2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{1.2} = \frac{n^2-3n}{1.2} = \frac{n(n-3)}{1.2}.$$

### II. Aufgaben.

3. Wie viel Amben sind in 30 Nummern enthalten?

Antw. 435.

4. Wie viel Combinationen geben die Buchstaben des Alphabets von a bis l (incl.) in der 5. Klasse, wie viel von a bis m in der 6., wie viel von a bis r in der 7., und wie viel von a bis u in der 9. Klasse.

Antw. I. 462, II. 924, III. 19448, IV. 167960.

5. Wie viel Combinationen sind:

$C_4(n)$, $\overset{r}{C}_4(n)$, $C_5(m)$, $\overset{r}{C}_5(m)$.

Antw. I. $\binom{n}{4}$ oder $n_4$, II. $\binom{n+3}{4}$ oder $(n+3)_4$, III. $\binom{m}{5}$ oder $m_5$, IV. $\binom{m+4}{5}$ oder $(m+4)_5$.

6. Wie viel Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen lassen sich aus den Zahlen 42, 54, 100, 140 von 1 an bilden?

Antw. $\binom{m}{2}$ = 861, 1431, 4950, 9730.

$\binom{m}{3}$ = 11480, 24804, 161700, 447580.

$\binom{m}{4}$ = 111930, 316251, 3896975, 15329615.

$\binom{m}{5}$ = 850668, 3162510, 74821920, 416965528.

7. Die gewöhnliche Zahlenlotterie enthielt 90 Nummern; wie viel Ternen und Quaternen; wie viel Unionen (Auszüge) Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen wurden bei einem Zuge mit 5 Nummern gezogen?

Antw. I. Ternen 117480, Quaternen 2555190.

II. Auszüge 5, Amben 10, Ternen 10, Quaternen 5, Quinternen 1.

8. Wie oft lassen sich 11 Elemente zu 4 mit Wiederholung combiniren?

Antw. 1001.

9. Die wie vielte Combination der dritten Klasse ohne Wiederholung aus der Complexion a b c d e f g ist a d e, b e g, d e g?

Antw. 10, 24, 32.

10. Wie heissen die Combinationen der Summa 7 mit Wiederholung in der fünften Klasse?

Antw. 11113 und 11112.

11. Wie viele dreizifferige, sechszifferige Zahlen gibt es, deren Ziffern alle von einander verschieden sind?

Antw. I. 648, II. 136080.

12. Wie viele Zahlen, welche nicht mehr als 5 Ziffern enthalten, lassen sich aus 3 Ziffern bilden?

Antw. 363.

13. Wie viel verschiedene Verbindungslinien lassen sich zwischen p Punkten, wie viel zwischen 14 Punkten ziehen?

Antw. k $\frac{p(p-1)}{1.2}$, II. 91.

14. Wie viel Diagonalen sind in einem Achtzehneck möglich?

Antw. 135.

15. Wie oft lässt sich ein Product aus p q Factoren in Producte mit p Factoren verwandeln?

Antw. $\frac{(p\,q)!}{q!\,(p!)^q}$.

16. Wie oft lässt sich das Product 3 mal 4 in Producte von je 3 Factoren zerlegen?

Antw. 15400.

17. Auf wie vielerlei Arten können k Karten unter 4 Spieler so vertheilt werden, dass der erste m, der zweite n, der dritte r Karten erhält?

Antw. $\binom{k}{m} \cdot \binom{k-m}{n} \cdot \binom{k-m-n}{r}$.

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 228—230; Heis §. 89, 1—14; §. 90, 8—20.

---

# c. Variationen.

## §. 208.

**Erklärung 1.** In der Variation ist die Permutation und Combination mit einander verbunden.

Die Variation lehrt demnach eine gegebene Anzahl Elemente, so oft als möglich, in andere Gruppen und diese Gruppen in andere Ordnungen zu neuen Complexionen zusammenstellen.

Die neuen Complexionen heissen Variationsformen. Auch hier unterscheidet man Variationen mit und ohne Wiederholungen und unter diesen verschiedene Klassen; Variationen mit Wiederholungen sind unbegrenzt.

Der allgemeine Ausdruck für diese Operation ist:

$$\text{Var.}\ (a\,b\,c\,d\ldots).$$

Ist auch hier k das Zeichen der Klasse und r das Zeichen der Repetition, so sind die zwei Ausdrücke für alle möglichen Variationen:

$$\text{I. } V_k(m). \quad \text{II. } \overset{r}{V}_k(m).$$

**Erklärung 2.** Um aus einem gegebenen Index, der die erste Klasse bildet, alle möglichen Klassen abzuleiten, hat man jede Variationsform der vorangehenden Klasse mit denjenigen Elementen zu verbinden, welche sie noch nicht enthält.

Verbindet man aber jede Form der vorangehenden Klasse ausnahmslos mit jedem Elemente, so erhält man Variationen mit Wiederholungen. Z. B:

$$\text{Var.}\ (a\,b\,c\,d) =$$

$$\underset{1}{\text{Var.}}\ (a\,b\,c\,d) = a \quad b \quad c \quad d$$

$\underset{2}{\text{Var.}}\ (a\,b\,c\,d) =$

| | | |
|---|---|---|
| ab | ac | ad |
| ba | bc | bd |
| ca | cb | cd |
| da | db | dc |

$\underset{3}{\text{Var.}}\ (a\,b\,c\,d) =$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| abc | abd | acb | acd | adb | adc |
| bac | bad | bca | bcd | bda | bdc |
| cab | cad | cba | cbd | cda | cdb |
| dab | dac | dba | dbc | dca | dcb |

$\underset{4}{\text{Var.}}\ (a\,b\,c\,d) =$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| abcd | abdc | acbd | acdb | adbc | adcb |
| bacd | badc | bcad | bcda | bdac | bdca |
| cabd | cadb | cbad | cbda | cdab | cdba |
| dabc | dacb | dbac | dbca | dcab | dcba |

$$\overset{r}{\text{Var.}}\ (a\,b) =$$

$$\underset{1}{\text{Var.}}\ (a\,b) = a \quad b \quad (a + b \text{ Unionen}).$$

$$\underset{2}{\text{Var.}}\ (a\,b) = \left.\begin{matrix} aa & ab \\ ba & bb \end{matrix}\right\} = (a^2 + 2\,a\,b + b^2 \text{ Binionen}).$$

$$\underset{3}{\text{Var.}}\ (a\,b) = \left.\begin{matrix} aaa & aab \\ aba & abb \\ baa & bab \\ bba & bbb \end{matrix}\right\} = (a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 \text{ Ternionen}).$$

$$\overset{}{\underset{4}{\text{Var.}}}(a\,b) = \left.\begin{array}{ll} a\,a\,a\,a & a\,a\,a\,b \\ a\,a\,b\,a & a\,a\,b\,b \\ a\,b\,a\,a & a\,b\,a\,b \\ a\,b\,b\,a & a\,b\,b\,b \\ b\,a\,a\,a & b\,a\,a\,b \\ b\,a\,b\,a & b\,a\,b\,b \\ b\,b\,a\,a & b\,b\,a\,b \\ b\,b\,b\,a & b\,b\,b\,b \end{array}\right\} = (a^4 + 4\,a^3 b + 6\,a^2 b^2 + 4\,a b^3 + b^4 \text{ Quatern.})$$

---

$$\underset{5}{\text{Var.}}(a\,b) = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Anmerkung. Die Coëfficienten 2, 3, 4, 6 bestimmen die vorzunehmenden Permutationen.

## §. 209.

**Lehrsatz 1.** Bei m Elementen ist die Anzahl aller Variationen der $k^{ten}$ Klasse ohne Wiederholung gleich der $k^{ten}$ ungetheilten fallenden Factoriellen von m.

$$V_k(m) = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-k+1) = C_k(m)\,.\,P\,(k).$$

### Beweis.

Da die Variation eine Verbindung der Combination und Permutation ist, so ist die Anzahl aller Combinationen von m Elementen in der $k^{ten}$ Klasse nach §. 206:

$$C_k(m) = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots[m-(k-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,k},$$

und da diese Anzahl der Combinationen offenbar $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots k$ Permutationen zulässt, so ist:

$$V_k(m) = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots[m-(k-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots k}\,.\,(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots k)$$

$$= m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots(m-k+1) = C_k(m)\,.\,P\,(k).$$

**Lehrsatz 2.** Bei m Elementen ist die Anzahl aller Variationen der $k^{ten}$ Klasse mit Wiederholung gleich der $k^{ten}$ Potenz von m.

$$\overset{r}{V}_k(m) = m^k.$$

### Beweis.

Denn m Elemente geben in der

$$\overset{r}{V}_1(m) = m \text{ Variationen, in der}$$

$$\overset{r}{V}_2(m) = m\,m = m^2\text{, in der}$$

$$\overset{r}{V}_3(m) = m\,m\,m = m^3\text{, in der} \ldots$$

$$\overset{r}{V}_k(m) \qquad = m^k\text{, cf. §. 208, 2. Beispiel.}$$

**Zusatz.** Das Variiren mit Wiederholungen ist dem Potenziren gleich.

## §. 210.

### 1. Beispiele.

1. Wie oft lässt sich die Zahl 4 durch die Ziffern 0, 1, 2, 3 mit Wiederholung in der dritten Klasse in Summen mit ganzen Zahlen ausdrücken?

   **Auflösung.** 004, 013, 022, 031, 040, 103, 112, 121, 130, 202, 211, 220, 301, 310, 400 = 15mal.

2. Wie viel verschiedene Würfe sind mit 4 Würfeln möglich?

   **Auflösung.** Die 6 Flächen eines Würfels sind als die 6 gegebenen Elemente zu betrachten, die 4 Würfel weisen auf die vierte Klasse und da ein Würfel die Augen hat, wie der andere, so ist Wiederholung gegeben, folglich ist:

$$\overset{r}{V}_4(6) = 6^4 = 1296 \text{ Würfe.}$$

### II. Aufgaben.

3. Wie viel Variationen sind:

$$V_5(m),\ \overset{r}{V}_5(m),\ \overset{r}{V}_7(m),\ \overset{r}{V}_9(n)?$$

   Antw. $m(m-1)(m-2)\ldots(m-4)$, $m^5$, $m^7$, $n^9$.

4. Wie viel verschiedene zwei-, drei- und vierzifferige Zahlen lassen sich mit den Ziffern von 1 bis 9 schreiben, wenn jede Ziffer in der nämlichen Zahl nur einmal vorkommen darf?

   Antw. 72; 504; 3024.

5. Wie viel vier-, fünf- und sechszifferige Zahlen lassen sich mit den Ziffern von 1 bis 8 schreiben, wenn Wiederholungen statt finden dürfen?

Antw. 4096; 32768; 262144.

6. Wie oft lassen sich 89 Elemente in der sechsten Klasse mit Wiederholungen variiren?

Antw. 496981290961.

7. Wie viele Variationen der dritten Klasse mit Wiederholung lassen sich aus der Complexion a b c bilden?

Antw. $\overset{r}{V}_3(3) = 27$.

8. Wie viel Variationen der fünften Klasse mit Wiederholungen geben die Buchstaben des Alphabets von a bis m incl. und wie viel gibt das ganze Alphabet mit Wiederholung in der sechsten Klasse?

Antw. 248832; 244140625.

9. Wie oftmal können aus den Grössen a, b, c, d, e, f, g, h, i Producte von Potenzen von der Form $a^\alpha$, $b^\beta$, $c^\gamma$, $d^\delta$ gebildet werden?

Antw. 3024.

10. Wie heisst von der Complexion a b c d e die 46. und 58. Variation der dritten Klasse und wie die 71., 98., 108., 113., 119. Variation der vierten Klasse, ohne Wiederholung?

Antw. $V_3(m)$: dea (Göttin) und eda

$V_4(m)$: ceda, eabd, ebdc, ecda, edca.

11. Die wie vielte Variation der Complexion a b c d e ohne Wiederholung gibt in der entsprechenden Klasse die englischen Wörter: bed, bead, dace?

Antw. 24.; 44.; 76. Variation.

12. Welche Variationen derselben Complexion ohne Wiederholung geben die französischen Wörter: bec, cade, deçà?

Antw. 23.; 52.; 95. Variation.

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 228, 61—67; Heis §. 89: 15—26 und §. 90: 21—32.

---

# II. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

## §. 211.

**Erklärung 1.** Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelt unter Anwendung der Combinationslehre das Verhältniss der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu seiner Unwahrscheinlichkeit.

Dieses Verhältniss wird bedingt durch die bei einem Ereigniss obwaltenden günstigen, gleichmöglichen und ungünstigen Fälle.

**Erklärung 2.** Das Verhältniss der Summa aller günstigen Fälle eines Ereignisses zur Summa aller gleichmöglichen gibt die absolute Wahrscheinlichkeit; das Verhältniss aber aller ungünstigen Fälle eines Ereignisses zu allen gleichmöglichen gibt die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Je grösser die Anzahl der günstigen Fälle und je kleiner die Anzahl der ungünstigen gegen die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle eines Ereignisses, um so mehr nähert sich die Wahrscheinlichkeit der Gewissheit; und umgekehrt: je kleiner die Anzahl der günstigen Fälle und je grösser die Anzahl der ungünstigen gegen die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle, um so mehr nähert sich die Wahrscheinlichkeit der Ungewissheit.

Ein Ereigniss ist unmöglich, wenn die günstigen Fälle gleich Null und die ungünstigen gleich den möglichen Fällen sind; dagegen ist ein Ereigniss gewiss, wenn die ungünstigen Fälle gleich Null und die günstigen gleich allen möglichen Fällen sind. Die Einheit ist desshalb das Symbol der Gewissheit wie der Ungewissheit.

**Erklärung 3.** Nimmt man bei einem Ereigniss mit mehreren günstigen Fällen darauf Rücksicht, ob der eine oder der andere Fall eintrete, so hat man eine verbundene Wahrscheinlichkeit; berücksichtigt man aber, ob ein günstiger Fall einer Art vor einem günstigen Falle anderer Art eintritt, so ist die Wahrscheinlichkeit eine relative.

**Erklärung 4.** Je nachdem man es bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit nur mit einem oder mit mehreren von einander

unabhängigen Ereignissen zu thun hat, unterscheidet man einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

---

## a. Einfache Wahrscheinlichkeit.

### §. 212.

**Lehrsatz 1.** Die absolute wie die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist gleich einem Bruche, der zum Nenner die Summa aller gleichmöglichen Fälle und zum Zähler die Summa aller günstigen beziehungsweise aller ungünstigen Fälle hat.

Bezeichnen wir die absolute Wahrscheinlichkeit mit W und die entgegengesetzte mit $\mathfrak{M}$, mit m alle günstigen, mit n alle gleichmöglichen und mit n — m alle ungünstigen Fälle, so ist:

$$W = \frac{m}{n},\ \mathfrak{M} = \frac{n-m}{n}.$$

**Beweis.**

Jedes Ereigniss hat eine bestimmte Anzahl von möglichen Fällen; darunter können sich günstige und ungünstige befinden; die Summa aus dem Verhältnisse der günstigen zu den möglichen und aus dem Verhältnisse der ungünstigen zu den möglichen Fällen muss nothwendig gleich 1 sein. Desshalb ist

$$W + \mathfrak{M} = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} = \frac{m+n-m}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

folglich

$$\begin{aligned} W &= 1 - \mathfrak{M} & \text{und}\quad \mathfrak{M} &= 1 - W, \\ &= 1 - \frac{n-m}{n} & ,, \quad &= 1 - \frac{m}{n}, \\ &= \frac{n}{n} - \frac{n}{n} + \frac{m}{n} & ,, \quad &= \frac{n}{n} - \frac{m}{n}, \\ &= \frac{m}{n} & ,, \quad &= \frac{n-m}{n}. \end{aligned}$$

**Lehrsatz 2.** Die verbundene Wahrscheinlichkeit ist gleich der Summa der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen günstigen Fälle.

Bezeichnen wir mit vW verbundene Wahrscheinlichkeit, so ist:

$${}_vW = W + W' + W''.$$

**Beweis.**

Es seien m, m', m'' die günstigen Fälle eines Ereignisses und n alle gleich möglichen, so gibt es unter diesen m + m' + m'' günstige Fälle. Desshalb ist nach vorigem Satz:

$$vW = \frac{m + m' + m''}{n} = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n} + \frac{m''}{n} = W + W' + W''.$$

**Lehrsatz 3.** Die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich einem Bruche, der zum Zähler die Wahrscheinlichkeit eines Falles einer Art und zum Nenner die Summa aller Wahrscheinlichkeiten der Fälle anderer Art hat.

Bezeichnen wir mit rW relative Wahrscheinlichkeit, so ist:

$$rW = \frac{W}{W + W' + W''}.$$

**Beweis.**

Es sei n die Anzahl aller möglichen Fälle eines Ereignisses und w, w', w'' die Fälle verschiedener Art, so sind unter den Fällen w + w' + w'' offenbar w Fälle der ersten Art. Desshalb ist

$$rW = \frac{w}{w + w' + w''} = \frac{w}{n} : \left(\frac{w}{n} + \frac{w'}{n} + \frac{w''}{n}\right)$$

$$= \frac{W}{W + W' + W''}.$$

## §. 213.

**Beispiele.**

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei einer gewöhnlichen Zahlenlotterie eine Terne zu gewinnen, wenn man 18 Nummern besetzt hat?

   **Auflösung.** 90 Nummern geben 117480 Ternen (§. 207, 7) und in den 5 Nummern, die gezogen werden, sind 10 Ternen enthalten, folglich:

   $$W = \frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$$

   eine Terne zu gewinnen, und 18 Nummern

   $$= C_3\,(18) = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816 \text{ Ternen};$$

   mithin:

   $$W = \frac{816}{11748} = \frac{204}{2937}.$$

2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit 4 Würfeln 7 zu werfen?

**Auflösung.** Bei vier Würfeln ist die Anzahl der gleichmöglichen Fälle:

$$n = 6^4 = 1296, \text{ cf. §. 209, 2.}$$

Unter den 1296 Fällen befinden sich 20 günstige Fälle, weil es 20 Würfe gibt, deren Zahlen (je 4 Summanden) die Zahl 7 geben cf. §. 209, 2; §. 210, 1.

Mithin:

$$W = \frac{20}{1296} = \frac{5}{324}.$$

3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne, in welcher sich 6 weisse, 9 schwarze, 12 rothe und 15 gelbe Kugeln befinden, entweder eine weisse oder schwarze, entweder eine weisse oder rothe, entweder eine schwarze oder rothe, entweder eine rothe oder gelbe; entweder eine weisse oder schwarze oder gelbe, entweder eine schwarze oder rothe oder gelbe, entweder eine weisse oder rothe oder gelbe Kugel zu ziehen?

**Auflösung.** Die möglichen Fälle sind 42, die für die verschiedenen Farben günstigen sind: 6, 9, 12, 15; folglich:

$$W = \frac{6}{42} \text{ (bei weiss)}, \; = \frac{9}{42} \text{ (schwarz)}, \; = \frac{12}{42} \text{ (roth)}, \; = \frac{15}{42} \text{ (gelb)}.$$

Mithin entweder eine weisse oder schwarze

$$= \frac{6}{42} + \frac{9}{42} = \frac{5}{14} \text{ (I)}.$$

Mithin entweder eine weisse oder rothe

$$= \frac{6}{42} + \frac{12}{42} = \frac{3}{7} \text{ (II)}.$$

und

$$\text{III.} = \frac{1}{2}, \; \text{IV.} = \frac{9}{14}, \; \text{V.} = \frac{15}{21}, \; \text{VI.} = \frac{6}{7}, \; \text{VII.} = \frac{11}{14}.$$

4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit in einem Wurfe mit zwei Würfeln 7 oder 9 oder 11 zu werfen?

**Auflösung.** Bei den 3 Würfen 7, 9, 11 ist die Anzahl aller möglichen Fälle nur $6^2$, weil nur zwei Würfel. Nun kann 7 mit zwei Würfeln auf 6; 9 auf 4 und 11 auf 2 verschiedene Arten geworfen werden; folglich

$$\frac{6}{36}, \; \frac{4}{36}, \; \frac{2}{36},$$

$$_vW = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{3}.$$

5. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, in welcher sich 6 weisse, 9 schwarze, 12 rothe, 15 gelbe Kugeln befinden, mit einem zufälligen Griffe nach 2 Kugeln eher eine weisse und rothe als eine schwarze und gelbe zu treffen?

**Auflösung.** Eine weisse und eine rothe gibt 6.12 und eine schwarze und gelbe 9.15 günstige Fälle. Die Anzahl aber aller gleich möglichen Fälle ist hier $C_2\,(42) = 861$, folglich:

$$W \text{ (weiss und roth)} = \frac{6.12}{861} = \frac{72}{861}.$$

$$W \text{ (schwarz und gelb)} = \frac{9.15}{861} = \frac{135}{861};$$

mithin:

$$r\,W = \frac{\frac{72}{861}}{\frac{72}{861} + \frac{135}{861}} = \frac{72}{861} : \frac{207}{861} = \frac{72}{207} = \frac{8}{23}.$$

---

# b. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

## §. 214.

**Lehrsatz 1.** Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem Producte der absoluten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Bezeichnen wir mit z W zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, so ist:

$$z\,W = W \,.\, W'.$$

**Beweis.**

Es seien vom Ereignisse E die günstigen Fälle m, und $n - m$ die ungünstigen, so ist dessen absolute Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{m}{n};$$

und es seien $m'$ die günstigen und $n' - m'$ die ungünstigen Fälle des Ereignisses $E'$, so ist dessen absolute Wahrscheinlichkeit

$$W' = \frac{m'}{n'}.$$

Nun können aber die m günstigen Fälle des Ereignisses E mit jedem der $m'$ günstigen Fälle des Ereignisses $E'$ zusammentreffen, so dass die Anzahl der

günstigen Fälle des zusammengesetzten Ereignisses E und E′, gleich

$$m \cdot m' \text{ ist},$$

und die Anzahl seiner gleich möglichen Fälle aus demselben Grunde gleich

$$n \cdot n' \text{ ist;}$$

mithin ist

$$zW = \frac{m \cdot m'}{n \cdot n'} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = W \cdot W'.$$

**Lehrsatz 2.** Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Ereignissen wenigstens eines eintreffe ist gleich der Differenz zwischen der Summa und dem Producte ihrer absoluten Wahrscheinlichkeiten.

Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit 1 W, so ist:

$$1W = W + W' - W \cdot W'.$$

**Beweis.**

Die beiden Ereignisse seien E nnd E′, wenn nun E nicht eintritt, so ist:

$$E = 1 - W, \text{ cf. §. 212},$$

und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für E′ ist:

$$zW = (1 - W)\,W', \text{ cf. vorigen Satz.}$$

Wenn nun aber E und wo nicht, wenigstens E′ statt finden soll, so ist:

$$\begin{aligned} 1W &= W + (1 - W)\,W' \\ &= W + W' - W \cdot W' \\ &= 1 - (1 - W)(1 - W'). \end{aligned}$$

## §. 215.

### Beispiele.

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit aus zwei Urnen, von denen die erste 21 gelbe und 17 schwarze, die zweite 10 gelbe und 15 schwarze Kugeln enthält, durch einen zufälligen Griff eine schwarze zu treffen?

   **Auflösung.** Die Wahrscheinlichkeit aus der ersten Urne eine Kugel zu ziehen ist:

   $$\left(\frac{21}{38} + \frac{17}{38}\right) : 2 = \frac{1}{2},$$

   und die Wahrscheinlichkeit eine schwarze zu ziehen

   $$\frac{1}{2} \cdot \frac{17}{38} = \frac{17}{76}.$$

Bei der zweiten Urne ist die Wahrscheinlichkeit eine Kugel zu ziehen:

$$\left(\frac{10}{25}+\frac{15}{25}\right):2=\frac{1}{2},$$

und die Wahrscheinlichkeit eine schwarze zu ziehen:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{25}=\frac{15}{50}=\frac{3}{10};$$

mithin:

$$zW=\frac{17}{76}+\frac{3}{10}=\frac{199}{380}.$$

2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit 2 Würfeln erst 5 zu werfen und hierauf 11 oder wo nicht beim ersten Wurfe 5, so doch 11 beim zweiten Wurfe?

**Auflösungen.**

ad I. Bei zwei Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit 5 Augen zu werfen gleich:

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9},$$

und die Wahrscheinlichkeit 11 zu werfen ist:

$$\frac{2}{36}=\frac{1}{18};$$

mithin:

$$zW=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{18}=\frac{1}{162}.$$

ad II. $\frac{1}{9}+\frac{1}{18}-\frac{1}{162}=\frac{3}{18}-\frac{1}{162}.$

$$=\frac{26}{162}=\frac{13}{81}.$$

## §. 216.

### Aufgaben.

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine bestimmte Zahl zu werfen?

   Antw. $^1/_6$.

2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit aus 52 Karten eine Dame zu ziehen?

   Antw. $^1/_{13}$.

3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne eine schwarze Kugel zu ziehen, wenn sie a weisse und b schwarze enthält?

   Antw. $\frac{b}{a+b}$.

4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 7 zu werfen?

Antw. $^1/_6$.

5. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit 1 Würfel drei mal nach einander 5 zu werfen?

Antw. $^1/_{216}$.

6. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit 3 Würfeln 9 zu werfen?

Antw. $^1/_9$.

7. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln einen Pasch zu werfen?

Antw. $^1/_{36}$.

8. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne, die a weisse und b rothe Kugeln enthält, zwei mal nach einander eine rothe zu ziehen?

Antw. $b^2 : (a + b)^2$ oder $\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$.

9. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei einer gewöhnlichen Zahlenlotterie eine Ambe oder eine Quaterne zu gewinnen, wenn 24 Nummern besetzt sind; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit eine Quinterne zu gewinnen, wenn nur 12 Nummern besetzt sind?

Antw. I. $\frac{552}{801}$; II. $\frac{5313}{255519}$; III. $\frac{2}{110983}$.

10. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit in einem Wurfe mit drei Würfeln 7 oder 15 oder 16 zu werfen?

Antw. $\frac{31}{216}$.

11. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne, in der sich 24 weisse, 18 schwarze und 12 rothe Kugeln befinden, entweder eine weisse oder rothe, entweder eine rothe oder schwarze zu ziehen?

Antw. $^7/_9$, $^5/_9$.

12. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne q mal eine weisse Kugel zu ziehen, wenn sich in derselben q weisse und ebensoviel schwarze befinden?

Antw. $1 : 2^q$ oder $1 : \binom{2q}{q}$.

13. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, in der sich 24 schwarze, 18 rothe und 12 gelbe Kugeln befinden, mit einem zufälligen Griffe nach 2 Kugeln eher eine schwarze und gelbe als eine rothe und schwarze zu treffen?

Antw. $^4/_7$.

14. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, unter 5 Würfeln mit 2 einen Pasch zu werfen?

Antw. $^{25}/_{54}$.

15. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln erst 6 zu werfen und hierauf 15?

Antw. $\frac{1}{466}$.

16. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln wo nicht 6, so doch 16 zu werfen?

Antw. $\frac{1525}{20952}$.

17. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, die 24 weisse und 36 rothe Kugeln enthält, zweimal nach einander eine rothe zu ziehen?

Antw. $^9/_{25}$, wenn die erst gezogene Kugel wieder in die Urne kommt, sonst $^{21}/_{59}$.

18. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, die 10 schwarze und ebenso viel weisse Kugeln enthält, zehnmal nach einander eine schwarze Kugel zu ziehen?

Antw. $^1/_{1024}$.

19. Wenn W die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein mjähriger Ehemann noch r Jahre leben wird und wenn W′ die Wahrscheinlichkeit ist, dass seine njährige Ehefrau noch r Jahre leben wird, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach r Jahren der Ehemann schon todt und die Frau noch lebt?

Antw. $(1 - W) W'$.

20. Das Eintreten eines Ereignisses hat für jeden Versuch die Wahrscheinlichkeit $^1/_9$; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dass dieses Ereigniss bei 8 Versuchen wenigstens einmal eintritt?

$\frac{61}{100}$.

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 230—231; Heis §. 91.

# III. Binomialtheorem.

## §. 217.

**Erklärung 1.** Ein aus zwei Gliedern bestehender Ausdruck heisst Binomium. Wird ein Binom zu irgend einer Potenz erhoben, so heisst die entwickelte Potenz der binomische Lehrsatz oder das Newton'sche Binomialtheorem. *)

**Lehrsatz.** Die vollständig entwickelten Glieder der $m^{ten}$ Potenz des Binomiums $a \pm b$ sind gleich einer Anzahl von Producten, welche der Anzahl aller möglichen Variationen der Elemente a und b mit Wiederholung in der $m^{ten}$ Klasse gleich kommt. (§. 208, Beisp. 2 und §. 209, 2.)

$$(a \pm b)^m = \left\{ \begin{array}{l} a^m \pm \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3 \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(k-1)]}{1.2.3\ldots k} a^{m-k} b^k \pm \ldots \end{array} \right.$$

### I. Beweis.

Die Potenz $(a \pm b)^m$ zeigt an, dass das Binom $(a \pm b)$ m mal als Factor gesetzt werden soll. Das wiederholte Multipliciren ist aber nichts anders als Variiren mit Wiederholung. Nun ist aber die Variation eine Verbindung der Combination und der Permutation. Um das Binom $a \pm b$ auf die $m^{te}$ Potenz zu erheben, haben wir daher die $m^{te}$ Klasse der Combinationen mit Wiederholung aus den Elementen a und b zu bilden und die so gefundenen Combinationen zu permutiren. Das gibt:

Comb.

$$\overset{r}{C}_1 (a\,b) = a \quad b$$

$$\overset{r}{C}_2 (a\,b) = a^2 \quad a\,b \quad b^2$$

$$\overset{r}{C}_3 (a\,b) = a^3 \quad a^2 b \quad a\,b^2 \quad b^3$$

$$\overset{r}{C}_4 (a\,b) = a^4 \quad a^3 b \quad a^2 b^2 \quad a\,b^3 \quad b^4$$

$$\overset{r}{C}_m (a\,b) = a^m \quad a^{m-1} b \quad a^{m-2} b^2 \quad a^{m-3} b \quad a^{m-m} b^4.$$

---

* Newton hat zuerst gezeigt, wie die Binomialcoëfficienten sich allgemein ausdrücken lassen, arithm. univers. 1707.

Daraus erhält man durch Permutiren:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. Klasse = | $a$ | $b$ | | | | | | |
| II. Klasse = | $a^2$ | $ab$ | $ba$ | $b^2$ | | | | |
| III. Klasse = | $a^3$ | $a^2b$ | $aba$ | $ab^2$ | $ba^2$ | $bab$ | $b^2a$ | $b^3$. |
| IV. Klasse = | $a^4$ | $a^3b$ | $a^2ba$ | $a^2b^2$ | $aba^2$ | $abab$ | $ab^2a$ | $ab^3$ |
| | $ba^3$ | $ba^2b$ | $baba$ | $bab^2$ | $b^2a^2$ | $b^2ab$ | $b^3a$ | $b^4$. |

Allein diese Variationsformen sind als zusammengesetzte Producte zu betrachten. Bei Producten ist die Ordnung der Factoren gleichgiltig. Wir können daher, statt wirklich zu permutiren, hier jede einzelne Combinatsionsform mit der betreffenden Permutationszahl (Binomialcoëfficient) multipliciren. Dies gibt z. B.:

$$(a \pm c)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

und allgemein cf. §. 203:

$$(a \pm b)^m = a^m \pm \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(k-1)]}{1.2.3.k} a^{m-k} b^k \pm \ldots$$

$$= a^m \pm \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 \pm \binom{m}{3} a^{m-3} b^3 + \ldots \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \pm \ldots$$

cf. §. 206.*

$$= a^m \pm \frac{m}{1} \frac{b}{a} A + \frac{m-1}{2} \frac{b}{a} B \pm \frac{m-2}{3} \frac{b}{a} C + \frac{m-3}{4} \frac{b}{a} D \pm \ldots \text{ cf. §. 198.}$$

Anmerkung. Dieser Satz ist von der grössten Wichtigkeit, denn er bildet die Grundlage für die ganze Analysis. Desshalb mag seine allgemeine Giltigkeit noch durch nachstehenden Beweis dargethan werden.

## II. Beweis. **

$$(a+b)^m = a^m \left(\frac{a+b}{a}\right)^m = a^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m.$$

Setzt man:

$$\frac{b}{a} = x,$$

so ist:

$$a^m \left(1 + \frac{b}{a}\right) = a^m (1+x)^m.$$

---

* Die Ausdrücke

$$\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \binom{m}{3} \cdots \binom{m}{k}$$

sind kürzere Bezeichnungen für die Binomialcoëfficienten

$$\frac{m}{1}, \frac{m(m-1)}{1.2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \ldots\ldots\ldots;$$

$\binom{m}{0}$ bezeichnet den Coëfficienten 1.

** Nach Aug. Leopold Crelle, cf. Journal III, Berlin.

Setzt man:

$$a^m = 1^a \text{ und } 1 + x = x,$$

so ist:

$$a^m (1 + x)^m = 1^a . x^m = x^{a+m}.$$

N u n  i s t  o f f e n b a r :

I. $$x^{a+m} = x^a . 1^m + m \frac{x^{a+m} - x^a . 1^m}{m}.$$

Setzt man:

$$\frac{x^{a+m} - x^a . 1^m}{m} = q,$$

so ist:

II. $$x^{a+m} = x^a . 1^m + m . q.$$

Die Grössen, a, m behandeln wir als v e r ä n d e r l i c h und setzen desshalb im Folgenden $a + 1$ für a und $m - 1$ für m und die Grösse q lassen wir dadurch in $q_1$ übergehen, dann ist:

III. $$x^{a+m} = x^{a+1} . 1^m + (m - 1) q_1.$$

Differenz zwischen III. und II.:

IV. $$0 = (x^{a+1} - x^a) 1^m + (m - 1)(q_1 - q) - q.$$

Setzt man:

$$(x^{a+1} - x^a) 1^m = \Delta (x^a . 1^m),$$

und

$$q_1 - q = \Delta q,$$

so ist:

V. $$0 = \Delta(x^a . 1^m) + (m - 1) . \Delta q - q.$$

Verwandelt man wieder a in $a + 1$ und m in $m - 1$, so ist:

VI. $$0 = \Delta (x^{a+1} . 1^{m-1}) + (m - 2) \Delta q_1 - q_1.$$

Differenz zwischen VI und V ist:

VII. $$0 = \Delta (x^{a+1} . 1^{m-1}) - \Delta (x^a . 1^m) + (m - 2)(\Delta q_1 - \Delta q) - \Delta q - (q_1 - q).$$

Setzt man:

$$\Delta (x^{a+1} . 1^{m-1}) - \Delta (x^a . 1^m) = \Delta [\Delta (x^a . 1^m)] = \Delta^2 (x^a - 1^m).$$

und:

$$\Delta q_1 - \Delta q = \Delta^2 q,$$

so ist:

VIII. $$0 = \Delta^2 (x^a . 1^m) + (m - 2) \Delta^2 q - 2 \Delta q.$$

Verwandelt man abermals a in $a + 1$ und m in $m - 1$, so ist:

IX. $$0 = \Delta^2 (x^{a+1} . 1^{m-1}) + (m - 3) \Delta^2 q_1 - 2 \Delta q_1;$$

Differenz zwischen IX. und VIII. ist:

X. $$0 = \Delta^2(x^{a+1}.1^{m-1}) - \Delta^2(x^a.1^m) + (m-3)(\Delta^2 q_1 - \Delta^2 q) - \Delta^2 q - (\Delta q_1 - \Delta q).$$

Setzt man:

$$\Delta^2(x^{a+1}.1^{m-1}) - \Delta^2(x^a.1^m) = \Delta^3(x^a.1^m),$$

und:

$$\Delta^2 q_1 - \Delta^2 q = \Delta^3 q,$$

so ist:

XI. $$0 = \Delta^3(x^a.1^m) + (m-3)\Delta^3 q - 3\Delta^2 q.$$

Bei Fortsetzung dieses Verfahrens ist ferner:

XII. $$0 = \Delta^4(x^a.1^m) + (m-4)\Delta^4 q - 4\Delta^3 q;$$

Allgemein:

XIII. $$0 = \Delta^k(x^a.1^m) + (m-k)\Delta^k q - k\Delta^{k-1} q.$$

---

Nun ist aber:

$$q = \Delta(x^a.1^m) + (m-1)\Delta q \text{ nach Gleichung V.}$$

$$\Delta q = \frac{\Delta^2(x^a.1^m) + (m-2)\Delta^2 q}{2} \text{ nach Gleichung VIII.}$$

$$\Delta^2 q = \frac{\Delta^3(x^a.1^m) + (m-3)\Delta^3 q}{3} \text{ nach Gleichung XI.}$$

$$\Delta^3 q = \frac{\Delta^4(x^a.1^m) + (m-4)\Delta^4 q}{4} \text{ nach Gleichung XII.}$$

. . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . .

$$\Delta^{k-1} q = \frac{\Delta^k(x^a.1^m) + (m-k)\Delta^k q}{k}.$$

Setzt man nun in die Gleichung II. den Werth von q und in die neue Gleichung den Werth von $\Delta q$ und in die dadurch erhaltene Gleichung den Werth von $\Delta^2 q$ u. s. f., so ist:

XIV. $$x^{a+m} = x^a.1^m + m.\Delta(x^a.1^m) + m(m-1)\Delta q.$$

$$= x^a.1^m + m.\Delta(x^a.1^m) + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2(x^a.1^m) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}\Delta^2 q.$$

$$= x^a.1^m + m\Delta(x^a.1^m) + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2(x^a.1^m) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3(x^a.1^m) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}\Delta^3 q.$$

Setzt man ferner für q seinen Werth

$$\frac{x^{a+m} - x^a . 1^m}{m}$$

in die letzte Gleichung ein, so ist allgemein:

$$\text{XV.}\quad x^{a+m} = x^a . 1^m + m \varDelta (x^a . 1^m) + \frac{m(m-1)}{1.2} \varDelta^2 (x^a . 1^m)$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \varDelta^3 (x^a . 1^m) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \varDelta^4 (x^a . 1^m)$$

$$+ \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k} \varDelta^k (x^a . 1^m)$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)}{1.2\ldots.k} \varDelta^k \left(\frac{x^{a+m} - x^a . 1^m}{m}\right).$$

Es war aber auch:

$$\varDelta (x^a . 1^m) = (x^{a+1} - x^a) 1^m;$$

dies ist

$$= x^a . 1^m . (x - 1);$$

folglich:

$$\varDelta^2 (x^a . 1^m) = \varDelta (x - 1) x^a . 1^m;$$

dies ist

$$= (x - 1) \varDelta (x^a . 1^m)$$

$$= (x - 1)^2 x^a . 1^m,$$

und:

$$\varDelta^3 (x^a . 1^m) = (x - 1)^3 . x^a . 1^m,$$

. . . . . . . . . . . . .

endlich:

$$\varDelta^k (x^a . 1^m) = (x - 1)^k . x^a . 1^m.$$

Setzt man nun diese Werthe für die Ausdrücke:

$$\varDelta (x^a . 1^m),\ \varDelta^2 (x^a . 1^m),\ \varDelta^3 (x^a . 1^m),\ \varDelta^4 (x^a . 1^m),\ \varDelta^k (x^a . 1^m)$$

in die Gleichung XV ein, so ist:

$$\text{XVI.}\quad x^{a+m} = x^a . 1^m \Big(1 + m(x-1) + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-1)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}(x-1)^k\Big)$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{1.2.3\ldots k} \varDelta^k \left(\frac{x^{a+m} - x^a . 1^m}{m}\right).$$

Verwandelt man a in Null und setzt statt x seinen ursprünglichen Werth 1 + x, so wandelt sich die Gleichung XVI in:

$$\text{XVII.}\quad (1 + x)^m = 1^m \Big(1 + m x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k} x^k\Big)$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{1.2.3\ldots k} \varDelta^k \left(\frac{1 + x^{a+m} - (1+x)^a . 1^m}{m}\right).$$

Entwickelt man nun die rechte Seite dieser Gleichung, in der $a = 0$ ist, in Rücksicht des analytischen $\triangle$, so ist:

$$(1 + x)^m = (1 + x)^m.$$

Setzt man nun in Gleichung XVII wieder den ersten Werth von $x = \frac{b}{a}$ ein, so ist:

$$\text{XVIII.}\quad \left(1 + \frac{b}{a}\right) = 1 + \frac{m}{1}\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\frac{b^4}{a^4} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}\frac{b^k}{a^k} + \ldots$$

Nun ist aber auch:

$$(a + b)^m = a^m\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m,$$

folglich:

$$\text{XIX.}\quad (a + b)^m = a^m\left(1 + \frac{m}{1}\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}\frac{b^k}{a^k}\right)$$
$$= a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \binom{m}{3}a^{m-3}b^3$$
$$+ \ldots \binom{m}{k}a^{m-k}b^k + \ldots$$

**Erklärung 2.** Da in dem vorstehenden Lehrsatze die Grössen a, b, m ganz allgemein genommen sind und desshalb jeden beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Werth haben können, so hat dieser Satz ganz allgemeine Geltung. Es sei z. B. der Exponent $= -m$ oder $= \frac{1}{m}$, so ist:

$$\text{I.}\quad (a \pm b)^{-m} = a^{-m} \pm \binom{-m}{1}a^{-m-1}b + \binom{-m}{2}a^{-m-2}b^2 \pm \binom{-m}{3}a^{-m-3}b^3$$
$$+ \ldots \pm \binom{-m}{k}a^{-m-k}b^k + \ldots$$

$$\text{II.}\quad (a \pm b)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a \pm b} = \sqrt[m]{a}\left(1 \pm \frac{1}{m}\frac{b}{a} - \frac{m-1}{1.2m^2}\frac{b^2}{a^2} \pm \frac{(m-1)(2m-1)}{1.2.3m^3}\frac{b^3}{a^3} - \ldots\right)$$

Nach der Formel II lässt sich jede irrationale Zahl annäherungsweise radiciren, wenn man die gegebene Zahl in zwei andere zerlegt, wovon die eine rational ist. Z. B.:

$$\sqrt{42} = \sqrt{49 - 7} \text{ oder } \sqrt{36 + 6}.$$

Bezeichnen wir die irrationale Zahl mit R und den Exponenten mit x, so ist allgemein:

$$\sqrt[x]{R} = \sqrt[x]{r^x - p} \text{ oder } \sqrt[x]{r^x + q}.$$

**Zusatz.** Die vollständig entwickelten Glieder der $m^{ten}$ Potenz eines Polynomium

$$a + b + c + \ldots$$

sind gleich einer Anzahl Producte, welche der Anzahl aller möglichen Variationen der Elemente

$$a, b, c \ldots$$

mit Wiederholung in der $m^{ten}$ Klasse gleich kommt.

## §. 218.

**Lehrsatz 1.** Der Binomialcoëfficient irgend eines Gliedes der entwickelten Potenz eines Binoms mit ganzen positiven Exponenten ist gleich der Summa aus dem ebensovielten Binomialcoëfficienten und aus dem nächst vorangehenden der nächst niederen Potenz.

Es sei die nächst niedere Potenz m, so ist die nächst höhere $m + 1$ und desshalb:

$$\binom{m+1}{r} = \binom{m}{r} + \binom{m}{r-1}.$$

### Beweis.

Es ist:

$$\binom{m}{r} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.2.3\ldots r}$$

und

$$\binom{m}{r-1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+2)}{1.2.3\ldots(r-1)}.$$

Nun geht offenbar, nach der Aufeinanderfolge der natürlichen Zahlen, der Ausdruck $(m - r + 2)$ dem Ausdruck $(m - r + 1)$ voran und der Ausdruck $r - 1$ der Zahl r. Mithin ist auch:

$$\binom{m}{r} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+2)(m-r+1)}{1.2.3\ldots(r-1)r},$$

und da bekanntlich:

$$\binom{m}{r-1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+2).r}{1.2.3\ldots(r-1).r} \text{ ist (cf. §. 56),}$$

so ist auch:

$$\binom{m}{r}+\binom{m}{r-1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+2)(m+1)}{1.2.3\ldots r}$$
$$=\binom{m+1}{r}.$$

**Lehrsatz 2.** Ein Binomialcoëfficient ist Null, wenn der Zeiger grösser ist als seine Basis oder wenn er negativ ist.

$$\binom{m}{m+1}=0 \text{ und } \binom{m}{-r}=0.$$

**Beweis.**

Denn es ist:

$$\binom{m}{m+1}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots[m-(m+1)+1]}{1.2.3.4\ldots(m+1)}.$$

Nun ist aber auch:

$$[m-(m+1)+1]=0;$$

mithin:

$$\binom{m}{m+1}=\binom{0}{m+1}=0, \text{ cf. §. 49, Zus. 3.}$$

Wenn aber

$$\binom{m}{m+1}=0,$$

weil in diesem Quotienten der Zähler m = 0, so ist auch:

$$\binom{m}{-r}=0,$$

weil dieser Quotient denselben Zähler hat.

**Zusatz.** Die Summa aller Binomialcoëfficienten ist immer eine Potenz von 2, während die Summa der im Vorzeichen abwechselnden Coëfficienten gleich Null ist.

Es ist nämlich:

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. } (1+1)^m=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\binom{m}{3}+\ldots=2^m.\\ \text{II. } (1-1)^m=\binom{m}{0}-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}-\binom{m}{3}+\ldots=0.\end{array}\right\}\text{cf. §. 221 Tab.}$$

## §. 219.

### I. Beispiele.

$$1.\ (a^2-b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^2-b}=a-\frac{b}{2a}-\frac{1.b^2}{1.2.2^2.a^3}-\frac{1.3.b^3}{1.2.3.2^3.a^5}$$
$$-\frac{1.3.5.b^4}{1.2.3.4.2^4.a^7}-\ldots$$

2. $\sqrt{24} = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{25\left(1 - \frac{1}{25}\right)} = 5\sqrt{1 - \frac{1}{25}}$

$$= 5\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} - \frac{1}{1.2.2^2} \cdot \frac{1}{25^2} - \frac{1.3}{1.2.3.2^3} \cdot \frac{1}{25^3} - \ldots\right)$$

$$= 5\,(1 - 0{,}02 - 0{,}0002 - 0{,}000004 - \ldots)$$

$$= 4{,}89897\ldots$$

Durch logarithmische Berechnung erhält man ebenfalls: 4,89897...

3. $\sqrt{8} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = \frac{1}{2}\sqrt{36 - 4} = \frac{1}{2}\sqrt{36\left(1 - \frac{4}{36}\right)} = \frac{6}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{9}}$

$$= \frac{6}{2}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{1.2.2^2} \cdot \frac{1}{9^2} - \frac{1.3}{1.2.3.2^3} \cdot \frac{1}{9^3} - \ldots\right)$$

$$= \frac{6}{2}\,(1 - 0{,}0555555 - 0{,}0015432 - 0{,}0000857 - \ldots)$$

$$= 2{,}8284468\ldots$$

Durch logarithmische Berechnung erhält man: 2,82842..

4. $\sqrt[6]{4100} = \sqrt[6]{4096 + 4} = \sqrt[6]{4096\left(1 + \frac{4}{4096}\right)} = 4\sqrt[6]{1 + \frac{1}{1024}}$

$$= 4\,\left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1024} - \frac{5}{1.2.6^2} \cdot \frac{1}{(1024)^2} + \frac{5.11.1}{1.2.3.6^3.(1024)^3} - \ldots\right)$$

$$= 4\,(1 + 0{,}0001627 - 0{,}00000006 + \ldots)$$

$$= 4{,}00065056\ldots$$

## II. Aufgaben.

5. $(m + n)^8 = m^8 + 8\,m^7 n + 28\,m^6 n^2 + 56\,m^5 n^3 + 70\,m^4 n^4 + 56\,m^3 n^5 + 28\,m^2 n^6 + 8\,m\,n^7 + n^8.$

6. $(a - x)^7 = a^7 - 7\,a^6 x + 21\,a^5 x^2 - 35\,a^4 x^3 + 35\,a^3 x^4 - 21\,a^2 x^5 + 7\,a\,x^6 - x^7.$

7. $(4\,m + n)^7 = 16384\,m^7 + 28672\,m^6 n + 21504\,m^5 n^2 + 8960\,m^4 n^3 + 2240\,m^3 n^4 + 336\,m^2 n^5 + 28\,m\,n^6 + n^7.$

8. $(p - q)^{\frac{1}{3}} = p^{\frac{1}{3}} - \frac{q}{3\,p^{\frac{2}{3}}} - \frac{q^2}{9\,p^{\frac{5}{3}}} - \frac{5\,q^3}{81\,p^{\frac{8}{3}}} - \frac{10\,q^4}{243\,p^{\frac{11}{3}}} - \ldots$

9. $(a^3 - b)^{\frac{1}{3}} = a - \frac{b}{3\,a^2} - \frac{b^2}{9\,a^5} - \frac{5\,b^3}{81\,a^8} - \frac{10\,b^4}{243\,a^{11}} - \frac{22\,b^5}{729\,a^{14}} - \ldots$

10. $\left(\frac{a}{2} + \frac{2\,b^2}{3}\right)^6 = \frac{a^6}{64} + \frac{a^5 b^2}{8} + \frac{5\,a^4 b^4}{12} + \frac{20\,a^3 b^6}{27} + \frac{20\,a^2 b^8}{27} + \frac{32\,a\,b^{10}}{81} + \frac{64\,b^{12}}{729}.$

11. $(19 - 8\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = 4 - \sqrt{3}.$

12. $(x\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{xy})^4 = x^6 + 2\frac{2}{3}x^5\sqrt{y} + 2\frac{2}{3}x^4y + 1\frac{5}{27}x^3y\sqrt{y} + \frac{16}{81}x^2y^2.$

13. $$\left(\frac{a}{b\sqrt{c}} + 2b\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^7 = \frac{a^7}{b^7c^3\sqrt{c}} + \frac{14a^6}{b^5c^3}\sqrt{\frac{c}{a}} + \frac{84a^4}{b^3c\sqrt{c}}$$
$$+ \frac{280a^3}{bc}\sqrt{\frac{c}{a}} + 560ab\sqrt{c} + 672b^3c\sqrt{\frac{c}{a}}$$
$$+ \frac{448b^5c^3}{a^2\sqrt{c}} + \frac{128b^7c^3}{a^3}\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

14. $(x - y\sqrt{-1})^6 = x^6 - 6x^5yi - 15x^4y^2 + 20x^3y^3i + 15x^2y^4 - 6xy^5i - y^6$
$= x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6 - 2xyi(3x^4 - 10x^2y^2 - 3y^4).$

15. $(6 - \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{37}}{2}} - \sqrt{\frac{6-\sqrt{37}}{2}}.$

16. $(1 + q + q^2)^4 = 1 + 4q + 10q^2 + 16q^3 + 19q^4 + 16q^5 + 10q^6 + 4q^7 + q^8.$

17. Wie heisst das vierte Glied von $\left(\frac{4x}{5} + \frac{3y}{4}\right)^6$ und das fünfte Glied von $\left(\frac{2x}{7} + \frac{5x}{6}\right)^7$?

Antw. $\frac{108x^3y^3}{25}$, $\frac{3125x^3y^4}{7938}$.

18. Wie heissen die mittlern Glieder von $(1 + m + m^2 + m^3 + m^4 + m^5)^5$?

Antw. $780m^{12}$ und $780m^{13}$.

19. Wie heissen die mittlern Glieder von $(x - y\sqrt{-1})^7$?

Antw. $-35x^4y^3i + 35x^3y^4$.

20. $$\sqrt{42} = \sqrt{49 - 7} = \sqrt{49\left(1 + \frac{7}{49}\right)} = 7\sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$
$$= 6{,}48074\ldots$$

21. $$\sqrt{30} = \sqrt{36 - 6} = \sqrt{36\,(1 - \frac{6}{36}} = 6\sqrt{1 - \frac{1}{6}}$$
$$= 6\,(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{1.2.2^2}\cdot\frac{1}{6^2} - \frac{1.3}{1.2.3.2^3}\cdot\frac{1}{6^3} - \ldots)$$
$$= 5{,}477225\ldots$$

22. Wie heisst die Kubikwurzel aus 388?

Antw. 7,29363...

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil S. 225–26; Heis §. 92 u. §. 93, 1–8.

# IV. Arithmetische Reihen höherer Grade.

## §. 220.

**Erklärung 1.** Eine arithmetische Reihe oder Progression höhern Grades (Ranges) ist eine Reihe von Grössen, in der nicht die ersten, sondern die zweiten, dritten, vierten ... $r^{ten}$ Differenzen constant sind (§. 170).

Je nachdem bei arithmetischen Reihen die zweiten, dritten, vierten ... $r^{ten}$ Differenzen constant sind, unterscheidet man sie als Reihen des 2., 3., 4., ... $r^{ten}$ Grades.

Bezeichnet man mit p das Anfangsglied irgend einer Reihe und mit $d_1$, $d_2$, $d_3$ ... $d_r$ die Anfangsglieder der ersten, zweiten, dritten ... $r^{ten}$ Differenzreihe, so ist der allgemeine Ausdruck:

I. einer Reihe des dritten Grades mit Differenzreihen:

$$p + (p + d_1) + (p + 2\,d_1 + d_2) + (p + 3\,d_1 + 3\,d_2 + d_3) + \dots$$
$$d_1 + (d_1 + d_2) + (d_1 + 2\,d_2 + d_3) + \dots$$
$$d_2 + (d_2 + d_3) + \dots$$
$$d_3 + \dots$$

II. einer Reihe des $r^{ten}$ Grades:

$$p + (p + d_1) + (p + 2\,d_1 + d_2) + (p + 3\,d_1 + 3\,d_2 + \dots d\,r) + \dots$$

III. Reihe des zweiten Grades in Zahlen:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 14 | 22 | 33 | 47 | 64 | 84 | (Hauptreihe). |
| | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | (erste Differenzreihe). |
| | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | (zweite Differenzreihe). |

IV. Reihe des dritten Grades:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 7 | 28 | 44 | 66 | 95 | (Hauptreihe). |
| | | 11 | 16 | 22 | 29 | (erste Differenzreihe). |
| | | 4 | 5 | 6 | 7 | (zweite Differenzreihe). |
| | | | 1 | 1 | 1 | (dritte Differenzreihe). |

**Erklärung 2.** Wie eine arithmetische Reihe des ersten Grades völlig bestimmt ist, wenn die beiden ersten Glieder derselben bekannt sind, so ist eine Reihe des zweiten, dritten, ... $r^{ten}$ Grades vollständig bestimmt, wenn die drei, beziehungsweise vier,

. . . (r + 1)

ersten Glieder derselben gegeben sind. Es seien z. B. die vier ersten Glieder

15, 17, 8, − 4

einer Reihe des dritten Ranges gegeben, so ist:

15 17 8 − 4 − 11 − 5 . . .
2 − 9 − 12 − 7 6 . . .
− 11 − 3 5 13 . . .
8 8 8 . . .

Anmerkung. Die Quadratzahlen:

1, 4, 9, 16, 25 . . .

geben eine Reihe zweiten Grades; die Kubikzahlen:

1, 8, 27, 64, 125 . . .

eine Reihe dritten Grades; die Biquadratzahlen:

1, 16, 81, 256, 625 . . .

eine Reihe vierten Grades u. s. f.

## §. 221.

**Erklärung 1.** Leitet man aus der Reihe der natürlichen Zahlen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . .

eine neue Reihe dadurch ab, dass man zur 1 die 2 addirt, zu dieser Summa die 3, zu dieser Summa die 4, so bilden die dadurch entstandenen Summen

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 . . .

eine Reihe des zweiten Grades. Leitet man aus dieser auf dieselbe Weise eine neue Reihe:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165 . . .

ab, so gibt das eine Reihe dritten Grades. Setzt man dieses Verfahren xmal fort, so erhält man x arithmetische Reihen höheren Ranges, die man zum Unterschied von den anderweitigen höhern Reihen, die Reihen der figurirten Zahlen nennt und zwar heissen die Glieder der zweiten Zahlenreihe Triangularzahlen, weil sich die Einheiten derselben durch Dreiecke darstellen lassen, z. B.:

0
0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Die Glieder der dritten Zahlenreihe heissen Pyramidalzahlen, weil dieselben durch Kugelhaufen dargestellt werden können, die die Form von Spitzsäulen oder Pyramiden annehmen.

Anmerkung. Zur Gewinnung einer raschen Uebersicht über die figurirten Zahlen mag nachstehende Tafel dienen:

Coëfficienten der
1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10.
Potenz eines Binoms.

| | | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| II | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 |
| III | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | 220 | 286 |
| IV | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | 495 | 715 | 1001 |
| V | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 | 1287 | 2002 | 3003 |
| VI | 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 | 1716 | 3003 | 5005 | 8008 |
| VII | 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | 1716 | 3432 | 6435 | 11440 | 19448 |
| VIII | 1 | 9 | 45 | 165 | 495 | 1287 | 3003 | 6435 | 12870 | 24310 | 43758 |
| IX | 1 | 10 | 55 | 220 | 715 | 2002 | 5005 | 11440 | 24310 | 48620 | 92378 |
| X | 1 | 11 | 66 | 286 | 1001 | 3003 | 8008 | 19448 | 43758 | 92378 | 184756 |

**Erklärung 2.** In der vorangehenden Tafel stellen die von I bis X horizontal laufenden Reihen die figurirten Zahlen zwischen 1 und 10 dar und ebenso die von I bis X vertical laufenden Reihen und werden

die horizontal laufenden Reihen quer durchschnitten, von II nach II, von III nach III..., so hat man die Binomial-Coëfficienten auf der zweiten bis zur zehnten Potenz, wie auf den ersten Blick in die Tafel ersichtlich ist. Nach §. 218, 1 ist der Binomialcoëfficient irgend eines Gliedes der entwickelten Potenz gleich der Summa aus dem ebensovielten Coëfficienten und aus dem nächstvorhergehenden der nächst niederen Potenz. Z. B. der 5. Coëfficient der 8. Potenz eines Binoms ist gleich dem 5. Coëfficienten plus dem 4. Coëfficienten der 7. Potenz i. e.

$$70 = 35 + 35.$$

Nun ist aber auch das 5. Glied der 4. Reihe figurirter Zahlen gleich dem 4. Gliede derselben Reihe plus dem 5. Gliede der 3. Reihe i. e.

$$35 + 35 = 70.$$

cf. Tafel. Daraus geht hervor, dass die Glieder der figurirten Zahlenreihen sich nach demsellben Gesetze entwickeln lassen wie die auf einander folgenden Binomialcoëfficienten.

**Lehrsatz.** In den figurirten Zahlenreihen ist die $m^{te}$ Zahl der $r^{ten}$ Ordnung gleich der $r^{ten}$ getheilten steigenden Factoriellen von m (§. 206, 2).

Es sei $m_r$ der Ausdruck für die $m^{te}$ Zahl der $r^{ten}$ Ordnung so ist:

$$m_r = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+r-1)}{1.2.3\dots r} = \binom{m+r-1}{r}.$$

**Beweis.**

Bezeichnen wir $m_1$, $m_2$, $m_3$ ... die $m^{te}$ Zahl der 1, 2, 3 ... Ordnung (Ranges), so ist:

$$m_1 = m = \binom{m}{1}$$

und

$$m_2 = \frac{m(m+1)}{1.2} = \binom{m+1}{2},$$

ferner:

$$m_3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} = \binom{m+2}{3},$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

endlich:

$$m_r = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+r-1)}{1.2.3\dots r} = \binom{m+r-1}{r}.$$

## §. 222.

**Lehrsatz 1.** Das $m^{te}$ Glied irgend einer Reihe des $r^{ten}$ Grades ist gleich der Summa aus dem Anfangsgliede dieser Reihe und den (m — 1) ersten Gliedern der ersten Differenzreihe.

Es sei p das erste Glied einer Reihe des $r^{ten}$ Grades und $Z_r$ der Ausdruck für das $m^{te}$ Glied derselben Reihe und bezeichnet man mit

$$d_1, d_2, d_3 \dots d_{r-1}, d_r$$

die Anfangsglieder der möglichen Differenzreihen, so ist:

$$Z_r = p + (m-1)\,d_1 + \binom{m-1}{2} d_2 + \dots \binom{m-1}{r-1} d_{r-1} + \binom{m-1}{r} d_r.$$

### Beweis.

Wäre für eine Reihe des ersten Grades das Endglied zu suchen, so wäre

$$Z = p + (m-1)\,d_1, \text{ cf §. 171, 1.}$$

Wäre das Endglied für eine Reihe des 2. Grades zu bestimmen, so wäre deren Differenzreihe eine Reihe des 1. Grades mit dem Anfangsgliede $d_1$ und den constanten Differenzgliedern $d_2$, desshalb wäre die Summa ihrer (m — 1) ersten Glieder,

$$(m-1)\,d_1 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} d_2 =$$

$$(m-1)\,d_1 + \binom{m-1}{2} d_2;$$

folglich:

$$Z_2 = p + (m-1)\,d_1 + \binom{m-1}{2} d_2.$$

Wäre das Endglied für eine Reihe des 3. Grades zu bestimmen, so wäre deren Differenzreihe eine Reihe des zweiten Grades mit dem Anfangsgliede $d_1$ und dem ersten Gliede der ersten Differenzreihe $d_2$, während die constanten Differenzen $d_3$ wären, desshalb wäre auch die Summa ihrer (m — 1) ersten Glieder:

$$m-1)\,d_1 + \binom{m-1}{2} d_2 + \binom{m-1}{3} d_3;$$

folglich:

$$Z_3 = p + (m-1)\,d_1 + \binom{m-1}{2} d_2 + \binom{m-1}{3} d_3$$

u. s. w.

Nun ist aber das Endglied einer Reihe des $r^{ten}$ Grades zu bestimmen, folglich ist:

$$Z_r = p + (m-1)\,d_1 + \binom{m-1}{2} d_2 + \dots \binom{m-1}{r-1} d_{r-1} + \binom{m-1}{r} d_r.$$

**Lehrsatz 2.** Die Summa einer arithmetischen Reihe des $r^{ten}$ Grades ist:

$$S_r = mp + \binom{m}{2} d_1 + \binom{m}{3} d_2 + \ldots \binom{m-r+1}{r} d_{r-1} + \binom{m-r}{r+1} d_r.$$

**Beweis.**

Denn es ist nach §. 220:

$$S_r = \begin{cases} p \\ + p + 1\,d_1 \\ + p + 2\,d_1 + 1\,d_2 \\ + p + 3\,d_1 + 3\,d_2 + 1\,d_3 \\ + p + 4\,d_1 + 6\,d_2 + 4\,d_3 + \ldots \\ + p + 5\,d_1 + 10\,d_2 + 10\,d_3 + \ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + p + (m-1)\,d_1 + \binom{m-1}{2} d_2 + \binom{m-1}{3} d_3 + \ldots \binom{m-1}{r-1} d_{r-1} \\ \qquad + \binom{m-1}{r} d_r \quad \text{cf. §. 222, 1.} \end{cases}$$

folglich:

$$S_r = mp + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots m - 1)\,d_1 + \left[1 + 3 + 6 + 10 + \ldots \binom{m-1}{2}\right] d_2$$
$$+ \left[1 + 4 + 10 + \ldots \binom{m-1}{3}\right] d_3 + \ldots + \binom{m-1}{r} d_r.$$

Nun ist der Coëfficient von $d_1$ die Summa der $m - 1$ natürlichen Zahlen. Mithin die $(m-1)^{te}$ Zahl nach §. 221 Lehrsatz =

$$\frac{m(m-1)}{1.2} = \binom{m}{2};$$

auf gleiche Weise:

$$\text{Coëfficient von } d_2 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \binom{m}{3};$$

ferner:

$$\text{„ „ } d_3 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} = \binom{m}{4}.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Desshalb ist:

$$S_r = mp + \binom{m}{2} d_1 + \binom{m}{3} d_2 + \binom{m}{4} d_3 + \ldots$$
$$+ \binom{m-r+1}{r} d_{r-1} + \binom{m-r}{r+1} d_r.$$

**Lehrsatz 3.** Eine Reihe des $r^{ten}$ Grades ist völlig bestimmt, wenn (r + 1) Glieder derselben gegeben sind. (cf. §. 220, 2.)

**Beweis.**

Denn wenn (r + 1) Glieder gegeben sind, so lassen sich ebensoviele Gleichungen zwischen den (r + 1) Grössen:

$$p, d_1, d_2, d_3 \ldots d_r$$

bilden. Durch diese Gleichungen wird der Werth dieser Grössen bestimmt; ist das geschehen, so lässt sich leicht die $r^{te}$ Reihe vollständig darstellen.

## §. 223.

### I. Beispiele.

1. Kanonenkugeln sind in der Form einer dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet, in der Kante der Grundfläche liegen 32; wie viel Kugeln hält die Grundfläche, wie viel der ganze Haufen?

**Auflösung.** Setzt man allgemein für 32 m, so ist die Summa der Kugeln in der untersten Schichte:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots m = \frac{m(m+1)}{1.2}, \text{ cf. §. 221, Lehrsatz,}$$

$$= \frac{32.33}{2} = 528;$$

und die Summa in der ganzen Pyramide

$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} = \frac{32.33.34}{2.3} = 5984.$$

2. Eine Anzahl Kanonenkugeln ist in Form einer quadratischen aber abgekürzten Pyramide so aufgeschichtet, dass in einer Kante der untersten Schichte 36 und in der Kante der obersten Schichte 8 Kugeln liegen; wie viel Kugeln hält der Haufen?

**Auflösung.** Man berechnet zuerst den Haufen als ob er eine vollständige Pyramide bildete. Nun sind bei einer quadratischen Pyramide die einzelnen Schichten offenbar die Quadrate der natürlichen Zahlen, desshalb ist, wenn wir 36 = m setzen:

$$S = \frac{m(m+1)(2m+1)}{1.2.3} = \frac{36.37.73}{2.3} = 16206.$$

Nun fehlt aber dieser Pyramide die Spitze, von der die Kante der Grundfläche = 7 ist, desshalb ist:

$$S = \frac{7 . 8 . 15}{2 . 3} = 140;$$

folglich Inhalt der abgekürzten Pyramide

$$= 16206 - 140 = 16066.$$

3. In einer arithmetischen Reihe dritten Grades heisst das 1. Glied 8, das 7. Glied 144, das 9. Glied 352 und das 12. Glied 954; wie heisst die vollständige Reihe und wie das allgemeine Glied?

**Auflösung.** Nach §. 222, 3 ist:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && p = 8. \\ &\text{II.} && 144 = 8 + 6\,d_1 + 15\,d_2 + 20\,d_3. \\ &\text{III.} && 352 = 8 + 8\,d_1 + 28\,d_2 + 56\,d_3. \\ &\text{IV.} && 954 = 8 + 11\,d_1 + 55\,d_2 + 165\,d_3. \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} &\text{II.} && 136 = 6\,d_1 + 15\,d_2 + 20\,d_3. \\ &\text{III.} && 86 = 2\,d_1 + 7\,d_2 + 14\,d_3. \\ &\text{IV.} && 86 = d_1 + 5\,d_2 + 15\,d_3. \end{aligned}$$

ferner:

$$86 = 3\,d_2 + 16\,d_3 \text{ (Differenz zwischen IV u. III nach Eliminat von } d_1\text{)}.$$

und

$$61 = 3\,d_2 + 11\,d_3 \text{ (Differenz zwischen III u. II nach Eliminat von } d_1\text{)}.$$

mithin:

$$5\,d_3 = 25$$

und:

$$d_3 = 5$$
$$d_2 = 2$$
$$d_1 = 1.$$

Demnach die vollständige Reihe =

8 9 12 22 44 83 144 232 352 509 708 954 . . .

und das allgemeine Glied

$$Z = 8 + (m-1) . 1 + \binom{m-1}{2} 2 + \binom{m-1}{3} 5 + \ldots$$

## II. Aufgaben.

4. Eine Anzahl Kanonenkugeln ist in Formen dreiseitiger Pyramiden auf 3 Haufen geschichtet; wie viel Kugeln befinden sich in der untersten Schichte des ersten Haufen, wenn die Kante dieser Schichte 22 Kugeln enthält, wie viel in der untersten Schichte des zweiten und dritten Haufen, wenn man an der Seite

des einen 25, und an der Seite des andern Haufen 30 Kugeln zählt. Wie viel sind Kugeln auf jedem Haufen, wie viel im Ganzen?

Antw. I. Schichte = 253, S = 2024; II. Schichte = 325, S = 2925; III. Schichte = 465, S = 4960; Summa aller Kugeln = 9909.

5. Wie viel Kanonenkugeln befinden sich in einer unvollständigen dreiseitigen Pyramide, wenn an der Kante der untersten Schichte 48 und an der Kante der obersten Schichte 10 Kugeln liegen?

Antw. 19380.

6. Wie viel Kugeln befinden sich in einer vollständigen quadratischen Pyramide von 27 Schichten?

Antw. 6930.

7. Wie viel Kugeln enthält eine abgekürzte quadratische Pyramide, wenn man an der Kante der untersten Schichte 18 und an der Kante der obersten Schichte 9 Kugeln zählt?

Antw. 1960.

8. Wie viel Kugeln sind in einer länglichen Pyramide von 15 Schichten, die sich mit beiden Enden an 2 andere vierseitige Pyramiden anlehnt und in ihrem Rücken (oberste Schichte) 20 Kugeln zählt?

Antw. 1280.

9. Wie viel Kugeln liegen in einer länglichen Pyramide mit 21 Schichten, die sich an beiden Enden an 2 andere vierseitige Pyramiden anschliesst und die in ihrem Rücken 40 Kugeln hat?

Antw. 6160.

10. Wie viel Kugeln befinden sich in einem Kugelhaufen, der 30 Schichten hat und ein hohles Viereck bildet, wenn der Rücken im Ganzen 86 Kugeln enthält?

Antw. 39990.

11. Wie heisst die 24. Zahl der zweiten, dritten, fünften Ordnung?

Antw. I. 300, II. 2600, III. 98280.

12. Wie heisst die 28. Zahl der vierten und sechsten Ordnung?

Antw. I. 31465, II. 1107568.

13. Wie heissen die 14 ersten Glieder einer Reihe des zweiten Grades oder der zweiten Ordnung, wenn die 3 ersten Glieder 7, 13, 21 sind?

Antw. 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, 91, 111, 133, 157, 183, 211, 241 . . .

14. Die vier ersten Glieder einer arithmetischen Reihe des 3. Grades heissen:

$$15, 10, 1, -9;$$

wie heisst das 9., das 12., das 14., das 16. Glied?

Antw. 31, 235, 486, 875.

15. Die 5 ersten Glieder einer arithmetischen Reihe des 4. Grades heissen

$$10, 15, 24, 32. 36;$$

wie heisst das 8., das 11., das 14. und 17. Glied?

Antw. 24, 52, 317, 1170.

16. Wie gross ist die Summa der $q = 25$ ersten Quadratzahlen?

Antw. $\frac{q(q+1)(2q+1)}{1.2.3} = 5525.$

17. Wie gross ist die Summa der $k = 40$ ersten Kubikzahlen?

Antw. $\left(\frac{k(k+1)}{1.2}\right)^2 = 672400.$

18. In einer arithmetischen Reihe des 2. Grades ist das erste Glied 5, das erste Glied der Differenzreihe 7 und die constante Differenz 2; wie gross ist das 12. Glied, wie gross die Summa der 12 ersten Glieder?

Antw. 192, S. = 962.

19. In einer arithmetischen Reihe des 3. Grades ist das erste Glied 12 und die Anfangsglieder der ersten, zweiten, dritten Differenzreihe sind

$$2, -5, 3;$$

wie gross ist das 16. Glied und wie gross die Summa der 16 ersten Glieder?

Antw. 882, S. = 3092.

20. Wie gross ist das 10. Glied und wie gross die Summa der 10 ersten Glieder einer arithmetischen Reihe des 5. Grades, wenn das erste Glied dieser Reihe = 15 und die Anfangsglieder der ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften Differenzreihe

$$= 1, = -5, = 2, = 3, = 4$$

gegeben sind?

Antw. 894, S. = 1611.

21. In einer arithmetischen Reihe des zweiten Grades ist das 1. Glied 8,

das 2. Glied 12, und das 14. Glied 216; wie gross ist die Summa der 14 ersten Glieder?

Antw. 1204.

22. In einer arithmetischen Reihe des dritten Grades ist das erste Glied 15, das zweite 10, das dritte 1 und das fünfzehnte Glied $= 663$; wie gross ist die Summa der 15 ersten Glieder?

Antw. 1945.

23. Zur Form einer dreiseitigen Pyramide sollen 1140 Kugeln aufgeschichtet werden; wie viel Kugeln muss man zur Kante der untersten Schichte nehmen?

Antw. 18.

24. Auf einem rechteckigen Marktplatze sind die Buden der Länge nach so aufgestellt, dass sie 3 breite Verkehrsstrassen für die Käufer bilden, die 3 Strassen sind durch 8 gerade laufende Quergässchen mit einander verbunden. Auf wie viel Wegen, zwischen den Buden hindurch, kann man von der einen Ecke des Marktplatzes zum Diagonal gegenüberliegenden gelangen, wenn jeder dieser Wege gerade so lang sein soll, als wenn man aussen um die Buden herumgegangen wäre?

Antw. 715 Wege.

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Hofmann, III. Theil, Seite 187—190 und Seite 225; Heis §. 82, §. 93.

25. Lies in den nachstehenden Buchstaben:

a i r a r i a
i r a v a r i
r a v a v a r
a v a B a v a
r a v a v a r
i r a v a r i
a i r a r i a,

von der Mitte B aus nach den 4 Ecken a, a, a, a hin das Wort:

**Bavaria!**

(80 mal).

# Sechster Abschnitt.

# Höhere Gleichungen.

---

## §. 224.

**Erklärung 1.** In den höhern Gleichungen tritt die unbekannte Grösse zur $3^{ten}$, $4^{ten}$, . . . $n^{ten}$ Potenz auf.

Auch diese Gleichungen theilen sich in reine und unreine oder verwickelte. Eine höhere Gleichung heisst verwickelt, wenn in ihr die Unbekannte in verschiedenen Potenzen auftritt; tritt in ihr die Unbekannte nur in einer Potenz auf, so heisst sie rein.

**Erklärung 2.** Der allgemeine Ausdruck einer geordneten unreinen höhern Gleichung ist:

$$x^n \pm A x^{n-1} \mp B x^{n-2} \pm C x^{n-3} \mp \ldots \pm Q = 0.$$

Aus dieser unreinen Gleichung erhält man die reine:

$$x^n \pm Q = 0,$$

wenn $A = B = C = 0$ ist.

Der Exponent n bedeutet eine positive ganze Zahl und die Coëfficienten A, B, C und das Absolutglied Q entweder eine positive oder negative ganze Zahl.

## §. 225.

**Lehrsatz 1.** Das entwickelte Product aus n Binomialfactoren von der Form $(x \pm \alpha)$ stellt sich als eine höhere Gleichung vom $n^{ten}$ Grade dar.

**Beweis.**

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = x^4 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta + \beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2 - (\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)x + \alpha\beta\gamma\delta.$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\ldots) = x^n - (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)x^{n-1} + (\alpha\beta+\alpha\gamma + \alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\ldots)x^{n-2} - (\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta+\ldots)x^{n-3} + \ldots\alpha\beta\gamma\delta\ldots;$$

setzt man:

I. $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots) = A$

II. $(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\ldots) = B$

III. $(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta+\ldots = C$

IV. $\alpha\beta\gamma\delta = Q$,

so ist:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\ldots) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots + Q.$$

**Zusatz.** Jede vollständige Gleichung des $n^{ten}$ Grades hat $(n+1)$ Glieder.

**Lehrsatz 2.** Ist eine höhere Gleichung das entwickelte Product aus den Binomialfactoren

$$x \mp \alpha, \; x \mp \beta, \; x \mp \gamma, \; x \mp \delta,$$

so sind die Grössen

$$\alpha, \; \beta, \; \gamma, \; \delta$$

die Wurzeln dieser Gleichung.

**Beweis.**

Wenn

$$x^n \mp Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \mp Cx^{n-3} + Q = 0,$$

und

$$x^n \mp Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \mp Cx^{n-3} + Q = (x\mp\alpha)(x\mp\beta)(x\mp\gamma)(x\mp\delta)$$

so ist:

$$(x\mp\alpha)(x\mp\beta)(x\mp\gamma)(x\mp\delta) = 0$$

mithin:

$x \mp \alpha = 0$ und somit: $x = \pm\alpha$,

$x \mp \beta = 0$ „ „ $x = \pm\beta$,

$x \mp \gamma = 0$ „ „ $x = \pm\gamma$,

$x \mp \delta = 0$ „ „ $x = \pm\delta$.

**Zusatz 1.** Jede Gleichung vom $n^{ten}$ Grade hat n Wurzeln.

**Zusatz 2.** (Lehrsatz 1 und 2). Jede geordnete höhere Gleichung hat:

I. zum ersten Gliede die Unbekannte, potenzirt durch die Anzahl ihrer Wurzeln;

II. zum zweiten Gliede die Unbekannte zu einer um 1 niederen Potenz mit einem Coëfficienten (allg. A) gleich der Summa der einzelnen Wurzeln

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$$

mit entgegengesetzten Zeichen;

III. zum dritten Gliede die Unbekannte zu einer um 2 niedern Potenz mit einem Coëfficienten (allg. B) gleich der Summa der Producte je zweier Wurzeln

$$(\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta \ldots)$$

mit dem nämlichen Zeichen der Wurzelproducte;

IV. zum vierten Gliede die Unbekannte zu einer um 3 niederen Potenz mit einem Coëfficienten (allg. C) gleich der Summa der Producte je dreier Wurzeln

$$(\alpha\beta\gamma, \alpha\beta\delta, \alpha\gamma\delta, \beta\gamma\delta \ldots)$$

mit entgegengesetzten Zeichen

. . . . ,

in dieser Weise geht es fort bis zum letzten Gliede; das letzte Glied ist ein Product aus allen Wurzeln, mit positiven Zeichen bei einer geraden Anzahl und mit negativen Zeichen bei einer ungeraden Anzahl negativer Wurzeln.

## §. 226.

**Erklärung.** Da das letzte Glied einer geordneten höhern Gleichung ein Product ist aus allen ihren Wurzeln, so müssen unter den Factoren dieses Gliedes einzelne sich finden, die entweder positiv oder negativ genommen, in die Gleichung substituirt, derselben genügen. Wo dies nicht möglich ist, enthält dieselbe entweder nur irrationale oder nur imaginäre Wurzeln.

Jede höhere Gleichung enthält entweder blos reelle oder blos imaginäre Wurzeln, oder theils reelle und theils imaginäre; die reellen Wurzeln können blos rational oder blos irrational sein oder auch theils rational und theils irrational.

**Lehrsatz.** Ist in einer geordneten höhern Gleichung eine Wurzel

$$\alpha + \beta i,$$

so enthält sie noch eine zweite Wurzel von der Form

$$\alpha - \beta i.$$

**Beweis.**

Denn enthielte eine geordnete höhere Gleichung nur eine imaginäre Wurzel, so wäre ihr letztes Glied, als ein Product aus allen ihren Wurzeln, ebenfalls eine imaginäre Grösse, was bei einer geordneten Gleichung unmöglich ist. Sie muss also wenigstens 2 imaginäre Wurzeln haben und diese Wurzeln müssen von der Form $\alpha + \beta i$ und $\alpha - \beta i$ sein, damit sie sich gegenseitig heben und die imaginären Theile dieser Wurzeln nicht im zweiten Gliede der Gleichung auftreten, dessen Coëfficient die Summa aller Wurzeln ist.

**Zusatz 1.** Imaginäre Wurzeln treten in einer höhern geordneten Gleichung immer paarweise auf:

$$\alpha \pm \beta i; \quad \alpha \pm \beta i \text{ und } \gamma \pm \delta i.$$

**Zusatz 2.** Eine höhere Gleichung von einem **geraden** Grade hat entweder keine reelle Wurzel oder sie hat dieselben paarweise.

**Zusatz 3.** Eine höhere Gleichung von einem **ungeraden** Grade hat wenigstens eine reelle Wurzel, deren Vorzeichen dem des Absolutgliedes entgegengesetzt ist.

## §. 227.

**Lehrsatz.** Jede Gleichung vom $n^{ten}$ Grade lässt sich auf eine Gleichung vom $(n-1)^{ten}$ Grade reduciren, wenn eine Wurzel gegeben ist.

**Beweis.**

Es sei gegeben:

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

und

$$x_1 = \alpha, \; x_1 - \alpha = 0$$

so ist:

$$\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$$

und

$$d = -\alpha^4 - a\alpha^3 - b\alpha^2 - c\alpha$$

folglich:

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x - \alpha^4 - a\alpha^3 - b\alpha^2 - c\alpha = 0$$

und

$$(x^4 - \alpha^4) + a(x^3 - \alpha^3) + b(x^2 - \alpha^2) + c(x - \alpha) = 0,$$

die ganze Gleichung durch $x_1 - \alpha$ dividirt:

$$(x^3 - \alpha^3) + a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) + c = 0.$$

Demnach:

$$x^3 + a x^2 + b x - \alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha = 0,$$

nun ist:

$$c = -\alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha,$$

folglich

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0.$$

Wie aber eine Gleichung vom 4. Grade zu einer Gleichung vom 3. Grade wird, wenn eine Wurzel bekannt ist, so wird auch (allgemein) eine Gleichung vom $n^{ten}$ auf eine Gleichung vom $(n-1)^{ten}$ Grade reducirt, wenn eine Wurzel gegeben ist.

**Zusatz.** Sind 2, 3 Wurzeln gegeben, so lässt sich jede Gleichung vom $n^{ten}$ Grade auf eine Gleichung vom $(n-2)^{ten}$, beziehungsweise $(n-3)^{ten}$ Grade reduciren.

Anmerkung. Ist die ursprüngliche Gleichung vom $n^{ten}$ Grade und sind die Wurzeln

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots$$

gegeben, so heisst man die durch Division mit den Binomialfactoren

$$x \mp \alpha, \; x \mp \beta, \; x \mp \gamma$$

gewonnenen Gleichungen vom $(n-1)^{ten}$, $(n-2)^{ten}$, $(n-3)^{ten}$ Grade Ableitungsgleichungen.

## §. 228.

**Erklärung.** Da die höhern Gleichungen mehrere Wurzelwerthe haben und da diese Werthe auch von den Vorzeichen der einzelnen Glieder jeder Gleichung abhängen, so hat man zur Bestimmung der Wurzelwerthe der Aufeinanderfolge der Vorzeichen besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

**Lehrsatz.** Jede höhere Gleichung hat so viele negativ reelle Wurzeln als in ihr Zeichenfolgen, und so viele positiv reelle Wurzeln als in ihr Zeichenwechsel erscheinen.

Es sei allgemein:

$$x^n \mp A x^{n-1} \pm B x^{n-2} \mp C x^{n-3} \pm \ldots \mp Q = 0$$

und

$$x^n \mp A x^{n-1} \pm B x^{n-2} \mp C x^{n-3} \pm \ldots \mp Q = G(x^n). \;^*)$$

---

* Der Ausdruck

$$x^n \mp A x^{n-1} \pm B x^{n-2} \mp C x^{n-3} \pm \ldots \mp Q$$

ist eine algebraische rationale ganze Function der Variabeln x und zwar eine Function

## Beweis.

Es ist:

$$G(x^n) = 0$$

und sind die Wurzel dieser Gleichung:

$$\mp\alpha,\ \mp\beta,\ \mp\gamma\ldots\mp k,$$

so ist:

$$\frac{G(x^n)}{x \pm \alpha} = G(x^{n-1}) = 0, \text{ cf. §. 227},$$

$$\frac{G(x^{n-1})}{x \pm \beta} = G(x^{n-2}) = 0,$$

$$\frac{G(x^{n-2})}{x \pm \gamma} = G(x^{n-3}) = 0,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{G(x^{n-r})}{x \pm \varepsilon} = x \pm k = 0;$$

da nun $n - r = 2$ ist, so ist:

$$G(x^{n-r}) = G(x^2).$$

I. Sind nun aus dieser Ableitungsgleichung $G(x^{n-r})$ die Wurzeln: $-\varepsilon$ und $-k$, so ist:

$$G(x^{n-r}) = (x + \varepsilon)(x + k) = x^2 + (\varepsilon + k)x + \varepsilon k = 0, \text{ cf. §. 225},$$

mithin: zwei Zeichfolgen und zwei negative Wurzeln.

II. Sind aber die beiden Wurzeln: $+\varepsilon$ und $+k$, so ist:

$$G(x^{n-r}) = (x - \varepsilon)(x - k) = x^2 - (\varepsilon + k)x + \varepsilon k = 0;$$

mithin: zwei Zeichenwechsel und zwei positive Wurzeln.

III. Sind aber die beiden Wurzeln $+\varepsilon$ und $-k$, so ist:

$$G(x^{n-r}) = (x - \varepsilon)(x + k) = x^2 = (\varepsilon - k)x - \varepsilon k = 0.$$

Ist hier $\varepsilon > k$, so ist $\varepsilon - k = \mu$ und

1. $x^2 - (\varepsilon - k)x - \varepsilon k = x^2 - \mu x - \varepsilon k.$

Ist aber $\varepsilon < k$, so ist $\varepsilon - k = -\nu$ und

2. $x^2 - (\varepsilon - k)x - \varepsilon k = x^2 + \nu x - \varepsilon k.$

Ist endlich $\varepsilon = k$, so ist $\varepsilon - k = 0$ und

3. $x^2 - (\varepsilon - k)x - \varepsilon k = x^2 \pm 0 \,.\, x - \varepsilon k.$

Mithin findet sich in diesen 3 Fällen ein Zeichenwechsel und

---

des $n^{ten}$ Grades, die man gewöhnlich der Kürze wegen mit $F(x^n)$ bezeichnet. Wir aber setzen statt des Functionszeichens F lieber G, um den Namen der Function in Erinnerung zu bringen; somit die ganze linke Seite der auf 0 reducirten Gleichung $= G(x^n)$ cf. Theorie und Auflösung höherer Gleichungen von Dienger, Stuttgart, Metzler 1866.

eine Zeichenfolge und ebenso eine positive und eine negative Wurzel.

IV. Wären die Wurzeln: $-\varepsilon$ und $+k$, so hätte man dieselben 3 Fälle wie III. Daraus folgt: in der Gleichung

$$G(x^{n-r}) = 0,$$

finden sich so viel positive Wurzeln als Zeichenwechsel und so viel negative Wurzeln als Zeichenfolgen. Was aber von dieser Ableitungsgleichung gilt, gilt auch von den andern Ableitungsgleichungen:

$$G(x^{n-3}) = 0 \text{ und } G(x^{n-2}) = 0 \text{ u. s. w.},$$

und endlich auch von der ursprünglichen Gleichung:

$$G(x^n) = 0.$$

**Zusatz.** Sind in einer geordneten höhern Gleichung, die nur reelle Wurzeln enthält, alle geradstelligen Glieder ($2^{\text{tes}}$, $4^{\text{tes}}$, $6^{\text{tes}}$) negativ, so sind alle Wurzeln positiv; sind aber sämmtliche Glieder positiv, so sind alle Wurzeln negativ.

## §. 229.

**Erklärung 1.** Soll eine verwickelte höhere Gleichung gelöst, d. h. ihre Wurzeln bestimmt werden, so muss sie gehörig geordnet sein. Eine höhere Gleichung ist geordnet, wenn sie auf Null reducirt ist, wenn das erste Glied die Unbekannte ist in der höchsten Potenz mit dem Coëfficienten 1 und wenn die folgenden Glieder in fallenden Potenzen der Unbekannten auf einander folgen und zu Coëfficienten ganze Zahlen haben und wenn endlich das letzte Glied von der Unbekannten ganz befreit ist.

**Lehrsatz.** Jede höhere Gleichung lässt sich in eine andere transformiren, deren Wurzeln ein Vielfaches oder ein bestimmter aliquoter Theil der entsprechenden Wurzeln aus der ursprünglichen Gleichung sind.

### Beweis.

Die gegebene Gleichung sei:

$$v^3 + p v^2 + q v + r = 0,$$

setzt man:

$$v = \frac{x}{m},$$

so ist:

$$x = m v,$$

mithin:

$$x^3 + m p x^2 + m^2 q x + m^3 r = 0.$$

Offenbar sind hier die Wurzeln dieser Gleichung Producte aus der Grösse m und den Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Anmerkung. Um eine geordnete Gleichung in eine andere zu transformiren, deren Wurzeln das mfache von den Wurzeln der gegebenen sind, hat man blos die Glieder der gegebenen Gleichung mit den Gliedern einer geometrischen Reihe zu multipliciren, deren erstes Glied 1 nnd deren Qnotient m ist, cf. Lehrsatz u. nachfolg. Beisp.

$$\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 - \;\; 5x + \;\;\; 6 = 0 \text{ gegeb. Gl.} \\ \;1 \qquad 4 \qquad 4^2 \qquad 4^3 \\ \hline x^3 - 8x^2 - 80x + 384 = 0 \text{ transf. Gl.} \end{array}$$

Die Wurzel der gegebenen Gleichung sind 3, 1, − 2 und die Wurzel der transf. das 4fache.

**Erklärung 2.** Der vorstehende Lehrsatz gibt uns die Mittel an die Hand:

I. die Coëfficienten der Glieder einer gegebenen Gleichung von ihren Bruchgrössen zu befreien. Z. B.:

$$v^3 + \frac{p v^2}{a} + \frac{q v}{b} + \frac{r}{c} = 0,$$

$$a b c v^3 + b c p v^2 + a c q v + a b r = 0;$$

setzt man:

$$v = \frac{x}{a b c},$$

so ist:

$$a b c v = x,$$

folglich:

$$x^3 + b c p x^2 + a^2 c^2 b q x + a^3 b^3 c^2 r = 0.$$

II. Die Coëfficienten einer gegebenen Gleichung von Wurzelgrössen zu befreien. Z. B.:

$$y^3 + p y^2 \sqrt{m} + q y + r \sqrt{m} + m = 0;$$

setzt man:

$$y \sqrt{m} = x,$$

so ist:

$$x^3 + p m x^2 + q m x + r m^2 = 0.$$

## §. 230.

**Lehrsatz.** Jede geordnete höhere Gleichung lässt sich in eine andere transformiren, deren Wurzeln um eine beliebige Grösse vermehrt oder vermindert sind.

**Beweis.**

Es sei gegeben:

$$x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + \ldots + Q = 0;$$

setzt man:

$$x = y + q,$$

wobei man sich q positiv oder negativ denken kann, so ist nach gehöriger Substitution:

$$\left.\begin{array}{l} x^n = y^n + n q y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} q^2 y^{n-2} + \binom{n}{3} q^3 y^{n-3} + \ldots + q^n \\ + A x^{n-1} = A y^{n-1} + A(n-1) q y^{n-2} + A(n-2) q^2 y^{n-3} + \ldots + A q^{n-1} \\ + B x^{n-2} = \qquad B y^{n-2} + \ldots + B q^{n-2} \\ + \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + Q \quad = \qquad + Q \end{array}\right\} = 0.$$

Die rechts stehende Gleichung ist die transformirte.

## §. 231.

**Lehrsatz.** Aus jeder geordneten vollständigen Gleichung lässt sich das zweite Glied entfernen.

**Beweis.**

Es sei gegeben:

$$x^3 + A x^2 + B x + C = 0;$$

setzt man:

$$x = y + m \text{ (m eine veränderliche Grösse)}$$

so ist:

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3 y^2 m + 3 y m^2 + m^3 \\ A x^2 &= A(y^2 + 2 y m + m^2) \\ B x &= B(y + m) \\ C &= C \end{aligned}$$

$$x^3 + A x^2 + B x + C = y^3 + (3m + A) y^2 + (3m^2 + 2Am + B) y + m^3 + Am + Bm + C = 0.$$

Will man in der trantformirten Gleichung das zweite Glied wegschaffen, so setzt man:

$$(3m + A) y^2 = 0;$$

da nun in dieser Gleichung der Factor $y^2$ nicht gleich Null sein kann, denn sonst wäre $x = m$, was gegen die Voraussetzung ist, so muss

$$3m + A = 0$$

sein, mithin:

$$m = -\frac{A}{3}$$

und:

$$x = y - \frac{A}{3}.$$

Und desshalb ist nach gehöriger Substitution:

$$y^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right) y + \left(\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0;$$

setzt man noch:

$$B - \frac{A^2}{3} = p$$

und:

$$\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C = q,$$

so ist:

$$y^3 + py + q = 0.$$

**Zusatz 1.** Bei einer cubischen Gleichung ist:

$$x = y \mp \frac{A}{3},$$

bei einer biquadratischen Gleichung ist:

$$x = y \mp \frac{A}{4},$$

bei einer cuboquadratischen Gleichung ist:

$$x = y \mp \frac{A}{6},$$

bei einer Gleichung vom $n^{ten}$ Grad ist:

$$x = y \mp \frac{A}{n}.$$

**Zusatz 2.** In jeder geordneten höhern Gleichung lässt sich das zweite Glied, wo es fehlt, leicht ergänzen.

Anmerkung. Gleichungen, in welchen ein Glied oder mehrere fehlen, heissen unvollständig; Gleichungen, in welchen alle Glieder vorhanden sind, heissen vollständig.

## §. 232.

**Erklärung 1.** Von den verwickelten höhern Gleichungen sind nur die cubischen und biquadratischen algebraisch lösbar (Abel) und gewisse Gleichungen des 5. Grades) (Évariste Galois, Hermite); von den Gleichungen noch höherer Grade sind nur noch die numerischen lösbar, welche eine oder mehrere rationale Wurzeln haben und desshalb auf cubische oder biquadratische reducirt werden können.

**Erklärung 2.** Die Lösung reiner höheren Gleichungen ist einfach, denn sie ist ein bloses Radiciren. Z. B.

1. $x^n \mp Q = 0$, $x = \pm\sqrt[n]{Q}$.

2. $x^3 - 5832 = 0$, $x = \sqrt[3]{5832} = 18$.

3. $x^5 + 345025251 = 0$, $x = \sqrt[5]{-345025251} = -51$.

4. $x^6 + 6321363049 = 0$, $x = \sqrt[6]{-6321363049} = 43\,i$.

---

# I. Gleichungen mit einer Unbekannten.

## a. Cubische Gleichungen.

### §. 233.

**Erklärung 1.** In einer cubischen Gleichung erscheint die höchste Potenz der Unbekannten in der dritten Potenz. Der allgemeine Ausdruck einer geordneten vollständigen cubischen Gleichung ist:

$$x^3 \mp A\,x^2 \pm B\,x \mp C = 0.$$

Die Grössen A, B, C sind entweder positive oder negative ganze Zahlen.

**Erklärung 2.** Jede cubische Gleichung hat 3 Wurzeln. Es gibt verschiedene Methoden diese 3 Wurzeln zu bestimmen. Je nach der Beschaffenheit der gegebenen Gleichung führt die eine oft vor der andern rascher zum Ziel. Wir werden desshalb die gebräuchlichsten Methoden hier behandeln, zuvor aber noch zwei specieller Fälle gedenken.

**Erster Fall.**

$$x^3 \mp C = 0,$$

so ist:

$$x = \sqrt[3]{\pm C};$$

setzt man:

$$\sqrt[3]{\pm C} = \pm m,$$

so ist:

$$x^3 \mp m^3 = 0,$$

daraus:

$$(x \mp m)(x^2 \pm m\,x + m^2) = 0.$$

Nun ist:

$$x \mp m = 0,\quad x_1 = \pm m$$

und

$$x^2 \pm m x + m^2 = 0,\quad x_2 = \pm\frac{m}{2}\left(1 + \sqrt{-3}\right)$$

$$x_3 = \pm\frac{m}{2}\left(1 - \sqrt{-3}\right).$$

### Zweiter Fall.

$$x^3 + P x^2 + Q x = R.$$

Bilden die drei links stehenden Glieder die drei ersten Glieder eines Cubus aus dem Binom $(x + \alpha)$, so ist:

$$(x + \alpha)^3 = x^3 + 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + \alpha^3$$

und offenbar:

$$3\alpha = P \text{ und } \alpha = \frac{P}{3},\quad \alpha^3 = \frac{P^3}{27}$$

und

$$3\alpha^2 = Q = \frac{P^2}{3}.$$

Mithin:

$$x^3 + P x^2 + \frac{P^2}{3} x = R.$$

Auf beiden Seiten $\frac{P^3}{27}$ addirt, gibt:

$$x^3 + P x^2 + \frac{P^2}{3} x + \frac{P^3}{27} = R + \frac{P^3}{27},$$

$$x + \frac{P}{3} = \sqrt[3]{R + \frac{P^3}{27}}.$$

Wäre nun:

$$-\frac{P}{3} + \sqrt[3]{R + \frac{P^3}{27}} = p,$$

so ergeben sich die beiden andern Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn man sie mit $(x - p)$ dividirt.

## I. Auflösung durch Factorenzerlegung des Absolutgliedes.

### §. 234.

Gegeben ist:

$$x^3 \mp a x^2 \pm b x \mp c = 0.$$

Sind $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$ die Wurzeln, so ist:

$$(x \pm \alpha)(x \pm \beta)(x \pm \gamma) = x^3 \mp (\alpha + \beta + \gamma) x^2 \pm (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) x \mp \alpha\beta\gamma$$
$$= x^3 \mp a x^2 \pm b x \mp c,$$

folglich:

$$\alpha + \beta + \gamma = a, \text{ cf. §. 225},$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma = b,$$
$$\alpha\beta\gamma = c.$$

## §. 235.

### Beispiele. *

1.

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0.$$

**Auflösung.**

Die geradstelligen Glieder sind negativ, folglich die zu suchenden Wurzeln positiv, §. 228, Zusatz.

Die Factoren des Absolutgliedes sind: 1, 2, 5, 10, wovon die 3 ersten der Gleichung genügen; denn es ist:

$$1 - 8 + 17 - 10 = 0, \text{ wenn } \alpha = 1,$$
$$8 - 32 + 34 - 10 = 0, \quad „ \quad \beta = 2,$$
$$125 - 200 + 85 - 10 = 0, \quad „ \quad \gamma = 5,$$

folglich:

$$x_1 = 1; \; x_2 = 2; \; x_3 = 5.$$

2.

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0.$$

**Auflösung.**

Die zwei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge deuten auf zwei positive und eine negative Wurzel, cf. §. 228. Die Factoren des Absolutgliedes sind 1, 3, 4, 6, 12; davon genügt nur + 4 der Gleichung, desshalb ist:

$$x_1 = 4 \text{ und } x - 4 = 0.$$

Mithin:

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 12}{x - 4} = x^2 - 3 = 0$$

und

$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3};$$

---

* Von den hier folgenden Beispielen sind manche der Aufgaben-Sammlung von Heis und manche ältern Aufgaben-Sammlungen entnommen.

### 2. Auflösung.

$$y^3 - 3y - 2 = 0 = y^3 - y - 2y - 2 = y(y^2 - 1) - 2(y + 1).$$

Ferner:

$$[y(y - 1) - 2](y + 1) = 0$$

und

$$(y^2 - y - 2)(y + 1) = 0.$$

Nun ist:

$$y + 1 = 0 \text{ und } y_1 = -1,$$

und

$$y^2 - y - 2 = 0 \text{ und } y^2 - y = 2$$

$$y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$y - \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$$

$$y_2 = 2, \quad y_3 = -1.$$

5.

$$10x^3 + 24x^2 + 54 = 0.$$

### Auflösung.

Setzt man $x = \frac{y}{10}$, so ist:

$$\frac{y^3}{100} + \frac{24y^2}{100} + 54 = 0 = y^3 + 24y^2 + 5400,$$

setzt man noch $y = 6z$, so ist:

$$216z^3 + 864z^2 + 5400 = 0$$

und

$$z^3 + 4z + 25 = 0$$

Dieser Gleichung genügt der Factor:

$$-5, \quad z + 5 = 0.$$

Mithin:

$$\frac{z^3 + 4z^2 + 25}{z + 5} = z^2 - z + 5 = 0.$$

und

$$z^2 - z = -5$$

$$z^2 - z + \frac{1}{4} = -\frac{19}{4}$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2};$$

folglich:

$$y_1 = -30; \quad y_2 = \frac{6 + 6\sqrt{-19}}{2}; \quad y_3 = \frac{6 - 6\sqrt{-19}}{2}$$

und

$$x_1 = -3; \quad x_2 = \frac{3 + 3\sqrt{-19}}{10}; \quad x_3 = \frac{3 - 3\sqrt{-19}}{10}.$$

6.

$$x^3 - \frac{38}{28}x^2 + \frac{11}{28}x - \frac{1}{28} = 0.$$

Auflösung.

Es ist:

$$28x^3 - 38x^2 + 11x - 1 = 0;$$

setzt man $x = \frac{1}{y}$, so ist:

$$\frac{28}{y^3} - \frac{38}{y^2} + \frac{11}{y} - 1 = 0$$

und:

$$28 - 38y + 11y^2 - y^3 = 0$$

oder:

$$y^3 - 11y^2 + 38y - 28 = 0.$$

Nun ist nach der gegebenen Gleichung der Factor $+1$, der dieser Gleichung genügt; also $y - 1 = 0$.

Mithin:

$$\frac{y^3 - 11y^2 + 38y - 28}{y - 1} = y^2 - 10y + 28$$

und:

$$y^2 - 10y = -28$$

$$y^2 - 10y + 25 = -3$$

$$y - 5 = \pm\sqrt{-3}.$$

$$y = 5 \mp \sqrt{-3}.$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{5 + i\sqrt{3}} = \frac{5 - i\sqrt{3}}{28}, \quad x_3 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{28}.$$

## II. Auflösung durch die cardanische Formel. *

§. 236.

Allgemeine Auflösung.

Es sei gegeben:

$$1. \ x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

so erhält man leicht die Form:

$$2. \ x^3 + px + q = 0, \text{ cf. §. 231.}$$

* Diese Formel verdanken wir eigentlich dem Scipio Ferreo (1505); sie wurde aber erst vom Arzte und Mathematiker Hieronymo Cardano vervollkommnet und durch Druck veröffentlicht (1545).

Setzt man $x = y + \alpha$ und substituirt diesen Werth in 2, so ist:

$$3.\ y^3 + 3\alpha y^2 + 3\alpha^2 y + \alpha^3 + p(y + \alpha) + q = 0$$

und:

$$y^3 + (y + \alpha)(3y\alpha + p) + \alpha^3 + q = 0;$$

setzt man:

$$3y\alpha + p = 0,$$

so ist:

$$\alpha = -\frac{p}{3y};$$

dann ist:

$$4.\ y^3 + \alpha^3 + q = 0 \text{ (wenn } 3y\alpha + p = 0 \text{ nach Gl. 3)}$$

und:

$$y^3 - \left(\frac{p}{3y}\right)^3 + q = 0 \text{ (p. S. des Werthes von } \alpha\text{)},$$

ebenso:

$$y^3 - \frac{p^3}{27y^3} + q = 0$$

und:

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$y^6 + qy^3 + \frac{q^2}{4} = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

$$y^3 + \frac{q}{2} = \pm\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$y^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

und:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Den Werth von $y^3$ in Gleichung 4 substituirt, gibt:

$$5.\ -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \alpha^3 + q = 0;$$

daraus:

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Nun ist $x = y + \alpha$, folglich:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\left(\sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}}\right).$$

Anmerkung 1. Die beiden andern Werthe lassen sich nach §. 235 leicht finden; denn ist $x_1 = m$, so ist $x - m = 0$ und die gegebene Gleichung:

$$x^3 + px + q = 0$$

durch $x - m$ dividirt, gibt:

$$x^2 + mx + (m^2 + p) = 0$$

$$x = -\frac{m}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-(4p + 3m^2)};$$

folglich:

$$x_2 = \frac{1}{2}(-m + i\sqrt{4p + 3m^2})$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(-m - i\sqrt{4p + 3m^2}).$$

Anmerkung 2. Ehe man zur Lösung einer Gleichung nach der cardanischen Formel schreitet, hat man genau die Vorzeichen der gegebenen Gleichung zu beachten; denn wenn gegeben ist:

$$x^3 - px - q = 0, \text{ so ist } x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

$$x^3 - px + q = 0, \text{ so ist } x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

$$x^3 + px - q = 0, \text{ so ist } x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}.$$

## §. 237.

### Beispiele.

1.

$$x^3 - 3x + 2 = 0.$$

### Auflösung.

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{2^2}{4} - \frac{3^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} - \frac{3^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = -2;$$

und:

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2} = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 2x = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = 1;$$

folglich:

$$x_1 = -2, \; x_2 = 1, \; x_3 = 1.$$

2.

$$x^3 - 12x - 16 = 0.$$

Auflösung.

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{16}{2} + \sqrt{\frac{16^2}{4} - \frac{12^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{16}{2} - \sqrt{\frac{16^2}{4} - \frac{12^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{8 + \sqrt{64 - 64}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{64 - 64}}$$

$$= 4;$$

mithin:

$$\frac{x^3 - 12x - 16}{x - 4} = x^2 - 4x + 4,$$

folglich:

$$x_2 = 2, \quad x_3 = 2.$$

3.

$$x^3 - 27x - 54 = 0.$$

Auflösung.

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{54}{2} + \sqrt{\frac{54^2}{4} - \frac{27^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{54}{2} - \sqrt{\frac{54^2}{4} - \frac{27^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{27} = 6;$$

mithin:

$$\frac{x^3 - 27x - 54}{x - 6} = x^2 + 6x + 9,$$

folglich:

$$x_2 = -3, \quad x_2 = -3.$$

4.

$$\frac{y^3}{5} - 6 = 2 + 1\frac{y}{5}.$$

Auflösung.

$$\frac{y^3}{5} - 6 = 2 + 1\frac{y}{5}$$

auf Null reducirt, gibt:

$$y^3 - 6y - 40 = 0.$$

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{40}{2} + \sqrt{\frac{40^2}{4} - \frac{6^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{40}{2} - \sqrt{\frac{40^2}{4} - \frac{6^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

$$= \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Hier erscheint die Wurzel für y irrational, was bei Anwendung der cardanischen Formel nicht selten ist. Um nun auf dem eingeschlagenen Wege die richtige Lösung zu erzielen, kann man also verfahren. Es sei:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = A + \sqrt{B},$$

so ist:

$$\begin{aligned} 20 + 14\sqrt{2} &= (A + \sqrt{B})^3 \\ &= A^3 + 3AB + 3A^2\sqrt{B} + B\sqrt{B} \\ &= A^3 + 3AB + (3A^2 + B)\sqrt{B}. \end{aligned}$$

Es ist offenbar, dass in vorstehender Gleichung 20 dem rationalen

$$A^3 + 3AB$$

und der irrationale Theil des Binoms

$$14\sqrt{2} \quad \text{(cf. §. 127, Zusätze)}$$

dem irrationalen

$$(3A^2 + B)\sqrt{B} \quad \text{(cf. §. 127, Zusätze)}$$

gleich ist. Desshalb ist:

$$\sqrt{B} = \sqrt{2},$$
$$B = 2,$$

und da:

$$(3A^2 + B)\sqrt{B} = 14\sqrt{2},$$

so ist:

$$3A + 2 = 14$$
$$A = \pm 2.$$

Mithin:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} \text{ und } \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2},$$

folglich:

$$y_1 = 4;$$

ferner:

$$\begin{aligned} \frac{y^3 - 6y - 40}{y - 4} &= y^2 + 4y + 10 \\ y^2 + 4y &= -10 \\ y^2 + 4y + 4 &= -\ 6 \\ y + 2 &= \pm\sqrt{-6}. \\ y_2 &= -2 + i\sqrt{6} \\ y_3 &= -2 - i\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Anmerkung. Die Lösung cubischer Gleichungen unter Anwendung der cardanischen Formel hat nicht selten grosse Schwierigkeit, namentlich wenn p negativ ist und im Ausdrucke:

$$\left(-\frac{4p^3}{27q^2}\right) \quad 4p^3 > 27q^2.$$

Denn in diesem Falle stösst man auf einen imaginären Ausdruck unter der Quadratwurzel und x scheint hier einen imaginären Werth zu haben, während es in Wirklichkeit drei reelle Werthe hat. Diese ganze Schwierigkeit wird umgangen, wenn man sich in diesem Falle der trigonometrischen Functionen bedient. Aber nicht blos beim casus irreducibilis auch in jenen Fällen bedient man sich der trigonometrischen Functionen mit Vortheil, bei denen die cardanische Formel zu reellen Werthen führen würde.

## III. Auflösung durch trigonometrische Functionen.

### §. 238.

**Erklärung.** Bei der Lösung cubischer Gleichungen von der Form:

$$x^3 \mp p\,x \pm q = 0$$

kann p positiv oder negativ sein, und wenn p negativ ist, kann wieder

$$4\,p^3 \gtreqless 27\,q^2$$

sein. Wir haben desshalb hier drei Fälle zu unterscheiden.

### Erster Fall (casus irreducibilis).

### §. 239.

**Allgemeine Auflösung.**

Es sei gegeben:

$$x^3 - p\,x \pm q = 0$$
$$\text{cond. } 4\,p^3 \geqq 27\,q^2.$$

Es ist nach einem trigonometrischen Satze:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

mithin:

$$\begin{aligned}\sin 3\,\alpha &= \sin\alpha\cos 2\,\alpha + \cos\alpha\sin 2\,\alpha\\ &= \sin\alpha\,(2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos^2\alpha\sin\alpha\\ &= 4\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha\\ &= 4\sin\alpha\,(1 - \sin^2\alpha) - \sin\alpha\\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,\end{aligned}$$

folglich:

$$\text{I. } \sin^3\alpha - \frac{3}{4}\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 3\,\alpha = 0.$$

Setzt man nun in der gegebenen Gleichung:

$$x = k\sin\alpha,$$

so ist:

$$\text{II. } k^3\sin^3\alpha - p\,k\sin\alpha + q = 0$$

und:

$$\sin^3 \alpha - \frac{p \sin \alpha}{k^2} + \frac{q}{k^3} = 0.$$

Aus der Vergleichung von I und II ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

1. $\frac{p}{k^2} = \frac{3}{4}$, somit $k^2 = \frac{4p}{3}$, folglich $k = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}}$.

2. $\frac{1}{4} \sin 3\alpha = \frac{q}{k^3}$, somit $\sin 3\alpha = \frac{4q}{k^3}$, folglich $\sin 3\alpha = \sqrt{\frac{27 q^2}{4 p^3}}$,

Nun hat aber der Winkel $(180^0 - 3\alpha)$ und der negative Winkel $-(180^0 + 3\alpha)$ denselben sinus:

$$\left(\sqrt{\frac{27 q^2}{4 p^3}}\right),$$

wie $\measuredangle 3\alpha$; somit hat $\measuredangle \alpha$ die drei Werthe

$$\alpha, \quad (60^0 - \alpha), \quad -(60^0 + \alpha).$$

Da aber

$$x = k \sin \alpha \text{ und } k = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}},$$

so ist:

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}} \sin \alpha$$

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}} \sin (60^0 - \alpha)$$

$$x_3 = \mp \sqrt{\frac{4p}{3}} \sin (60^0 + \alpha).$$

## §. 240.

### Beispiele.

1.

$$x^3 - 12x + 16 = 0.$$

### Auflösung.

$$p = 12, \quad q = -16.$$

$$\text{I. } k = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}} = \pm \sqrt{\frac{4 . 12}{3}} = \pm 4$$

$$\log k = 0{,}6020600$$

$$\text{II. } \sin 3\alpha = \sqrt{\frac{27 q^2}{4 p^3}} = \frac{3q}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}} = \frac{48}{12\sqrt{\frac{48}{3}}} = 1$$

$$\measuredangle 3\alpha = 90^0, \quad \measuredangle \alpha = 30^0.$$

$$\text{III. } x_1 = k \sin \alpha$$

$$= \log k \quad = 0{,}6020600$$

$$+ \log \sin \alpha = 9{,}6989700 - 10$$

$$= \quad 0{,}3010300$$

$$= 2$$

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}} \sin (60^0 - \alpha) = k \sin \alpha = 2$$

$$x_3 = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}} \sin (60^0 + \alpha) = -4.$$

2.

$$x^3 - 27x + 54 = 0.$$

**Auflösung.**

$$p = 27, \quad q = -54$$

$$\text{I. } k = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}} = \pm \sqrt{\frac{4 \,.\, 27}{3}} = \pm 6$$

$$\log k = 0{,}7781513$$

$$\text{II. } \sin 3\alpha = \sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}} = \frac{3q \,.\, 1}{p\sqrt{\frac{4p}{3}}} = \frac{3 \,.\, 54}{27\sqrt{\frac{4 \,.\, 27}{3}}} = 1,$$

$$\measuredangle 3\alpha = 90^0, \quad \measuredangle \alpha\, 30^0.$$

$$\text{III. } x_1 = k \sin \alpha$$

$$= \log k \quad = 0{,}7781513$$

$$+ \log \sin \alpha = 9{,}6989700 - 10$$

$$= 0{,}4771213$$

$$= 3$$

$$x_2 = k \sin (60 - \alpha) = 3$$

$$x_3 = \pm k \sin (60 + \alpha) = -6.$$

3.

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

**Auflösung.**

$$p = 7, \quad q = -6.$$

$$\text{I. } k = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}} = \pm \sqrt{\frac{28}{3}} = \begin{cases} \log 28 = 1{,}4471580 \\ -\log \ 3 = 0{,}4771213 \end{cases}$$

$$0{,}9700367$$

$$\log k = 2) \ \overline{0{,}4850184.}$$

II. $\sin 3\alpha = \frac{3q}{p\sqrt{\frac{4p}{3}}} = \frac{18}{7\sqrt{\frac{28}{3}}} = \begin{cases} \log 18 = 1{,}2552725 \\ -\log 7 = 9{,}1549020 - 10 \\ -\log\sqrt{\frac{28}{3}} = 9{,}5149816 - 10 \end{cases}$

$\log\sin 3\alpha = 9{,}9251561$

$$3\alpha = 57^0\,19'\,11{,}34''$$
$$\alpha = 19^0\,6'\,23{,}8''.$$

III. $x_1 = k\sin\alpha = \log k = 0{,}4850184$

$= \log\alpha = 9{,}5149816$

$0{,}0000000 = 1.$

$x_2 = k\sin(60^0 - \alpha) = \log k = 0{,}4850184$

$= \log(60^0 - \alpha) = 9{,}8160116$

$0{,}3010300 = 2.$

$x_3 = -k\sin(60^0 + \alpha) = 0{,}4850184$

$= 9{,}9921028$

$0{,}4771212 = -3.$

## Zweiter Fall.

### §. 241.

### Allgemeine Auflösung.

Es sei gegeben:

$$x^3 - px \pm p = 0$$
$$\text{cond. } 4p^3 \leqq 27q^2.$$

Setzt man in der card. Formel:

$$\sin^2\alpha = -\frac{4p^3}{27q^2},$$

so ist:

I. $$\sin\alpha = \sqrt{-\frac{4p^3}{27q^2}},$$

und:

$$q = \mp\sqrt{-\frac{4p^3}{27\sin^2\alpha}},$$

somit:

II. $$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\alpha}};$$

folglich:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\left(\sqrt[3]{1-\cos\alpha}+\sqrt[3]{1+\cos\alpha}\right), \text{ da } \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\left(\sqrt[3]{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt[3]{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= \mp\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right) \text{ p. S. aus II. u. Reduct.}$$

Sei nun:

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

und:

$$\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

so ist:

$$x = \mp\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) = \mp 2\,\frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin\beta}; \text{ (ist q neg. so gilt +).}$$

## §. 242.

### Beispiel.

$$x^3 - 4x - 5 = 0.$$

### Auflösung.

$$p = 4,\quad q = 5;\quad x = +\frac{2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin\beta}.$$

$$\text{I. } \sin\alpha = \sqrt{-\frac{4p^3}{27q^2}} = \sqrt{-\frac{4.4^3}{27.5^2}} = \sqrt{-\frac{256}{675}} = \left\{\begin{array}{r} +1 \\ \log 256 = 2{,}4082400-1 \\ -\log 675 = 2{,}8293038 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 1{,}5789362-2 \\ 2)\ \overline{0{,}7894681-1.} \end{array}$$

$$\log\sin\alpha = 9{,}7894681.$$

$$\sphericalangle\alpha = 38^0\,0'\,46{,}8'';\quad \frac{\alpha}{2} = 19^0\,0'\,23{,}4''.$$

$$\text{II. } \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{3} = 9{,}5371309$$

$$\begin{array}{r} +2 \qquad\qquad -2 \\ = 0{,}5371309-1 \\ 3)\ \overline{0{,}8457103-1.} \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 9{,}8457103,$$

$$\frac{\beta}{2} = 35^0\,1'\,48''; \quad \beta = 70^0\,3'\,36''.$$

$$\text{III. } x_1 = +\frac{2\sqrt{-\frac{4}{3}}}{\sin\beta} = \left\{\begin{array}{rl} \log 4 & = 0{,}6020600 \\ -\log 3 & = 0{,}4771213 \\ \hline & 0{,}1249387 \\ & 2)\ \overline{0{,}0624693} \\ +\log 2 & = 0{,}3010300 \\ \hline & +1 \\ & 0{,}3634993 - 1 \\ -\log\sin\beta & = 0{,}9731511 - 1 \\ \hline & 0{,}3903482 \end{array}\right.$$

$$x_1 = 2{,}456678\ldots$$

## Dritter Fall.

### §. 243.

### Allgemeine Auflösung.

Es sei gegeben:

$$x^3 + px \pm q = 0.$$

Setzt man in der cardanischen Formel:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{4p^3}{27q^2}},$$

so ist:

$$\text{I. } \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{4p^3}{27q^2},$$

somit:

$$q = \pm\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

und:

$$\text{II. } \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \mp\sqrt[3]{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}\sqrt{\frac{p}{3}},$$

folglich:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{\cos\alpha}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{\cos\alpha}}\right) \text{ (da } \sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}} = \frac{1}{\cos\alpha} \text{ cf. I.)}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}} + \sqrt[3]{\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}}\right)$$

$$= \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \left( \sqrt[3]{\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}} - \sqrt[3]{\frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}} \right) \text{ p. S. aus II. u. Reduct.}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Sei nun:

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

und

$$\sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2},$$

so ist:

$$x = \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \left( \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) = \pm 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{cotg} \beta; \text{ (ist q negativ, so gilt +).}$$

## §. 244.

### Beispiel.

$$x^3 + 8x - 9 = 0.$$

### Auflösung.

$$p = -8, \quad q = 9; \quad x = +2 \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{ctg} \beta.$$

$$\text{I. } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{4 p^3}{27 q^2}} = \sqrt{\frac{4 \,.\, 8^3}{27 \,.\, 9^2}} = \sqrt{\frac{2048}{2187}} = \left\{ \begin{array}{rr} +1 & \\ \log 2048 = 3{,}3113300 & -1 \\ -\log 2187 = 3{,}3398488 & \\ \hline +1 & -1 \\ 2)\ 0{,}9714812 & -1 \\ \hline 0{,}9857406 & -1. \end{array} \right.$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}9857406; \quad \sphericalangle \alpha = 44^0\, 3'\, 34{,}4''$$

$$\frac{\alpha}{2} = 22^0\, 1'\, 47{,}2''.$$

$$\text{II. } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \left\{ \begin{array}{rr} \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 9{,}6070590 & \\ +2 & -2 \\ = 0{,}6070590 & -1 \\ \hline 3)\ 0{,}8690196 & -1 \end{array} \right.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 9{,}8690196,$$

$$\frac{\beta}{2} = 36^0\, 29'\, 17'' \text{ und } \beta = 72^0\, 58'\, 34''.$$

$$\text{III. } x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\text{ctg}\,\beta = \sqrt{\frac{32}{3}}\,\text{ctg}\,\beta = \left\{\begin{array}{rl} \log 32 & = 1{,}5051500 \\ -\log\ 3 & = 0{,}4771213 \\ & \overline{\phantom{0}1{,}0280287} \\ & 2)\,\overline{\phantom{0}0{,}5140143} \\ +\log \text{ctg}\,\beta & = 9{,}4864974 \\ & \overline{\phantom{0}0{,}0005117.} \end{array}\right.$$

$$x_1 = 1$$

$$\frac{x^3 + 8x - 9}{x - 1} = x^2 + x + 9$$

$$x^2 + x = -9$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{35}\right).$$

## IV. Auflösung durch Näherungswerthe.

§. 245.

**Erklärung.** Durch Näherungswerthe löst man gewöhnlich diejenigen Gleichungen auf, die reelle ungleiche und irrationale und imaginäre Wurzeln haben.

**Lehrsatz.** Erhält man in einer Gleichung $G(x^n) = 0$ durch Substitution der reellen Grösse $\alpha$ statt der Unbekannten als Resultat positiv g und durch Substitution der reellen Grösse $\beta$ negativ h, so hat die Gleichung eine reelle Wurzel, die zwischen $\alpha$ und $\beta$ liegt.

**Beweis.**

Hier ist offenbar $\alpha < \beta$. Lässt man nun die Grösse $\alpha$ durch stetiges Wachsen in die Grösse $\beta$ übergehen und wird bei jedem Zuwachs auf's Neue substituirt, so muss ebenso stetig der Werth von $G(x^n)$ sich ändern und bei einer Aenderung muss er einmal gleich Null werden, ehe der positive Werth von $G(x^n)$ negativ wird. Nun wird aber $G(x^n)$ durch Substitution von $\alpha = +g$ und durch Substitution von $\beta = -h$; es hat also $G(x^n)$ in beiden Fällen eine reelle Wurzel, um so eher wenn $G(x^n) = 0$, und diese reelle Wurzel kann nur zwischen $\alpha$ und $\beta$ liegen.

**Zusatz.** Sind $\alpha$ und $\beta$ nur um die Einheit von einander verschieden $(\alpha + 1) = \beta$, so ist der wahre Werth von x um keine Einheit von $\alpha$ und $\beta$ entfernt.

# A. Newton'sche Näherungsmethode. *

## §. 246.

### Allgemeine Auflösung.

Gegeben ist:

$$x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + \ldots + Q = 0;$$

und die beiden Werthe, zwischen denen x liegt, seien w und w + 1 (cf. §. 245) und der wahre Werth von

$$x = w + q \quad (q < 1),$$

so ist unter Zugrundelegung des Newton'schen Binomialtheorems:

$$x^n = w^n + n w^{n-1} q + \frac{n(n-1)}{1.2} w^{n-2} q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} w^{n-3} q^3 + \ldots$$

$$+ A x^{n-1} = A w^{n-1} + (n-1) A w^{n-2} q + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} A w^{n-3} q^2 + \ldots$$

$$+ B x^{n-2} = B w^{n-2} + (n-2) B w^{n-3} q + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} B w^{n-4} q^2 + \ldots$$

$$+ C x^{n-3} = C w^{n-3} + (n-3) C w^{n-4} q + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} C w^{n-5} q^2 + \ldots$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad +$$

$$Q = Q$$

$$0 = 0;$$

folglich, unter Vernachlässigung der Potenzen von q, weil $q < 1$:

$$w^n + A w^{n-1} + B w^{n-2} + C w^{n-3} + \ldots + Q + [n w^{n-1} + (n-1) A w^{n-2}$$
$$+ (n-2) B w^{n-3} + (n-3) C w^{n-4} + \ldots +] q = 0;$$

mithin:

$$q = - \frac{w^n + A w^{n-1} + B w^{n-2} + C w^{n-3} + \ldots + Q}{n w^{n-1} + (n-1) A w^{n-2} + (n-2) B w^{n-3} + (n-3) C w^{n-4} + \ldots Q};$$

endlich:

$$x = w + q = w - \frac{w^n + A w^{n-1} + B w^{n-2} + C w^{n-3} + \ldots + Q}{n w^{n-1} + (n-1) A w^{n-2} + (n-2) B w^{n-3} + (n-3) C w^{n-4} + \ldots Q}$$

$$= \frac{(n-1) w^n + (n-2) A w^{n-1} + (n-3) B w^{n-2} + (n-4) C w^{n-3} + \ldots - Q}{n w^{n-1} + (n-1) A w^{n-2} + (n-2) B w^{n-3} + (n-3) C w^{n-4} + \ldots}.$$

Anmerkung. Will man diese allgemeine Formel für Gleichungen vom 3ten, 4ten, 5ten Grade specialisiren, so hat man blos für n die bestimmten Zahlgrössen 3, 4, 5 ... zu setzen. Z. B.:

---

* Methodus fluxionum et serierum infinit., c. ejd. explicatione ad curvarum geometriam, eine englische Uebersetzung von Colson 1736.

Gegeben ist:

$$\text{I. } x^3 + A x^2 + B x + C = 0,$$

so ist:

$$q = -\frac{w^3 + A w^2 + B w + C}{3 w^2 + 2 A w + B}$$

und:

$$x = w + q = \frac{2 w^3 + A w^2 - C}{3 w^2 + 2 A w + B}.$$

$$\text{II. } x^4 + A x^3 + B x^2 + C x + D = 0,$$

so ist:

$$q = -\frac{w^4 + A w^3 + B w^2 + C w + D}{4 w^3 + 3 A w^2 + 2 B w + C}$$

und:

$$x = w + q = \frac{3 w^4 + 2 A w^3 + B w^2 - D}{4 w^3 + 3 A w^2 + 2 B w + C}.$$

## §. 247.

### Beispiele.

1.

$$x^3 - 12 = 0.$$

### Auflösung.

Hier liegt offenbar der Werth von x zwischen 2 und 3.

Nun ist:

$$x = \frac{(n-1) w^n + A}{n w^{n-1}},$$

folglich hier:

$$w_1 \text{ von } x_1 = \frac{2 . 2^3 + 12}{3 . 2^2} = \frac{7}{3},$$

$$w_2 \text{ von } x_1 = \frac{2 . \left(\frac{7}{3}\right)^3 + 12}{3 . \left(\frac{7}{3}\right)^2} = 2{,}29 \ldots$$

Anmerkung 1. In den meisten Fällen genügt der erste oder zweite Näherungswerth von x. Wo das nicht der Fall ist, wiederholt man das obige Verfahren 3, 4 mal und mit jedem Male kommt man dem wahren Werthe von x näher.

Anmerkung 2. Der Formel

$$x = \frac{(n-1) w^n + A}{n w^{n-1}} = \frac{1}{n} \left((n-1) w + \frac{A}{w^{n-1}}\right)$$

kann man sich bedienen, um eine irrationale Zahl, die bis auf m Stellen radicirt ist, bis auf 2 m Stellen genau zu radiciren. Z. B.:

$$\sqrt[3]{15} = 2.4662 \ldots$$

Es ist:

$$\frac{A}{w^{n-1}} = \frac{15}{6,08214244} = 2,46623622$$

$$+ 2w \qquad = 4,93240000$$

$$7,39863622$$

$$3)\ \overline{\qquad\qquad}$$

$$\sqrt[3]{15} = 2,46621207.$$

2.

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 52 = 0.$$

**Auflösung.**

Der eine Werth von x liegt zwischen 3 und 4; desshalb ist:

$$w_1 \text{ von } x_1 = \frac{2 \,.\, 3^3 + 2 \,.\, 3^2 + 52}{3 \,.\, 3^2 + 2 \,.\, 2 \,.\, 3 + 3} = \frac{62}{21},$$

$$w_2 \text{ von } x_1 = \frac{2 \,.\, \left(\frac{62}{21}\right)^3 + 2\left(\frac{62}{21}\right)^2 + 52}{3 \,.\, \left(\frac{62}{21}\right)^2 + 2 \,.\, 2 \,.\, \frac{62}{21} + 3} = \frac{2 \,.\, \frac{238328}{9261} + 2 \,.\, \frac{3844}{441} + 52}{3 \,.\, \frac{3844}{441} + \frac{248}{21} + 3}$$

$$= \frac{1119676}{9261} : \frac{16740}{441} = \frac{279919}{87885} = 3,18\ldots$$

3.

$$x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0.$$

**Auflösung.**

Der eine Werth von x liegt zwischen 5 und 6; desshalb ist:

$$w_1 \text{ von } x_1 = \frac{2 \,.\, 5^3 - 15 \,.\, 5^2 + 109}{3 \,.\, 5^2 - 2 \,.\, 15 \,.\, 5 + 72} = \frac{250 - 375 + 109}{75 - 150 + 72} = 5,3.$$

$$w_2 \text{ von } x_1 = \frac{2\,(5,3)^3 - 15\,(5,3)^2 + 109}{3\,(5,3)^2 - 2 \,.\, 15 \,.\, 5,3 + 72} = 5,34\ldots$$

Anmerkung 1. Die Werthe $x_2$ und $x_3$ lassen sich zwar auf dieselbe Weise bestimmen. Doch wird man eher zum Ziele kommen, wenn man $x_1 = 5,34\ldots$ auf Null reducirt und nach §. 227 operirt.

Anmerkung 2. Die Newton'sche Methode führt zwar rasch zum Ziele, allein sie erleidet nicht allgemeine Anwendung, denn sie führt nur unter der Bedingung zu richtigen Resultaten, dass $(w + q)$ dem wahren Werthe von x sich mehr nähere als w, wenn w ein Näherungswerth einer gegebenen Gleichung ist. Um sich zu vergewissern, ob das der Fall ist, müsste man die Näherungswerthe ihrer reellen und die reellen Theile ihrer imaginären Wurzeln kennen, was nicht selten seine Schwierigkeit hat.

## B. Die Lagrange'sche Methode * durch absteigende Stufenbrüche. **

### §. 248.

#### Allgemeine Auflösung.

Gegeben ist:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Liegt der Werth von x zwischen $\alpha$ und $\beta$ und ist:

$$\alpha + 1 = \beta, \text{ cf. §. 245},$$

so ist:

$$x = \alpha + \frac{1}{y}$$

etwa. Diesen Werth in der gegebenen Gleichung substituirt, gibt:

$$y^3 + p_2 y + q_2 = 0,$$

$$y = \beta + \frac{1}{z} \quad (z > 1),$$

gibt:

$$z^3 + p_3 z + q_3 = 0,$$

$$z = \gamma + \frac{1}{t} \quad (t > 1),$$

gibt:

$$t^3 + p_4 t + q_4 = 0,$$

$$t = \delta + \frac{1}{u} \quad (u > 1) \ldots$$

Die Quotienten des Stufenbruches sind:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots.$$

### §. 249.

#### Beispiel.

$$x^3 - 4x - 5 = 0.$$

#### Auflösung.

Setzt man:

$$1.\ x = 2 + \frac{1}{y},$$

so ist p. S.:

$$\left(2 + \frac{1}{y}\right)^3 - 4\left(2 + \frac{1}{y}\right) - 5 = 0,$$

---

* Traité de la résolution des équations numeriques.

** cf. den hier vorausgehenden Abschnitt über Stufenbrüche.

$$8 + \frac{12}{y} + \frac{6}{y^2} + \frac{1}{y^3} - 8 - \frac{4}{y} - 5 = 0,$$

$$5\,y^3 - 8\,y^2 - 6\,y - 1 = 0.$$

$$2.\ y = 2 + \frac{1}{z}.$$

$$5\left(2 + \frac{1}{z}\right)^3 - 8\left(2 + \frac{1}{z}\right)^2 - 6\left(2 + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0,$$

$$40 + \frac{60}{z} + \frac{30}{z^2} + \frac{5}{z^3} - 32 - \frac{32}{z} - \frac{8}{z^2} - 12 - \frac{6}{z} - 1 = 0,$$

$$\frac{22}{z} + \frac{22}{z^2} + \frac{5}{z^3} - 5 = 0,$$

$$5\,z^3 - 22\,z^2 - 22\,z - 5 = 0.$$

$$3.\ z = 5 + \frac{1}{t}.$$

$$5\left(5 + \frac{1}{t}\right)^3 - 22\left(5 + \frac{1}{t}\right)^2 - 22\left(5 + \frac{1}{t}\right) - 5 = 0,$$

$$625 + \frac{375}{t} + \frac{75}{t^2} + \frac{5}{t^3} - 550 - \frac{220}{t} - \frac{22}{t^2} - 110 - \frac{22}{t} - 5 = 0,$$

$$40\,t^3 - 133\,t^2 - 53\,t - 5 = 0.$$

$$4.\ t = 3 + \frac{1}{u}.$$

$$40\left(3 + \frac{1}{u}\right)^3 - 133\left(3 + \frac{1}{u}\right)^2 - 53\left(3 + \frac{1}{u}\right) - 5 = 0,$$

$$1080 + \frac{1080}{u} + \frac{360}{u^2} + \frac{40}{u^3} - 1197 - \frac{798}{u} - \frac{133}{u^2} - 159 - \frac{53}{u} - 5 = 0,$$

$$281\,u^3 - 229\,u^2 - 227\,u - 40 = 0.$$

$$5.\ u = 1 + \frac{1}{v}.$$

$$281\left(1 + \frac{1}{v}\right)^3 - 229\left(1 + \frac{1}{v}\right)^2 - 227\left(1 + \frac{1}{v}\right) - 40 = 0,$$

$$281 + \frac{843}{v} + \frac{843}{v^2} + \frac{281}{v^3} - 229 - \frac{458}{v} - \frac{229}{v^2} - 227 - \frac{227}{v} - 40 = 0.$$

$$\frac{158}{v} + \frac{614}{v^2} + \frac{281}{v^3} - 215 = 0,$$

$$158\,v^2 + 614\,v + 281 - 215\,v^3 = 0,$$

$$215\,v^3 - 158\,v^2 - 614\,v - 281 = 0.$$

$$6.\ v = 2 + \frac{1}{w},\quad w = 2 + \ldots$$

Somit sind die Quotienten:

$$2,\ 2,\ 5,\ 3,\ 1,\ 2,\ 2 \ldots$$

und die Näherungswerthe:

$$2\frac{1}{2},\ 2\frac{5}{11},\ 2\frac{16}{35},\ 2\frac{21}{46},\ 2\frac{58}{127},\ 2\frac{253}{554},$$

folglich:

$$x_1 = 2{,}4566787 \ldots$$

Anmerkung. Ebenso kann x durch die aufsteigenden Stufenbrüche gefunden werden (Methode von Heis).

## §. 250.

**Erklärung.** Hat man nach der Lagrange'schen Methode den Wurzelwerth bis auf $\frac{1}{100}$ bestimmt und genügt dieser Werth noch nicht, so kann man von da aus auf die Newton'sche Methode übergehen, um rascher zu den erforderlichen Resultaten zu gelangen. Z. B.:

$$x^3 - 12x^2 + 45x - 53 = 0.$$

Auflösung.

$$x = 5 + \frac{1}{y} \text{ p. S. u. Reduct.}$$

$$3y^3 - 3y - 1 = 0$$

$$y = 1 + \frac{1}{z}, \text{ p. S. u. Reduct.}$$

$$z^3 - 6z^2 - 9z - 3 = 0$$

$$z = 7 + \frac{1}{t}.$$

Hier sind die Quotienten:

$$5,\ 1,\ 7$$

und die Näherungswerthe:

$$5,\ 6,\ \frac{47}{8} = 5{,}87 \ldots$$

nach Newton:

$$x_1 = \frac{2 \cdot (5{,}87)^3 - 12\,(5{,}87)^2 + 53}{3 \cdot (5{,}87)^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5{,}87 + 45} = \frac{44{,}041206}{7{,}4907} = 5{,}8794 \ldots$$

## §. 251.

Aufgaben.

1. $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0.$ $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5.$
2. $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0.$ $x_1 = 3,\ x_2 = 5,\ x_3 = 4.$

3. $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0.$ Wurzeln: 1, 3, 5.

4. $x^3 - 20x^2 + 113x - 154 = 0.$ Wurzeln: 7, 11, 2.

5. $x^3 - 9x^2 + 11x + 21 = 0.$ Wurzeln: 3, 7, $-1$.

6. $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0.$ Wurzeln: 4, 2, $-1$.

7. $x^3 - 4x^2 + 3x - 12 = 0.$ Wurzeln: 4, $\sqrt{-3}$, $-\sqrt{-3}$.

8. $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0.$ Wurzeln: 1, $-2$, $-4$.

9. $x^3 - 63x - 162 = 0.$ Wurzeln: $-3$, $-6$, 9.

10. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$ Wurzeln: 3, 1, $-2$.

11. $x^3 + 10x^2 + 31x + 30 = 0.$ Wurzeln: $-2$, $-3$, $-5$.

12. $x^3 - 7x^2 - 14x + 48 = 0.$ Wurzeln: 2, 8, $-3$.

13. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$ Wurzeln: 1, 2, 3.

14. $x^3 + 6x^2 - 9x - 14 = 0.$ Wurzeln: 2, $-7$, $-1$.

15. $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0.$ Wurzeln: 1, 2, 6.

16. $x^3 - 5x^2 - 46x - 40 = 0.$ Wurzeln: 10, $-4$, $-1$.

17. $x^3 - 10x^2 + 23x - 14 = 0.$ Wurzeln: 1, 2, 7.

18. $x^3 - 6x^2 - 184x - 576 = 0.$ Wurzeln: 18, $-8$, $-4$.

19. $x^3 + 20x^2 + 123x + 216 = 0.$ Wurzeln: $-3$, $-8$, $-9$.

20. $x^3 + 14x^2 + 41x - 56 = 0.$ Wurzeln: 1, $-7$, $-8$.

21. $x^3 + 20x^2 + 79x + 60 = 0.$ Wurzeln: $-15$, $-1$, $-4$.

22. $x^3 - 12x - 28 = 0.$ $z_1 = 4{,}3021\ldots$

23. $x^3 - 3x^2 - 17x + 43 = 0.$ $x_1 = 2{,}29$, $x_2 = 4{,}72$, $x_3 = -3{,}982.$

24. $2x^3 - 24x^2 + 82x - 84 = 0.$ Wurzeln: 2, 3, 7.

25. $x^3 + 37x^2 + 320x + 500 = 0.$ Wurzeln: $-25$, $-2$, $-10$.

26. $3x^3 - 90x^2 + 621x - 1134 = 0.$ Wurzeln: 3, 6, 21.

27. $x^3 - 31x - 30 = 0.$ Wurzeln: 6, $-1$, $-5$.

28. $10x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 0.$ Wurzeln: $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{-3 \pm i}{10}$.

29. $x^3 - 4x^2 - 20x + 48 = 0.$ Wurzeln: 2, $-4$, 6.

30. $5x^3 - 2x^2 - 41x - 34 = 0.$ Wurzeln: $-1$, $3\frac{2}{5}$, $-2$.

31. $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0.$ $x_1 = 3{,}3622\ldots$

32. $x^3 + 6x^2 - 18x + 10 = 0.$ Wurzeln: 1,5139, 0,7971, $-8{,}311\ldots$

33. $x^3 - 48x + 128 = 0.$ Wurzeln: $-8$, 4, 4.

34. $x^3 - 19x + 30 = 0.$ Wurzeln: 3, 2, $-5$.

35. $x^3 + 38x^2 + 107x + 70 = 0.$ Wurzeln: $-35$, $-1$, $-2$.

36. $x^3 + 2x + 33 = 0.$ $x_1 = -3.$

37. $x^3 + 74x^2 + 823x + 1830 = 0.$ Wurzeln: $-61$, $-10$, $-3$.

38. $x^3 - 9x^2 + 25x - 25 = 0.$ $x_1 = 5$, $x_{2,3} = 2 \pm i.$

39. $x^3 - 14x^2 + 45x - 50 = 0.$ $x_1 = 10$, $x_2 = 2 + i$, $x_3 = 2 - i.$

| | |
|---|---|
| 40. $x^3 - 19x + 30 = 0.$ | $x_1 = -5,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$ |
| 41. $x^3 - 7x + 7 = 0.$ | $x_1 = -3{,}049\ldots,\ x_2 = 1{,}692\ldots,\ x_3 = 1{,}357\ldots$ |
| 42. $x^3 - 2x - 7 = 0.$ | $x_1 = 2{,}49,\ x_2 = -1{,}83,\ x_3 = -0{,}65\ldots$ |
| 43. $48x^3 - 86x^2 + 51x - 10 = 0.$ | Wurzeln: $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{8}.$ |
| 44. $3x^3 - 2x - 20 = 0.$ | Wurzeln: $2,\ \frac{-3+i\sqrt{21}}{3},\ \frac{-3-i\sqrt{21}}{3},$ |
| 45. $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0.$ | Wurzeln: $1,\ -2,\ 5.$ |
| 46. $x^3 - 14x^2 + 41x - 10 = 0.$ | Wurzeln: $10,\ 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}.$ |
| 47. $x^3 - 13x - 12 = 0.$ | Wurzeln: $4,\ -3,\ -1.$ |
| 48. $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0.$ | Wurzeln: $\frac{1}{2},\ 1,\ 3.$ |
| 49. $x^3 + 10x^2 + 36x + 56 = 0.$ | Wurzeln: $-4,\ -3-i\sqrt{5},\ -3+i\sqrt{5}.$ |
| 50. $x^3 + 9x^2 + 25x + 25 = 0.$ | Wurzeln: $-5,\ -2+i,\ -2-i.$ |
| 51. $x^3 - 4x^2 - 3\frac{1}{4}x - 8\frac{3}{4} = 0.$ | Wurzeln: $5,\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$ |
| 52. $x^3 - x^2 - 4 = 0.$ | Wurzeln: $2,\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2},\ \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$ |
| 53. $x^3 + 345x - 12 = 0.$ | Wurzeln: $x_1 = 0{,}0348\ldots$ |
| 54. $x^3 + 8x^2 + 25x + 36 = 0.$ | Wurzeln: $-4,\ -2+i\sqrt{5},\ -2-i\sqrt{5}.$ |

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Heis §. 94, 95a, b; 96; 99–103.

---

## b. Biquadratische Gleichungen.

### §. 252.

**Erklärung 1.** In den biquadratischen Gleichungen tritt die Unbekannte in der vierten Potenz auf.

Der allgemeine Ausdruck einer geordneten vollständigen biquadratischen Gleichung ist:

$$x^4 \mp Bx^3 \pm Bx^2 \mp Cx \pm D = 0.$$

Die Grösse A, B, C, D bedeuten ganze Zahlen, die positiv oder negativ sein können.

**Erklärung 2.** Jede biquadratische Gleichung hat 4 Wurzeln (§. 225). Diese Wurzeln sind immer paarweise, entweder reell oder imaginär (§. 226), vorhanden. Um die Wurzeln biquadratischer Gleichungen zu

bestimmen, bedient man sich theils derselben Methoden, wie bei den cubischen Gleichungen, theils besonderer, je nach der Beschaffenheit einer gegebenen Gleichung.

Auch hier wollen wir vor der Behandlung der verschiedenen Methoden noch einiger s p e c i e l l e r F ä l l e gedenken.

### §. 253.

### Erster Fall.

$$x^4 \mp D = 0;$$

wäre $D = p^4$, so ist:

$$1.\ x^4 - p^4 = 0,$$

mithin:

$$(x^2 + p^2)(x^2 - p^2) = 0$$

und

$$x^2 + p^2 = 0;$$

und

$$x^2 - p^2 = 0;$$

folglich:

$$x_{1,2} = +\sqrt{p^2} = \pm p$$

und

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{-p^2} = \pm p i;$$

$$2.\ x^4 + p^4 = 0;$$

somit:

$$x^4 = -p^4$$

und

$$x^2 = \pm\sqrt{-p^4} = \pm p^2 i;$$

folglich:

$$x_{1,2} = \pm p\sqrt{i}$$

$$x_{3,4} = \pm p\sqrt{-\,.\,i}.$$

### Zweiter Fall.

$$x^4 \pm 4 A x^3 + 6 A^2 x^2 \mp 4 A^3 x = B.$$

Die linke Seite wird ein vollständiges Biquadrat, wenn man hier auf beiden Seiten $A^4$ ergänzt, d. h.:

$$(x \pm A)^4 = A^4 + B$$

$$(x \pm A)^2 = \pm\sqrt{A^4 + B}$$

$$x \pm A = \pm\sqrt{\pm\sqrt{A^4 + B}}$$

$$x_{1,2,3,4} = \mp A \pm \sqrt{\pm\sqrt{A^4 + B}}.$$

### Dritter Fall.

$$x^4 + p x^2 + q = 0.$$

Setzt man $x^2 = y$, so ist:

$$y^2 + p y + q = 0$$ (cf. Abschnitt über quadratische Gleichungen).

## I. Auflösung durch Factorenzerlegung des Absolutgliedes.

### §. 254.

Gegeben ist:

$$x^4 \mp A x^3 \pm B x^2 \mp C x \pm D = 0.$$

Sind die Wurzeln:

$$\pm\alpha,\ \pm\beta,\ \pm\gamma,\ \pm\delta,$$

so ist:

$$\begin{aligned}(x \mp \alpha)(x \mp \beta)(x \mp \gamma)(x \mp \delta) = x^4 &\mp (\alpha + \beta + \gamma + \delta) x^3 \\ &\pm (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma\beta\delta + \gamma\delta) x^2 \\ &\mp (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\beta + \beta\gamma\delta) x \\ &\pm \alpha\beta\gamma\delta;\end{aligned}$$

folglich:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) &= A \\ (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) &= B \\ (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) &= C \\ \alpha\beta\gamma\delta &= D\end{aligned}\right\} \text{ cf. §. 225.}$$

### §. 255.

### Beispiele.

1.

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0.$$

#### Auflösung.

Hier sind drei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge, somit drei positive und eine negative Wurzel, cf. §. 228.

Die Factoren des Absolutgliedes sind:

1, 2, 3, 6, 9, 18;

davon genügen + 1 und + 2 der Gleichung.

Desshalb ist:

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18}{(x-1)(x-2)} = x^2 - 9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3;$$

folglich:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_{3,4} = \pm 3.$$

2.

$$x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 18 = 0.$$

**Auflösung.**

Hier sind zwei Zeichenwechsel und zwei Zeichenfolgen, somit zwei positive und zwei negative Wurzeln.

Die Factoren sind:

1, 2, 3, 6, 9, 18;

davon genügen der Gleichung $-2$ und $-3$.

Desshalb ist:

$$\frac{x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 18}{(x+2)(x+3)} = x^2 - 2x + 3$$

$$x^2 - 2x = -3$$

$$x^2 - 2x + 1 = -2$$

$$x = 1 \pm \sqrt{-2};$$

folglich:

$$x_1 = -2; \quad x_2 = -3; \quad x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{-2}.$$

3.

$$x^4 - \frac{19x^3}{4} + \frac{49x^2}{8} - \frac{11x}{4} + \frac{3}{8} = 0.$$

**Auflösung.**

Man setzt:

$$x = \frac{y}{4},$$

so ist:

$$\frac{y^4}{4^4} - \frac{19y^3}{4.4^3} + \frac{49y^2}{8.4^2} - \frac{11y}{4.4} + \frac{3}{8}$$

$$y^4 - 19y^3 + 98y^2 - 176y + 96;$$

hier sind vier Zeichenwechsel, somit vier positive Wurzeln.

Die Factoren sind:

1. 2, 3, 4, 6, 8 ...;

davon genügen der Gleichung $+1$ und $+2$.

Desshalb ist:

$$\frac{y^4 - 19y^3 + 98y^2 - 176y + 96}{(y-1)(y-2)} = y^2 - 16y + 48$$

$$y^2 - 16y = -48$$

$$y^2 - 16y + 64 = 16$$

$$y - 8 = \pm 4$$

$$y_3 = 4,\quad y_4 = 12;$$

folglich:

$$x_1 = \frac{1}{4};\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = 1;\ x_4 = 3.$$

4.

$$x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 5x^2 - 34x - 8 = 0.$$

**Auflösung.**

Factoren von 8 sind:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8;$$

davon genügen der Gleichung

$$-1,\ +2,\ +4.$$

Desshalb ist:

$$\frac{x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 5x^2 - 34x - 8}{(x+1)(x-2)(x-4)} = x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x = 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = 5$$

$$x = 2 \pm \sqrt{5};$$

folglich:

$$x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 4;\ x_4 = 2 + \sqrt{5};\ x_5 = 2 - \sqrt{5}.$$

# II. Auflösung nach der Ampère'schen Methode.

## §. 256.

### Allgemeine Auflösung.

Gegeben ist:

$$x^4 + px^2 \pm qx + r = 0.$$

Wären nun $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die vier Wurzeln dieser Gleichung, so wäre sie ein Product aus den Binomen:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta).$$

Mithin ist:

1. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$

2. $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = p.$

3. $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -q.$

4. $\alpha\beta\gamma\delta = r.$

Also auch:

5. $\gamma + \delta = -(\alpha + \beta)$ cf. 1.

6. $\alpha\beta + \gamma\delta = p - (\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta)$ cf. 2.
$= p - (\alpha + \beta)(\gamma + \delta).$

7. $\alpha\beta + \gamma\delta = p + (\alpha + \beta)^2$ cf. 5.

Ferner auch:

8. $\alpha\beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta(\alpha + \beta) = -q$ cf. 3.

9. $(\alpha\beta - \gamma\delta)(\alpha + \beta) = q$ p. S. aus 5.

10. $\alpha\beta - \gamma\delta = \dfrac{q}{\alpha + \beta}.$

Also auch:

11. $(\alpha\beta + \gamma\delta)^2 = [p + (\alpha + \beta)^2]^2$ cf. 7.

12. $(\alpha\beta - \gamma\delta)^2 = \dfrac{q^2}{(\alpha + \beta)^2}$ cf. 10.

---

$$4\alpha\beta\gamma\delta = [p + (\alpha + \beta)^2]^2 - \frac{q^2}{(\alpha + \beta)^2} \text{ p. Subtr.}$$

Endlich:

13. $4r = [p + (\alpha + \beta)^2]^2 - \dfrac{q^2}{(\alpha + \beta)^2}$ cf. 4.

Setzt

$$y = \alpha + \beta$$

und entwickelt die Gleichung 13, so erhält man die **allgemeine Gleichung**:

14. $y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0.$

Ist nun

$$y = A,$$

so ist:

I. $\alpha + \beta = A$

und

II. $\gamma + \delta = -A$ cf. 5,

ferner:

III. $\alpha\beta + \gamma\delta = p + A^2$ cf. 7,

und:

IV. $\alpha\beta - \gamma\delta = \dfrac{q}{A}$ cf. 10.

---

V. $2\alpha\beta = p + A^2 + \dfrac{q}{A}$ p. Add. von III u. IV.

VI. $2\gamma\delta = p + A^2 - \dfrac{q}{A}$ p. Subtr. IV. von III.

Aus diesen vorstehenden Gleichungen lassen sich leicht die Werthe für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ bestimmen und damit die vier Wurzeln einer gegebenen biquadratischen Gleichung.

## §. 257.

### Beispiele.

1.

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0.$$

### Auflösung.

Aus der gegebenen wird nach der allgemeinen Gleichung:

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0,$$

$$y^6 - 30y^4 + 129y^2 - 100 = 0,$$

$$y = 5, \quad y^2 = 25,$$

somit:

$$\text{I. } \alpha + \beta = 5$$

und

$$\text{II. } 2\alpha\beta = -15 + 25 + \frac{10}{5} = 12$$

ferner:

$$\gamma + \delta = -5$$

und

$$4\alpha\beta = 24.$$

$$\text{III. } 2\gamma\delta = -15 + 25 - 2 = 8$$

und

$$4\gamma\delta = 16;$$

folglich:

$$\begin{array}{rcr}
\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 & = & 25 \\
-4\alpha\beta & = & 24 \\
- & & - \\
\hline
\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 & = & 1 \\
\alpha - \beta & = & 1 \\
\alpha + \beta & = & 5 \\
\hline
\alpha & = & 3 \\
\beta & = & 2
\end{array}
\quad \text{und} \quad
\begin{array}{rcr}
\gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2 & = & 25 \\
4\gamma\delta & = & 16 \\
- & & - \\
\hline
\gamma^2 - 2\gamma\delta + \delta^2 & = & 9 \\
\gamma - \delta & = & \pm 3 \\
\gamma + \delta & = & -5 \\
\hline
\gamma & = & -1 \\
\delta & = & -4.
\end{array}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -1; \quad x_4 = -4.$$

2.

$$x^4 + 3x^2 - 10x + 6 = 0.$$

**Auflösung.**

Dies gibt nach der allgemeinen Gleichung:

$$y^6 + 6y^4 - 15y^2 - 100 = 0;$$

$$y = -2;\; y^2 = 4;$$

somit:

$$\text{I. } \alpha + \beta = -2$$

und

$$\text{II. } 2\alpha\beta = 3 + 4 + \frac{10}{2} = 12$$

ferner

$$\gamma + \delta = 2$$

und

$$4\alpha\beta = 24.$$

$$\text{III. } 2\gamma\delta = 3 + 4 - 5 = 2$$

und

$$4\gamma\delta = 4;$$

folglich:

$$\begin{array}{rcl} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 &=& 4 \\ 4\alpha\beta &=& 24 \\ - & & - \\ \hline \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 &=& -20 \\ \alpha - \beta &=& \pm\sqrt{-20} \\ \alpha + \beta &=& -2 \\ \hline \alpha &=& -1 + \sqrt{-20} \\ \beta &=& -1 - \sqrt{-20} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} \gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2 &=& 4 \\ -4\gamma\delta &=& 4 \\ - & & - \\ \hline \gamma^2 - 2\gamma\delta + \delta^2 &=& 0 \\ \gamma - \delta &=& 0 \\ \gamma + \delta &=& 2 \\ \hline \gamma &=& 1 \\ \delta &=& 1. \end{array}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-5};\; x_{3,4} = 1.$$

## III. Auflösung nach der Euler'schen Methode. *

### §. 258.

**Allgemeine Auflösung.**

Gegeben sei:

$$\text{I. } x^4 - Px^2 - Qx - R = 0.$$

Wäre in dieser Gleichung:

$$\text{1. } x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma},$$

* Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen, deutsch von Michelsen, Berlin 1791.

so könnte man $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ als die drei Wurzeln einer cubischen Gleichung von der Form:

2. $y^3 - p y^2 + q y - r = 0$

betrachten.

Dann ist offenbar:

3. $p = \alpha + \beta + \gamma.$
4. $q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma.$
5. $r = \alpha\beta\gamma.$

Nun ist auch:

6. $x^2 = \alpha + \beta + \gamma + 2\sqrt{\alpha\beta} + 2\sqrt{\alpha\gamma} + 2\sqrt{\beta\gamma}$ (Quadrat von Gl. 1.)

7. $x^2 - p = 2\sqrt{\alpha\beta} + 2\sqrt{\alpha\gamma} + 2\sqrt{\beta\gamma}$ (Differenz zwischen 6 und 3);

somit:

8. $x^4 - 2 p x^2 + p^2 = 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma + 4\beta\gamma + 8\sqrt{\alpha^2\beta\gamma} + 8\sqrt{\alpha\beta^2\gamma} + 8\sqrt{\alpha\beta\gamma^2}$ (Quadrat von 7).

und:

9. $4q = 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma + 4\beta\gamma$ cf. 4;

demnach:

10. $x^4 - 2 p x^2 + p^2 - 4q = 8\sqrt{\alpha^2\beta\gamma} + 8\sqrt{\alpha\beta^2\gamma} + 8\sqrt{\alpha\beta\gamma^2}$ (Differenz zwischen 8 und 9).

$$= 8\sqrt{\alpha\beta\gamma}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})$$

$$= 8\sqrt{r}.x \quad \text{(p. Subst. aus 1 und 5)},$$

endlich:

$$\text{II.}\quad x^4 - 2 p x^2 - 8\sqrt{r}.x + p^2 - 4q = 0.$$

Nun ergibt sich aus der Vergleichung von Gleichung I mit Gleichung II:

I. $2p = P$, somit $p = \frac{P}{2}$ und $p^2 = \frac{P^2}{4}$.

II. $8\sqrt{r} = Q$, somit $Q^2 = 64 r$, $r = \frac{Q^2}{64}$ und $\sqrt{r} = \frac{Q}{8} = \sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}.\sqrt{\gamma}$; cf. 5.

III. $p^2 - 4q = -R$, somit $\frac{P^2}{4} - 4q + R = 0$

und

$$q = \frac{P^2}{16} + \frac{R}{4};$$

und daraus erhalten wir die cubische Gleichung:

$$y^3 - p y^2 + q y - r = 0 \quad \text{(cf. 2)},$$

in welcher

$$y_1 = \alpha;\ y_2 = \beta;\ y_3 = \gamma;$$

und nun ist:

$$x = \pm\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma}.$$

Dies gibt die vier verschiedenen Werthe einer biquadratischen Gleichung; nur kommt es dabei vor Allem darauf an, ob

$$\frac{Q}{8} = \sqrt{r} = \sqrt{\alpha} . \sqrt{\beta} . \sqrt{\gamma}$$

positiv oder negativ ist.

Im ersten Falle ist:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}, \\ x_2 &= \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}, \\ x_3 &= -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}, \\ x_4 &= -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}, \end{aligned}$$

im zweiten Falle:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}, \\ x_2 &= \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}, \\ x_3 &= -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}, \\ x_4 &= -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}. \end{aligned}$$

## §. 259.

### Beispiele.

1.

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$$

**Auflösung.**

Es ist:

$$P = 25, \quad \text{folglich: } p = \frac{25}{2}$$

$$Q = -60, \quad \text{„} \quad \sqrt{r} = -\frac{60}{8}, \quad r = \frac{3600}{64} = \frac{225}{4}$$

$$R = 36 \quad \text{und} \quad q = \frac{P^2}{16} + \frac{R}{4} = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}.$$

Somit:

$$y^3 - \frac{25}{2}y^2 + \frac{769}{16}y - \frac{225}{4} = 0$$

$$y = \frac{z}{4},$$

also:

$$\frac{z^3}{64} - \frac{25}{32} z^2 + \frac{769}{64} z - \frac{225}{4} = 0$$

$$z^3 - 50 z^3 + 769 z - 3600 = 0$$

$$z = 9$$

und

$$\frac{z^3 - 50 z^2 + 769 z - 3600}{z - 9} = z^2 - 41 z + 400;$$

daraus:

$$z^2 - 41 z + \frac{1681}{4} = \frac{81}{4}$$

$$z - \frac{41}{2} = \pm \frac{9}{2}$$

Mithin:

$$y_1 = \frac{9}{4} (\alpha); \quad y_2 = \frac{25}{4} (\beta) \text{ und } y_3 = 4 (\gamma).$$

Da hier $\frac{Q}{8}$ negativ, so ist:

$$x_1 = \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{25}{4}} - \sqrt{4} = \frac{3 + 5 - 4}{2} = 2$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{25}{4}} + \sqrt{4} = \frac{3 - 5 + 4}{2} = 1$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{25}{4}} + \sqrt{4} = \frac{-3 + 5 + 4}{2} = 3$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{25}{4}} - \sqrt{4} = \frac{-3 - 5 - 4}{2} = -6.$$

2.

$$7 x^4 - 49 x^2 - 42 x = 0.$$

**Auflösung.** *

Zuerst ist die ganze Gleichung mit 7 zu dividiren; dann ist:

$$x^4 - 7 x^2 - 6 x = 0$$

und

$$P = 7, \text{ folglich } p = \frac{7}{2},$$

$$Q = 6, \quad „ \sqrt{r} = \frac{6}{8} \text{ und } r = \frac{36}{64} = \frac{9}{16},$$

$$R = 0 \text{ und } q = \frac{P^2}{16} + \frac{R}{4} = \frac{49}{16}.$$

---

* Diese Lösung nur beispielsweise; eine andere führt hier viel rascher zum Ziele.

Somit:

$$y^3 - \frac{7}{2} y^2 + \frac{49}{16} y - \frac{9}{16} = 0$$

$$y = \frac{z}{4}$$

$$z^3 - 14 z^2 + 49 z - 36 = 0$$

$$z_1 = 1$$

und

$$\frac{z^3 - 14 z^2 + 49 z - 36}{z - 1} = z^2 - 13 z + 36.$$

$$z^2 - 13 z = -36$$

$$z^2 - 13 z + \frac{169}{4} = \frac{25}{4}$$

$$z - \frac{13}{2} = \pm \frac{5}{2}.$$

$$z_2 = 9, \quad z_3 = 4.$$

Mithin:

$$y_1 = \frac{1}{4} (\alpha); \quad y_2 = \frac{9}{4} (\beta); \quad y_3 = 1 (\gamma).$$

Da hier $\frac{Q}{8}$ positiv, so ist:

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{1} = \frac{1 + 3 + 2}{2} = 3;$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{1} = -2.$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{1} = 0;$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{1} = -1.$$

## IV. Auflösung nach Luigi di Ferrara.

### §. 260.

#### Allgemeine Auflösung.

Gegeben sei:

$$x^4 + p x^2 + q x + r = 0.$$

Zerlegt man die gegebene Gleichung in eine andere von der Form:

$$(x^2 + m)^2 - (a x + b)^2 = 0,$$

so ist:

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + m)^2 - (ax + b)^2$$
$$= x^4 + 2mx^2 + m^2 - a^2x^2 - 2abx - b^2;$$

folglich:

1. $2m - a^2 = p;$
2. $2ab \quad = -q;$
3. $m^2 - b^2 \quad = r;$

desshalb ist auch:

4. $a^2 \quad = 2m - p$ (cf. 1) und $a = \pm\sqrt{2m - p};$
5. $b^2 \quad = m^2 - r$ (cf. 3) und $b = \pm\sqrt{m^2 - r}.$

---

6. $a^2b^2 = 2m^3 - pm^2 - 2mr + pr$ (Product aus 4 und 5).

und

7. $4a^2b^2 = 8m^3 - 4pm^2 - 8rm + 4pr;$
8. $4a^2b^2 = q^2$ cf. 2;

folglich:

$8m^3 - 4pm^2 - 8rm + 4pr = q^2$

und endlich:

9. $8m^3 - 4pm^2 - 8rm + 4pr - q^2 = 0.$

Aus dieser allgemeinen Gleichung lässt sich der Werth von m bestimmen und mit diesem die Werthe von den willkürlichen Grössen a und b nach 4 und 5. Desshalb ist dann die ganze Gleichung

$$(x^2 + m)^2 - (ax + b)^2 = 0$$

bestimmt.

Nun ist aber auch:

$$(x^2 + m)^2 = (ax + b)^2$$

und

$$x^2 + m = \pm ax + b),$$

10. $x^2 - ax = \quad b - m$
11. $x^2 + ax = -b - m$

daraus ergeben sich die vier Wurzeln.

**Zusatz.** Für die Gleichung:

$$x^4 + \pi x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

erhalten wir folgende Bestimmungsgleichungen:

1. $8m^3 - 4pm^2 + (2\pi q - 8r)m - \pi^2 r + 4pr - q^2 = 0.$
2. $a = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 2m - p}$

und

3. $b = \frac{\pi m - q}{2a}.$

## §. 261.

### Beispiele.

1.

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0.$$

### Auflösung.

Hier ist:

$$\pi = 3, \quad p = 7, \quad q = -27, \quad r = 18,$$

folglich nach Zusatz:

$$8m^3 + 28m^2 - 18m - 63 = 0,$$

$$m = \frac{n}{2},$$

$$n^3 + 7n^2 - 9n - 63 = 0$$

und

$$n_1 = 3,$$

somit:

$$\frac{n^3 + 7n^2 - 9n - 63}{n_1 - 3} = n^2 + 10n + 21,$$

$$n^2 + 10n = -21,$$

$$n^2 + 10n + 25 = 4,$$

$$n + 5 = \pm 2,$$

$$n_2 = -3; \quad n = -7$$

und

$$m_1 = \frac{3}{2}; \quad m_2 = -\frac{3}{2}; \quad m_3 = -\frac{7}{2};$$

ferner:

$$a_1 = \frac{7}{2}; \quad a_2 = \frac{5}{2}; \quad a_3 = \frac{3}{2}$$

und:

$$b_1 = -\frac{9}{2}; \quad b_2 = -\frac{9}{2}; \quad b_3 = -\frac{11}{2}.$$

Demnach ist:

I. $x^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right)x = -\frac{9}{2} - \frac{3}{2}$ und II. $x^2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right)x = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2}$

$$x^2 - 5x = -6 \qquad\qquad x^2 + 2x = 3$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{1}{4} \qquad\qquad x^2 + 2x + 1 = 4$$

$$x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2} \qquad\qquad x + 1 = \pm 2$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \qquad\qquad x_{3,4} = \pm 2 - 1.$$

Also:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -3.$$

# V. Auflösung durch Näherungswerthe (§. 245).

## A. Nach Newton (§. 246).

### §. 262.

**Beispiele.**

1.

$$x^4 - 4x - 100 = 0.$$

**Auflösung.**

Hier liegt ein Werth von x zwischen —3 und —4; desshalb ist:

$$w_1 \text{ von } x = \frac{3 . -3^4 + 100}{4 . -3^3 - 4} = -\frac{3 . 81 + 100}{-108 - 4} = -\frac{343}{112} = -3{,}06.$$

$$w_2 \text{ von } x = \frac{3(-3{,}06)^4 + 100}{4(-3{,}06)^3 - 4} = -3{,}0607\ldots$$

2.

$$x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0.$$

**Auflösung.**

Hier liegt zwar der eine Werth von x zwischen 1 und 2, wir setzen aber w = 1,5; desshalb ist:

$$w_1 \text{ von } x = \frac{3 . 1{,}5^4 - 2 . 1{,}5^2 + 8}{4 . 1{,}5^3 - 2 . 2 . 1{,}5 + 4} = \frac{15{,}1875 - 4{,}50 + 8}{13{,}5 - 6 + 4} = \frac{18{,}6875}{11{,}5} = 1{,}6.$$

$$w_2 \text{ von } x = \frac{3 . 1{,}6^4 - 2 . 1{,}6^2 + 8}{4 . 1{,}6^3 - 2 . 2 . 1{,}6 + 4} = \frac{3 . 6{,}5536 - 2 . 2{,}56 + 8}{4 . 4{,}096 - 4 . 1{,}6 + 4}$$

$$= \frac{19{,}6608 - 5{,}12 + 8}{16{,}384 - 6{,}4 + 4} = 1{,}6118.$$

Anmerkung. In dieser Aufgabe liegt der wahre Werth von x näher an w + q als an w, da w = 1 (§. 247, Anmerk. 2). Desshalb käme man auf dem Newton'schen Wege dem wahren Werthe von x immer ferner, wenn man nicht für $w_1$ 1,5 statt 1 und für $w_2$ 1,6 statt 1,62 . . . setzen würde.

## B. Nach Lagrange (§. 248).

### §. 263.

**Beispiel.**

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0.$$

## Auflösung.

1. $x = 3 + \frac{1}{y}$.

$$\left(3+\frac{1}{y}\right)^4 - 2\left(3+\frac{1}{y}\right)^3 - 3\left(3+\frac{1}{y}\right)^2 - 4\left(3+\frac{1}{y}\right) + 5 = 0$$

$$81 + \frac{108}{y} + \frac{54}{y^2} + \frac{12}{y^3} + \frac{1}{y^4} - 54 - \frac{54}{y} - \frac{18}{y^2} - \frac{2}{y^3} - 27 - \frac{18}{y} - \frac{3}{y^2} - 12 - \frac{4}{y} + 5 = 0$$

$$\frac{32}{y} + \frac{33}{y^2} + \frac{10}{y^3} + \frac{1}{y^4} - 7 = 0$$

$$7y^4 - 32y^3 - 33y^2 - 10y - 1 = 0.$$

2. $y = 5 + \frac{1}{z}$.

$$7\left(5+\frac{1}{z}\right)^4 - 32\left(5+\frac{1}{z}\right)^3 - 33\left(5+\frac{1}{z}\right)^2 - 10\left(5+\frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

$$4375 + \frac{3500}{z} + \frac{1050}{z^2} + \frac{140}{z^3} + \frac{7}{z^4} - 4000 - \frac{2400}{z} - \frac{480}{z^2} - \frac{32}{z^3} - 825 - \frac{330}{z}$$

$$- \frac{32}{z^2} - 50 - \frac{10}{z} - 1 = 0$$

$$\frac{760}{z} + \frac{538}{z^2} + \frac{108}{z^3} + \frac{7}{z^4} - 501 = 0$$

$$501z^4 - 760z^3 - 538z^2 - 108z - 7 = 0.$$

3. $z = 2 + \frac{1}{v}$.

$$501\left(2+\frac{1}{v}\right)^4 - 760\left(2+\frac{1}{v}\right)^3 - 538\left(2+\frac{1}{v}\right)^2 - 108\left(2+\frac{1}{v}\right) - 7 = 0$$

$$8016 + \frac{16032}{v} + \frac{12024}{v^2} + \frac{4008}{v^3} + \frac{501}{v^4} - 6080 - \frac{9120}{v} - \frac{4560}{v^2} - \frac{760}{v^3}$$

$$- 2152 - \frac{2152}{v} - \frac{538}{v^2} - 216 - \frac{108}{v} - 7 = 0$$

$$\frac{4652}{v} + \frac{6926}{v^2} + \frac{248}{v^3} + \frac{501}{v^4} - 439 = 0$$

$$439v^4 - 4652v^3 - 6926v^2 - 3248v - 501 = 0.$$

4. $v = 12 + \frac{1}{w} \ldots$

Demnach sind die Quotienten des Stufenbruches:

3, 5, 2, 12,

und die Näherungswerthe:

$$3,\ 3\frac{1}{5},\ 3\frac{2}{11},\ 3\frac{25}{137}.$$

Mithin:

$$x = 3,182 \ldots$$

# VI. Auflösung reciproker Gleichungen und durch reciproke.

## §. 264.

**Erklärung 1.** Geordnete und auf Null reducirte höhere Gleichungen, in welchen das erste und letzte Glied, das zweite und zweitletzte, überhaupt die von der Mitte gleich weit abstehenden Glieder **gleiche Coëfficienten** haben, heissen reciprok.

Sind die reciproken Gleichungen vom $2\,n^{ten}$ (geraden) Grade, so haben die gleiche Coëfficienten gleiche Vorzeichen, sind sie aber vom $(2\,n + 1)^{ten}$ (ungeraden) Grade, so haben die gleichen Coëfficienten auch entgegengesetzte Vorzeichen.

**Erklärung 2.** Diese Gleichungen heissen darum reciprok, weil sie reciproke Wurzelwerthe haben, d. h. wenn eine Wurzel $= \alpha$ ist, so ist die andere $= \frac{1}{\alpha}$.

Die allgemeinen Ausdrücke reciproker Gleichungen sind:

$$\text{I.}\quad x^{2n} \mp A\,x^{2n-1} \pm B\,x^{2n-2} + \ldots \pm B\,x^2 \mp A\,x \mp 1 = 0.$$

$$\text{II}\quad x^{2n+1} \mp A\,x^{2n} \pm B\,x^{2n-1} + \ldots \pm B\,x^2 \mp A\,x \mp 1 = 0.$$

$$\text{III.}\quad x^{2n+1} \mp A\,x^{2n} \mp B\,x^{2n-1} + \ldots \pm B\,x^2 \pm A\,x \pm 1 = 0.$$

## §. 265.

**Lehrsatz.** In reciproken Gleichungen sind die Wurzeln paarweise zu einander reciprok.

### Beweis.

Es sei die Gleichung:

$$x^{2n} + A\,x^{2n-1} + B\,x^{2n-2} + \ldots + B\,x^2 + A\,x + 1 = 0.$$

Ist in dieser

$$x_1 = \alpha,$$

so ist:

$$x_2 = \frac{1}{a}.$$

Denn wenn $x = \alpha$, so erhält man durch Substitution dieser Wurzel in der gegebenen Gleichung:

$$\alpha^{2n} + A\alpha^{2n-1} + B\alpha^{2n-2} + \ldots + B\alpha^2 + A\alpha + 1 = 0.$$

Diese Gleichung durch $\alpha^{2n}$ dividirt, gibt:

$$1 + A\left(\frac{1}{\alpha}\right) + B\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \ldots + B\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n-2} + A\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n} = 0,$$

durch Ordnung der vorstehenden Gleichung erhält man:

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n} + A\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n-1} + B\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n-1} + \ldots + B\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + A\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1 = 0.$$

Da nun sowohl $\alpha$ als $\frac{1}{\alpha}$ der Gleichung genügen, so müssen beide Werthe Wurzeln der gegebenen Gleichung sein; also:

$$x_1 = \alpha \text{ und } x_2 = \frac{1}{\alpha}.$$

**Zusatz.** Sind in einer reciproken Gleichung vom $2n^{ten}$ Grade n nicht reciproke Wurzeln bestimmt, so sind mit diesen die übrigen Wurzeln der Gleichung schon gegeben.

## §. 266.

**Lehrsatz.** Jede reciproke Gleichung vom $(2n+1)^{ten}$ Grade lässt sich auf eine reciproke Gleichung vom $2n^{ten}$ Grade reduciren.

### Beweis.

Es sei die Gleichung:

$$x^{2n+1} + Ax^{2n} + Bx^{2n-1} + \ldots + Bx^2 + Ax + 1 = 0.$$

In dieser Gleichung ist offenbar $x = -1$, denn setzt man diesen Werth von x ein, so erhält man:

$$-1 + A - B + \ldots + B - A + 1 = 0.$$

Die gegebene Gleichung lässt sich demnach durch den Factor $(x+1)$ dividiren. Schreibt man sie hiezu, wie folgt:

$$(x^{2n+1} + 1) + Ax(x^{2n-1} + 1) + Bx^2(x^{2n-3} + 1) + \ldots = 0$$

und dividirt hierauf mit $x+1$, so ist der Quotient:

$$x^{2n}\begin{array}{r}-1\\+A\end{array}\Big\} x^{2n-1}\begin{array}{r}+1\\-A\\+B\end{array}\Big\} x^{2n-2} + \ldots \begin{array}{r}+1\\-A\\+B\end{array}\Big\} x^2 \begin{array}{r}-1\\+A\end{array}\Big\} x + 1 = 0$$

eine Gleichung vom $2n^{ten}$ Grade.

**Zusatz.** Ist die gegebene Gleichung:

$$x^{2n+1} + Ax^{2n} + Bx^{2n-1} + \ldots - Bx^2 - Ax - 1 = 0 \quad \text{cf. §. 264, III},$$

so ist der Factor $(x-1)$; somit:

$$\left.\begin{matrix}x^{2n}+1\\+A\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x^{2n-1}+1\\+A\\+B\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x^{2n-2}+\ldots+1\\+A\\+B\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x^{2}+1\\+A\end{matrix}\right\}x+1=0.$$

## §. 267.

**Lehrsatz.** Jede reciproke Gleichung vom $2\,n^{ten}$ Grade lässt sich auf eine Gleichung vom $n^{ten}$ Grade reduciren.

### Beweis.

Es sei die Gleichung:

$$x^{2n}+A\,x^{2n-1}+B\,x^{2n-2}+\ldots+B\,x^2+A\,x+1=0.$$

Dividirt man die gegebene Gleichung mit $x^n$, so ist:

$$\text{I. } x^n+A\,x^{n-1}+B\,x^{n-2}+\ldots+\frac{B}{x^{n-2}}+\frac{A}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}=0,$$

ferner:

$$\text{II. } \left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+A\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+B\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots.=0.$$

Setzt man:

1. $x+\frac{1}{x}=w$, so ist: $x^2+2+\frac{1}{x^2}=w^2$,

demnach:

2. $x^2+\frac{1}{x^2}=w^2-2$; und $x^3+3\,x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=w^3$

$$=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right);$$

demnach:

3. $x^3+\frac{1}{x^3}=w^3-3\,w$;

ferner:

4. $x^4+\frac{1}{x^4}=w^4-4\,w^2+2$,

und:

5. $x^5+\frac{1}{x^5}=w^5-5\,w^3+5\,w$,

und:

6. $x^6+\frac{1}{x^6}=w^6-6\,w^4+9\,w^2-2$,

endlich allgemein:

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

7. $x^n + \frac{1}{x^n} = w^n - n\,w^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} w^{n-4} + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} w^{n-6} \ldots$

8. $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} = w^{n-1} - (n-1)\,w^{n-3} + \frac{(n-1)(n-4)}{1.2} w^{n-5} + \ldots$

9. $x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} = w^{n-2} - (n-2)\,w^{n-4} + \frac{(n-2)(n-5)}{1.2} w^{n-6} \ldots$

Setzt man nun die Werthe von

$$x^n + \frac{1}{x^n} \ldots.$$

aus 7 — 9 in die Gleichung II. ein, so ist:

III. $w^n - n\,w^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} w^{n-4} + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} w^{n-6} \ldots$

$$+ A\left(w^{n-1} - (n-1)\,w^{n-3} + \frac{(n-1)(n-4)}{1.2} w^{n-5} + \ldots\right)$$

$$+ B\left(w^{n-2} - (n-2)\,w^{n-4} + \frac{(n-2)(n-5)}{1.2} w^{n-6} \ldots\right) + \ldots = 0.$$

## §. 268.

**Lehrsatz.** Wenn in einer reciproken Gleichung vom $2\,n^{ten}$ Grade, die gleich weit von der Mitte abstehenden Glieder entgegengesetzte Vorzeichen haben, so kann sie auf eine andere reciproke Gleichung mit gleichen Vorzeichen gebracht werden.

### Beweis.

Es sei:

$$x^{2n} + A\,x^{2n-1} + B\,x^{2n-2} + \ldots - B\,x^2 - A\,x - 1 = 0,$$

so ist offenbar:

$$(x^{2n} - 1) + A\,x\,(x^{2n-2} - 1) + B\,x^2\,(x^{2n-4} - 1) \ldots = 0.$$

Da nun diese Gleichung die zwei Wurzeln hat:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1,$$

so ist offenbar $(x^2 - 1)$ ein Factor von ihr. Wird sie mit diesem Factor dividirt, so ist:

$$x^{2n-2} - A\,x^{2n-3} \ldots - A\,x + 1 = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

## §. 269.

**Erklärung.** Aus dem Charakter der reciproken Gleichungen ist zu entnehmen, dass ihre Zahl nur beschränkt ist. Es lassen sich aber auch nicht reciproke Gleichungen auf reciproke reduziren:

## I.

### Alle Gleichungen von der Form:

$$\text{I. } x^m + A\beta x^{m-1} + B\beta^2 x^{m-2} + \ldots + B\beta^{m-2}x^2 + A\beta^{m-1}x + \beta^m = 0.$$

Dividirt man diese rationale ganze Function mit $\beta^m$, so ist:

$$\left(\frac{x}{\beta}\right)^m + A\left(\frac{x}{\beta}\right)^{m-1} + B\left(\frac{x}{\beta}\right)^{m-2} + \ldots + B\left(\frac{x}{\beta}\right)^2 + A\left(\frac{x}{\beta}\right) + 1 = 0.$$

Setzt man $\frac{x}{\beta} = y$, so erhält man die reciproke Gleichung:

$$\text{II. } y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + \ldots + By^2 + Ay + 1 = 0.$$

## II.

### Gleichungen von der Form:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Setzt man $x = y + v$, so ist:

$$\text{I. } y^4 + 4vy^3 + (6v^2 + p)y^2 + (4v^3 + 2pv + q)y + (v^4 + pv^2 + qv + r) = 0$$

Nun ist:

$$\text{II. } y^4 + A\beta y^3 + B\beta^2 y^2 + A\beta^3 y + \beta^4 = 0 \text{ (eine reciproke Gl. cf. §. 269 I.).}$$

Offenbar sind die beiden rationalen ganzen Functionen I. und II. einander gleich; desshalb ist:

$$1.\quad v^4 + pv^2 + qv + r = \beta^4,$$

$$2.\quad 4v^3 + 2pv + p = A\beta^3,$$

$$3.\quad 4v = A\beta,$$

folglich:

$$4.\quad 16v^2 = (A\beta)^2,$$

und:

$$(4v^3 + 2pv + q)^2 = (A\beta^3)^2.$$

Somit:

$$(v^4 + pv^2 + qv + r)\,16v^2 = \beta^4 . (A\beta)^2 = A^2\beta^6 = (A\beta^3)^2 . (1 \times 4).$$

Desshalb:

$$(v^4 + pv^2 + qv + r)\,16v^2 = (4v^3 + 2pv + q)^2$$

und:

$$16v^6 + 16pv^4 + 16qv^3 + 16rv^2 = 16v^6 + 16pv^4 + 4p^2v^2 + 8qv^3 + 4pqv + q^2.$$

Mithin:

$$\text{III. } 8qv^3 + 4(4r - p^2)v^2 - 4pqv - q^2 = 0.$$

Aus Gleichung III ist v zu bestimmen. Dieses in Gleichung I eingesetzt, führt auf eine reciproke Gleichung, die sich leicht auflösen lässt.

## §. 270.

### Beispiele.

#### 1.

#### Allgemeine Auflösung.

Es sei:

$$x^4 \mp A\beta x^3 + B\beta^2 x^2 \pm A\beta^3 x + \beta^4 = 0.$$

Diese rationale ganze Function hat die zwei Factoren:

$$(x^2 + p\beta x \mp \beta^2)(x^2 + q\beta x \mp \beta^2) = 0.$$

Nun ist auch:

$$x^4 + (p+q)\beta x^3 + (pq \mp 2)\beta^2 x^2 \mp (p+q)\beta^3 x + \beta^4 = 0.$$

Mithin:

$$p + q = A$$

$$pq = B \pm 2$$

folglich:

$$(p+q)^2 = A^2$$

und:

$$4pq = 4B \pm 8$$

$$- \qquad - \qquad \pm$$

desshalb:

$$p^2 - 2pq + q^2 = A^2 - 4B \pm 8$$

$$p - q = \sqrt{A^2 - 4B \pm 8}$$

und:

$$p + q = A$$

also:

$$p = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B \pm 8}}{2},$$

$$q = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B \pm 8}}{2}.$$

#### 2.

$$x^4 + 12x^3 + 34x + 22x + 1 = 0.$$

#### Auflösung.

$$A = 12; \; B = 34; \; \beta^4 = 1 \text{ und } \beta = 1$$

$$p = \frac{12 + \sqrt{144 - 136 + 8}}{2} = \frac{12 + 4}{2} = 8.$$

$$q = \frac{12 - \sqrt{144 - 136 + 8}}{2} = 4.$$

Somit die Factoren der gegebenen Gleichung:

I. $x^2 + 8x + 1 = 0$

$x^2 + 8x + 16 = 15$

$x + 4 = \pm\sqrt{15}$

$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{15}.$

II. $x^2 + 4x + 1 = 0$

$x^2 + 4x + 4 = 3$

$x + 2 = \pm\sqrt{3}.$

$x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}.$

3.

$$x^4 + 11x^3 + 28x^2 - 11x + 1 = 0.$$

**Auflösung.**

$$A = 11,\ B = 28,\ \beta = 1.$$

$$p = \frac{11 + \sqrt{121 - 112 - 8}}{2} = 6,$$

$$q = \frac{11 - \sqrt{121 - 112 - 8}}{2} = 5.$$

Desshalb die Factoren der gegebenen Gleichung:

I. $x^2 + 6x - 1$

$x^2 + 6x + 9 = 10$

$x + 3 = \pm\sqrt{10}$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{10}.$

II. $x^2 + 5x - 1$

$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{29}{4}$

$x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{29}{4}}$

$x_{3,4} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}} = -\frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}.$

4.

$$x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 32x + 16 = 0.$$

**Auflösung.**

$$\beta^4 = 16,\ \beta = 2;$$

desshalb:

$$x^4 - 4.2x^3 - 3.2^2x^2 - 4.2^3x + 16 = 0$$

und:

$$A = -4\ \ B = -3.$$

$$p = \frac{-4 + \sqrt{16 + 12 + 8}}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

$$q = \frac{-4 - 6}{2} = -\frac{10}{2} = -5.$$

Nun sind die Factoren:

I. $x^2 + 2x + 4$

$x^2 + 2x + 1 = -3$

$x_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}.$

II. $x^2 - 10x + 4$

$x^2 - 10x + 25 = 21$

$x_{3,4} = 5 \pm \sqrt{21}.$

5.

$$x^5 - 9x^4 + 8x^3 + 43x^2 + 21x - 4.$$

**Auflösung.**

Da ist offenbar eine Wurzel $= 4$, desshalb:

$$\frac{x^5 - 9x^4 + 8x^3 + 43x^2 + 21x - 4}{x - 4} = x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Nunmehr ist:

$$A = -5;\ B = -12;\ \beta = 1.$$

$$p = \frac{-5 + \sqrt{25 + 48 + 8}}{2} = 2$$

$$q = \frac{-5 - \sqrt{25 + 48 + 8}}{2} = -7.$$

So sind Factoren:

I. $x^2 + 2x + 1$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = -1.$$

$$x_5 = 4.$$

II. $x^2 - 7x + 1$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \frac{45}{4}$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{45}{4}}$$

$$x_{3,4} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

6.

$$x^4 - 81x^2 - 486y - 729 = 0 \quad \text{cf. §. 269, II.}$$

**Auflösung.**

Es ist:

$$p = -81;\ q = -486;\ r = -729.$$

Die erste Hilfsgleichung ist:

$$8qv^3 + 4(4r - p^2)v^2 - 4pqv - q^2 = 0.$$

Durch Substitution erhält man:

$$(8 . -486)v^3 + 4(4 . -729 + 6561)v^2 - (4 . -81 . -486)v + (486)^2 = 0$$

und:

$$4v^3 - 15v^2 + 162v - 243 = 0$$

$$v = \frac{w}{4}$$

$$w^3 - 15w^2 + 648w - 3888 = 0$$

$$w = -12 \text{ und } v = -3.$$

Der Werth von v in der Hilfsgleichung:

$$y^4 + 4vy^3 + (6v^2 + p)y^2 + (4v^2 + 2pv + q)y + (v^4 + pv^2 + qv + r) = 0$$

substituirt, gibt:

$$y^4 - 12y^3 - 27y^2 - 108y + 81 = 0.$$

Es ist:

$$\beta^4 = 81, \quad \beta = 3,$$

folglich:

$$y^4 - 4.3y^3 - 3.9y^2 - 4.27y + 81 = 0.$$

$$A = -4; \quad B = -3.$$

$$p = \frac{-4 + \sqrt{16 + 12 + 8}}{2} = 1 \text{ und } q = \frac{-4 - 6}{2} = -5.$$

Factoren sind:

I. $y^2 + 3y + 9$ und II. $y^2 - 15y + 9$

$$y^2 + 3y + \frac{9}{4} = -\frac{27}{4} \qquad y^2 - 15y + \frac{225}{4} = \frac{189}{4}$$

$$y_{1,2} = -\frac{3 \pm 3\sqrt{-3}}{2}. \qquad y_{3,4} = \frac{15 \pm 3\sqrt{21}}{2}.$$

Da nun:

$$x = y + v,$$

so ist:

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm 3\sqrt{-3}}{2} \text{ und } x_{3,4} = \frac{9 \pm 3\sqrt{21}}{2}.$$

7.

$$x^4 - 36x^2 - 144x - 144 = 0.$$

**Auflösung.**

Es ist:

$$p = -36; \quad q = -144 \text{ und } r = -144;$$

gibt:

$$(8. -144)v^3 + 4(4. -144 + 1296)v^2 - (4. -36. -144)v + (144)^2 = 0$$

$$2v^3 - 5v^2 + 36v^2 - 36 = 0$$

$$v = \frac{w}{2},$$

gibt:

$$w^3 - 5w^2 + 72w - 144 = 0.$$

$$w = -4; \quad v = -2.$$

Somit:

$$y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 32y + 16 = 0.$$

Die Werthe dieser reciproken Gleichung sind:

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-3} \text{ und } y_{3,4} = 5 \pm \sqrt{21}.$$

Nun ist:

$$x = y + v,$$

folglich:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-3} \text{ und } x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{21}.$$

## §. 271.

### Aufgaben.

| | |
|---|---|
| 1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$ | $x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm 2.$ |
| 2. $x^4 + 9x^3 - 12x^2 - 56x + 96 = 0.$ | $x_1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -4,\ x_4 = -6.$ |
| 3. $x^4 + 18x^3 - 274x + 255 = 0.$ | Wurzeln: $1,\ 3,\ -5,\ -17.$ |
| 4. $x^4 - 4x^3 - 77x^2 + 540x - 900 = 0.$ | Wurzeln: $3,\ 5,\ 6,\ -10.$ |
| 5. $x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 36x + 36 = 0.$ | Wurzeln: $-6,\ -3,\ 2,\ 1.$ |
| 6. $x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72 = 0.$ | Wurzeln: $4,\ 3,\ -3,\ -2.$ |
| 7. $x^4 - 20x^2 + 64 = 0.$ | Wurzeln: $4,\ 2,\ -2,\ -4.$ |
| 8. $3x^5 + 9x^4 - 21x^3 - 75x^2 + 24x + 180.$ | Wurzeln: $2,\ 3,\ 2,\ -2 \mp i.$ |
| 9. $x^4 + 4x^3 - 97x^2 - 280x + 900.$ | Wurzeln: $2,\ 9,\ -5,\ -10.$ |
| 10. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0.$ | Wurzeln: $4,\ -4,\ 1,\ -1.$ |
| 11. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$ | Wurzeln: $2,\ -2,\ 3,\ -3.$ |
| 12. $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0.$ | Wurzeln: $-1,\ 2,\ 3,\ -4.$ |
| 13. $x^4 + 8x^3 + 17x^3 - 2x - 24 = 0.$ | Wurzeln: $1,\ -2,\ -3,\ -4.$ |
| 14. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0.$ | Wurzeln: $1,\ -1,\ 5,\ -5.$ |
| 15. $x^4 - 6x^2 + 16x - 15 = 0.$ | Wurzeln: $1 \pm \sqrt{6},\ -1 \pm \sqrt{-2}.$ |
| 16. $x^4 - 20x^2 - 12x + 13 = 0.$ | Wurzeln: $0{,}563;\ 4{,}687;\ -1{,}223;\ -4{,}027.$ |
| 17. $x^4 - 24x^2 + 56x - 96 = 0.$ | Wurzeln: $6,\ -4;\ -1 \pm \sqrt{-3}.$ |
| 18. $x^4 + x^2 - 22x - 24 = 0.$ | Wurzeln: $3,\ -1;\ -1 \pm \sqrt{-7}.$ |
| 19. $x^4 - 5x^2 - 12x + 28 = 0.$ | Wurzeln: $2,\ 2,\ -2 \pm \sqrt{-3}.$ |
| 20. $x^4 + x^3 - 61x^2 + 111x + 108 = 0.$ | Wurzeln: $3,\ -9;\ \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}.$ |
| 21. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4x + 40 = 0.$ | Wurzeln: $1 \pm \sqrt{-3};\ -3 \pm i.$ |
| 22. $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 28x^2 - 47x + 30 = 0.$ | Wurzeln: $2 \ldots$ |
| 23. $x^4 + x^3 - 19x^2 + 61x - 70 = 0.$ | Wurzeln: $2,\ -5;\ 2 \pm \sqrt{-3}.$ |
| 24. $x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50 = 0.$ | Wurzeln: $1,\ -2,\ 5,\ -5.$ |
| 25. $x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0.$ | Wurzeln: $x_{1,2} = -1,\ x_{3,4} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$ |
| 26. $x^5 - 20x^3 + 30x^2 + 19x - 30 = 0.$ | Wurzeln: $1,\ 2,\ 3,\ -1,\ -5.$ |
| 27. $x^5 + 3x^4 - 23x^3 - 27x^2 + 166x - 120 = 0.$ | Wurzeln: $1,\ 2,\ 3,\ -4,\ -5.$ |
| 28. $x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 34x^3 - 75x^2 + 77x - 30 = 0.$ | Wurzeln: $1,\ 2 \ldots$ |
| 29. $x^4 - 45x^2 - 40x + 84 = 0.$ | Wurzeln; $1,\ -2,\ -6,\ 7.$ |

30. $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 1 = 0$. Wurzeln: $2, \frac{1}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

31. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0$. Wurzeln: $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}, \frac{-3 \pm \sqrt{-5}}{2}$.

32. $x^4 + 14x^3 + 42x^2 + 14x + 1 = 0$. Wurzeln: $-5 \pm 2\sqrt{6}; -2 \pm \sqrt{3}$.

33. $x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 128x + 256 = 0$. Wurzeln: $x_{1,2,3,4} = -2 \pm 2\sqrt{5}$.

34. $x^4 + 12x^3 + 35x^2 - 12x + 1 = 0$. Wurzeln: $\frac{-7 \pm \sqrt{53}}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$.

35. $x^4 - 20x^3 - 750x - 500x + 625 = 0$. Wurzeln: $-20 \pm 5\sqrt{5}, 10 \pm 5\sqrt{3}$

36. $x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 42x^2 - 4x - 40 = 0$. Wurzeln: $\pm 1, 1 \pm i\sqrt{3}, -3 \pm i$.

37. $x^5 - 5x^4 - 15x^3 + 85x^2 - 26x - 120 = 0$. Wurzeln: $-1, 2, 3, -4, 5$.

38. $x^5 - 1 = 0$. Wurzeln: $x = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 \mp 2\sqrt{5}})$.

Anmerkung. Zur weitern Uebung siehe Heis: §. 97 – 100.

---

# II. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

## §. 272.

**Erklärung 1.** Eine höhere Gleichung mit mehreren Unbekannten ist von der $m^{ten}$ Dimension (Grade), wenn in jedem einzelnen Gliede die Exponenten der Unbekannten $x, y, z \ldots$ die Grösse $m$ nicht übersteigen und wenn wenigstens in einem Gliede der Exponent der einen Unbekannten gleich $m$ ist. Z. B.

Es sei $m = 5$, so ist:

1. $Ax^3 + By^2x^2 + Cy^3x + Dz + E = 0$ von der $(m-1)^{ten}$ Dimension.
2. $x^3 + Azx^2 + Bz^2x + Cz + D = 0$ von der $(m-2)^{ten}$ Dimension.
3. $y^5 + Axy^4 + Bx^2y^3 + Cxy + Dx^2 + E = 0$ von der $m^{ten}$ Dimension.

**Erklärung 2.** Eine höhere algebraische Gleichung zwischen den Unbekannten $x, y, z \ldots$ kann nach $x$ oder nach $y$ oder auch nach $z$ geordnet sein. Z. B.:

$$y^4x^3 + Ay^3x + By^2z^3 + Cz^2 = 0,$$
$$x^3y^4 + Axy^3 + Bz^3y^2 + Cz^2 = 0,$$
$$By^2z^3 + Cz^2 + y^4x^3 + Ay^3x = 0.$$

Sie ist aber immer nach den Potenzen derjenigen Unbekannten zu ordnen, die eliminirt werden soll.

**Erklärung 3.** Wird aus zwei Gleichungen zwischen x und y vom $m^{ten}$ und $(m-1)^{ten}$ Grade x eliminirt, so kann die nach y geordnete Eliminationsgleichung höchstens vom $m(m-1)^{ten}$ Grade sein. Wird aus drei Gleichungen zwischen x, y, z vom $m^{ten}$, $(m-1)^{ten}$, $(m-2)^{ten}$ Grade x und y eliminirt, so kann die nach z geordnete Eliminationsgleichung höchstens vom $m(m-1)(m-2)^{ten}$ Grade sein.

Wie bei den Auflösungen niederer bestimmter Gleichungen mit mehreren Unbekannten, so hat man auch bei den Auflösungen höherer bestimmter Gleichungen mit mehreren Unbekannten dafür zu sorgen, dass aus n gegebenen Gleichungen mit n Unbekannten nach und nach durch Elimination

$$(n-1),\ (n-2)\ldots,\ 2,\ 1$$

Gleichungen mit

$$(n-1),\ (n-2)\ldots 2,\ 1$$

Unbekannten gebildet werden. Nur wird dies hier nicht selten auf einem andern Wege erreicht als dort, weil hier die zu eliminirende Unbekannte in verschiedenen Potenzen auftreten kann.

## I. Auflösung durch Substitution.

### §. 273.

**Erklärung.** Tritt in einer der gegebenen Gleichungen zwischen den Unbekannten

$$x,\ y,\ z\ldots$$

die zu eliminirende Unbekannte nur in der ersten Potenz auf, so wird ihr Werth aus dieser Gleichung bestimmt und hierauf in der andern der gegebenen Gleichungen substituirt. Z. B.

Es sei:

$$\text{I. } y^3 + x^3 - A = 0.$$
$$\text{II. } y^2 - Bx = 0.$$

**Auflösung.**

$$x = \frac{y^2}{B} \text{ aus II,}$$

mithin:

$$y^6 + B^3 y^3 - AB^3 = 0 \text{ p. Subst. in I;}$$

ist $y^3 = z$, so ist:

$$z^2 + B^3 z - A B^3 = 0$$

$$z = \frac{-2B^3 \pm \sqrt{4AB^3 + B^6}}{4}.$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{-2B^3 \pm \sqrt{4AB^3 + B^6}}{4}}.$$

Sei nun:

$$y = p,$$

so ist:

$$x = \frac{p^2}{B}.$$

## §. 274.

### Beispiele.

1.

$$\text{I. } x^3 + y^3 = 72.$$

$$\text{II. } y^2 = 8x.$$

### Auflösung.

Es ist:

$$x = \frac{y^2}{8} \text{ aus II;}$$

somit:

$$y^3 + \frac{y^6}{512} - 72 = 0$$

$$y^6 + 512 y^3 - 36864 = 0$$

$$y^3 = z$$

$$z^2 + 512 z = 36864$$

$$z + 256 = \pm 320.$$

$$z_1 = 64 \text{ und } z_2 = -576$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = 4\sqrt[3]{-9}.$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 6 . i\sqrt{3}.$$

2.

$$\text{I. } x y^3 - 2 z^3 - 126 = 0.$$

$$\text{II. } y + z - 5 = 0.$$

$$\text{III. } x + 2y - 10 = 0.$$

### Auflösung.

$$x = 10 - 2y \text{ aus III.}$$

$$z = 5 - y \text{ aus II.}$$

Mithin:

$$y^3(10-2y)-2(5-y)^3-126=0$$

$$y^3(5-y)-\quad(5-y)^3-\ 63=0$$

$$y^4-6y^3+15y^2-75y\ +188=0.$$

$$y=4,\quad x=2,\quad z=1.$$

## II. Auflösung nach Euler.

### §. 275.

**Erklärung.** Nach dieser Methode sucht man durch Multiplication der gegebenen Gleichungen mit geeigneten Factoren und durch passende Verbindung der auf diese Weise gewonnenen Gleichungen, die ursprünglichen Gleichungen bezüglich der zu eliminirenden Unbekannten auf immer niederern Grad zu bringen. Z. B.:

$$\text{I. } Ax^2+Bx+C=0.$$

$$\text{II. } Dx^3+Ex^2+Fx+G=0.$$

Die Grössen:

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E.\ F,\ G$$

enthalten auch Potenzen von y.

**Auflösung.**

$$\text{III. } ADx^3+BDx^2+CDx=0\quad(\text{I}\times Dx).$$

$$\text{IV. } ADx^3+AEx^2+AFx+AG=0\quad(\text{II}\times A).$$

$$(BD-AE)x^2+(CD-AF)x-AG=0\quad(\text{III}-\text{IV}).$$

Sei nun:

$$BD-AE=P$$

und

$$CD-AF=Q,$$

endlich:

$$-AG=R,$$

so ist:

$$\text{V. } Px^2+Qx+R=0.$$

$$\text{VI. } APx^2+BPx+CP=0\quad(\text{I}\times P).$$

$$\text{VII. } APx^2+AQx+AR=0\quad(\text{V}\times A).$$

$$\text{VIII. } (BP-AQ)x+(CP-AR)=0\quad(\text{VI}-\text{VII}).$$

$$\text{IX. } ARx^2+BRx+CR=0\quad(\text{I}\times R).$$

X. $CPx^2 + CQx + CR = 0$ (V × C).

XI. $(AR - CP)x^2 + (BR - CQ)x = 0$ (IX − X).

XII. $(AR - CP)x + (BR - CQ) = 0$.

$$x = \frac{CQ - BR}{AR - CP},$$

$$x = \frac{AR - CP}{BP - AQ} \text{ (aus VIII)};$$

folglich:

$$\frac{CQ - BR}{AR - CP} = \frac{AR - CP}{BP - AQ}.$$

$(CQ - BR)(BP - AQ) = (AR - CP)(AR - CP)$ Eliminat.-Gl.

i. e. $(AR - CP)^2 - (CQ - BR)(BP - AQ) = 0$.

## §. 276.

### Beispiele.

1.

I. $yx^2 - y^2x - 16 = 0$.

II. $yx^3 - 2y^2x^2 + y^3x - 32 = 0$.

**Auflösung.**

III. $yx^3 - y^2x^2 - 16x = 0$ (I × x).

IV. $y^2x^2 - y^3x - 16x + 32 = 0$ (III − II).

V. $y^2x^2 - y^3x - 16y = 0$ (I × y).

$16x - 16y - 32 = 0$ (V − IV).

$x - y - 2 = 0$

$x = y + 2$

$y(y+2)^2 - y^2(y+2) - 16 = 0$ (per Subst. in I)

$y^2 + 2y = 8$

$y^2 + 2y + 1 = 9$

$y + 1 = \pm 3$.

$y_1 = 2, \quad y_2 = -4$.

$x_1 = 4, \quad x_2 = -2$.

2.

I. $x^3 + yx^2 + y^2x - 38 = 0$.

II. $x^2 + 2yx - 2y^2 + 2 = 0$.

**Auflösung.**

$$\begin{array}{lll} \text{III.} & x^3 + 2yx^2 - 2y^2x + 2x = 0 & (\text{II} \times x). \\ \text{IV.} & yx^2 - 3y^2x + 2x + 38 = 0 & (\text{III} - \text{I}). \\ \text{V.} & yx^2 + 2y^2x - 2y^3 + 2y = 0 & (\text{II} \times y). \\ \hline & 5y^2x - 2x - 2y^3 + 2y - 38 = 0. & \end{array}$$

$$x(5y^2 - 2) = 2y^3 - 2y + 38$$

$$x = \frac{2y^3 - 2y + 38}{5y^2 - 2}.$$

$$\frac{(2y^3 - 2y + 38)^2}{(5y^2 - 2)^2} + 2y\left(\frac{2y^3 - 2y + 38}{5y^2 - 2}\right) - 2y^2 + 2 = 0 \quad (\text{p. Subst. in II}).$$

$$13y^6 - 27y^4 - 266y^3 + 18y^3 + 152y - 726 = 0$$

$$y = 3$$

$$x = \frac{2y^3 - 2y + 38}{5y^2 - 2} = \frac{54 + 38 - 6}{45 - 2} = 2,$$

oder durch Substitution in:

$$\begin{array}{ll} \text{II. } x^2 + 6x - 16 = 0 & \text{und in I. } 2y^2 + 4y - 30 = 0 \\ x^2 + 6x + 9 = 25 & y^2 + 2y + 1 = 16 \\ x + 3 = \pm 5 & y + 1 = \pm 4 \\ x_1 = 2;\ x_2 = -8 & y_1 = 3,\ y_2 = -5. \end{array}$$

## III. Auflösung mittelst gemeinschaftlichen Theilers.

### §. 277.

**Erklärung 1.** Es seien zwischen den Unbekannten x und y die beiden Gleichungen gegeben:

$$\text{I. } x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots C = 0.$$

$$\text{II. } x^{n-1} + Dx^{n-2} + \ldots E = 0.$$

Die Grössen:

A, B, C, D, E

enthalten auch Potenzen von y. Da demnach diese beiden Polynome rationale ganze Functionen der beiden Variabeln x und y sind, so können wir sie auch der Kürze wegen mit Dienger * also schreiben:

---

* cf. §. 228 Anmerkung. Ein Beispiel ist Dienger entnommen.

$$\text{I. } G(x, y) = 0.$$

$$\text{II. } g(x, y) = 0.$$

**Erklärung 2.** Haben diese beiden ganzen Functionen gemeinschaftliche Wurzeln, so haben sie auch einen gemeinschaftlichen Factor oder Theiler (cf. §. 225, 227). Aus diesem, gleich Null gesetzten, gemeinschaftlichen Theiler ergeben sich die in den beiden Gleichungen enthaltenen gemeinschaftlichen Wurzeln.

Bezeichnen wir den gemeinschaftlichen Theiler mit

$$f(x, y),$$

weil er selbst wieder eine ganze Function von x und y ist, so ist jede der beiden ganzen Functionen:

$$G(x, y) \text{ und } g(x, y)$$

durch

$$f(x, y)$$

theilbar. Lassen sich die beiden Functionen

$$G(x, y) \text{ und } g(x, y)$$

durch keinen andern Factor höhern Grades theilen, so ist

$$f(x, y)$$

ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler.

## §. 278.

**Erklärung 1.** Den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier ganzen Functionen findet man nach denselben Gesetzen, wie den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier ganzen Zahlen.

Die Functionen sind nach x zu ordnen, hierauf verfährt man, wie folgt:

$$\text{I. } G(x, y) : g(x, y) = Q_1 \text{ (Quot.)} + R_1 \text{ (Rest)}$$

somit:

$$R_1 = \varphi(x, y),$$

$$\text{II. } g(x, y) : \varphi(x, y) = Q_2 + R_2$$

desshalb:

$$R_2 = \gamma(x, y),$$

$$\text{III. } \varphi(x, y) : {}_1(x, y) = Q_3 + R_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

endlich:

$$\text{n. } F(x, y) : f(x, y) = Q_n + R_n.$$

**Erklärung 2.** Der $n^{te}$ Divisor

$$f(x, y)$$

ist der grösste gemeinschaftliche Theiler und der $n^{te}$ Rest $R_n$ muss sich gleich Null setzen lassen oder selbst Null sein, wenn eine gemeinschaftliche Auflösung der gegebenen Gleichungen möglich ist. Liefert der gleich Null gesetzte Rest $R_n$ die Werthe für y, etwa $\pm\beta$ und werden diese Werthe in dem $n^{ten}$ Divisor eingesetzt, so erlangt man die entsprechenden Werthe für x, etwa $\pm\alpha$.

Ist der $n^{te}$ Divisor bezüglich x vom ersten Grade, so entspricht je einem Werthe von y ein Werth von x; ist er vom zweiten Grade entspricht je zwei Werthen von x ein Werth von y.

**Erklärung 3.** In den Resten:

$$\varphi(x, y),\ \gamma(x, y),\ F(x, y)$$

und

$$f(x, y)$$

können unbeschadet ihrer Eigenschaft als Theiler beliebige Factoren in y eingeführt oder ausgeworfen werden, sobald es die Rechnung erheischt.

Wird aber ein solcher Factor, der selbst gleich Null wird, eingeführt oder ausgeworfen, so führen seine Werthe die Lösung der Gleichung herbei. Darüber verschafft man sich Gewissheit durch Substitution der Werthe von y in den gegebenen Gleichungen.

## §. 279.

### Beispiele.

1.

$$\text{I. } x^4 + 4yx^3 + (5y^2 + 1)x^2 + (2y^3 + 7y^2 + 2y - 63)x + y^2 = 0.$$

$$\text{II. } x^3 + 4yx^2 + 5y^2x + 2y^3 + 7y^2 - 63 = 0.$$

**Auflösung.**

$$x^4+4yx^3+(5y^2+1)x^2+(2y^3+7y^2+2y-63)x+y^2 : x^3+4yx^2+5y^2x+2y^3+7y^2-63 = x = Q_1.$$

$$\underline{x^4+4yx^3+5y^2x^2 \quad +(2y^3+7y^2 \quad -63)x}$$

$$x^2 + 2yx + y^2 = R_1 \text{ und } = (\text{Divis.})_2$$

$$x^3+4yx^2+5y^2x+2y^3+7y^2-63 : x^2+2yx+y^2 = x+2y = Q_2$$

$$\underline{x^3+4yx^2+\quad y^2x}$$

$$y^3+2yx^2+4y^2x+2y^3+7y^2-63$$

$$\underline{2yx^2+4y^2x+2y^3}$$

$$2yx^2 \qquad 7y^2-63 = R_2.$$

Da

$$R_2 = 7y^2 - 63$$

und

$$D_2 = x^2 + 2yx + y^2,$$

so ist:

$$7y^2 = 63$$
$$y^2 = 9$$
$$y = \pm 3;$$

wenn $y = 3$, so ist:

$$x^2 + 6x = -9$$
$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3;$$

wenn $y = -3$, so ist:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

$$x_1 = -3,\ y_1 = -3;\ x_2 = 3,\ y_2 = 3.$$

2.

I. $x^3 + 2yx^2 + (2y^2 - 4y)x + y^2 - 4 = 0.$

II. $x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0.$

## Auflösung.

$$x^3 + 2yx^2 + (2y^2 - 4y)x + y^2 - 4 : x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = x = Q_1.$$
$$\underline{x^3 + 2yx^2 + (2y^2 - 5y + 2)x}$$

Factor! $(y - 2)x + y^2 - 4 = R_1$

i. e. $x + y + 2$

$$x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 : x + y + 2 = D_2 = x + y - 2$$
$$\underline{x^2 + (y + 2)x}$$
$$(y - 2)x + 2y^2 - 5y + 2$$
$$\underline{(y - 2)x + y^2 - 4}$$
$$y^2 - 5y + 6 = R_2.$$

Da

$$R_2 = y^2 - 5y + 6$$

und

$$D_2 = x + y + 2,$$

so ist:

$$\text{I. } y^2 - 5y = -6 \qquad \text{II. } x + y = -2$$

$$y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{1}{4} \qquad \text{d. h.}$$

$$x + 3 = -2 \text{ und } x + 2 = -2$$

$$y - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2} \qquad x_1 = -5 \text{ „ } x_2 = -4,$$

$$y_1 = 3;\ y_2 = 2;$$

und da y — 2 als Factor ausgeworfen wurde und y = 2, so erhält man p. S in den gegebenen Gleichungen:

$$\text{I. } x^3 + 4x^2 = 0 \qquad x^2 + 4x = 0$$

$$x_3 = 0 \text{ und } x_4 = -4 \qquad x = 0 \text{ und } = -4.$$

$$x = 0,\ y = 2;\ x = -4,\ y = 2;\ x = -4,\ y = 2;\ x = -5,\ y = 3.$$

## IV. Auflösung durch Näherungswerthe. *

### §. 280.

**Allgemeine Auflösung.**

Gegeben sei:

$$\text{I. } G(x, y) = 0 = \Sigma.$$

$$\text{II. } g(x, y) = 0 = \sigma.$$

Wäre:

1.

$$x = x + \varkappa = a$$

$$y = y + \lambda = b,$$

so ist:

$$\Sigma_1 = \Sigma + \varkappa \frac{d\Sigma}{dx} + \lambda \frac{d\Sigma}{dy},$$

$$\sigma_1 = \sigma_1 + \varkappa \frac{d\sigma}{dx} + \lambda \frac{d\sigma}{dy}.$$

Da a und b Näherungswerthe, so ist:

$$\Sigma_1 - \Sigma = F \text{ und } \sigma_1 - \sigma = f,$$

(F und f bezeichnet die Correction der Näherungswerthe).

---

* Grunert, Elem. der Differential- und Integralrechnung, Leipzig, Schwickert 1837. Schlömilch, Compend. der höhern Analysis I. Theil, Braunschweig, Vieweg, 2. Auflage 1862. Dienger, Differential- und Integralrechnung, Stuttgart, Metzler, 3. Auflage 1868.

Wäre:

2.

$$x = x + \varkappa_1 = a_1,$$

$$y = y + \lambda_1 = b_1,$$

so ist:

$$\Sigma_2 = \Sigma + \varkappa_1 \frac{d\Sigma}{dx} + \lambda_1 \frac{d\Sigma}{dy},$$

$$\sigma_2 = \sigma + \varkappa_1 \frac{d\sigma}{dx} + \lambda_1 \frac{d\sigma}{dy}.$$

Da $a_1$ und $b_1$ Näherungswerthe, so ist:

$$\Sigma_2 - \Sigma = F_1 \text{ und } \sigma_2 - \sigma = f_1.$$

Wäre:

3.

$$x = x + \varkappa_2 = a_2,$$

$$y = y + \lambda_2 = b_2,$$

so ist:

$$\Sigma_3 = \Sigma + \varkappa_2 \frac{d\Sigma}{dx} + \lambda_2 \frac{d\Sigma}{dy},$$

$$\sigma_3 = \sigma + \varkappa_2 \frac{d\sigma}{dx} + \lambda_2 \frac{d\sigma}{dy}.$$

Da $a_2$ und $b_2$ Näherungswerthe, so ist:

$$\Sigma_3 - \Sigma = F_2 \text{ und } \sigma_3 - \sigma = f_2.$$

Nun ist:

$$F = (a - x)\frac{d\Sigma}{dx} + (b - y)\frac{d\Sigma}{dy} \text{ und } f = (a - x)\frac{d\sigma}{dx} + (b - y)\frac{d\sigma}{dy}.$$

$$F_1 = (a_1 - x)\frac{d\Sigma}{dx} + (b_1 - y)\frac{d\Sigma}{dy} \text{ und } f_1 = (a_1 - x)\frac{d\sigma}{dx} + (b_1 - y)\frac{d\sigma}{dy}.$$

$$F_2 = (a_2 - x)\frac{d\Sigma}{dx} + (b_2 - y)\frac{d\Sigma}{dy} \text{ und } f_2 = (a_2 - x)\frac{d\sigma}{dx} + (b_2 - y)\frac{d\sigma}{dy}.$$

Somit:

$$x = a + \frac{H}{K}(a_1 - a) + \frac{J}{K}(a_2 - a),$$

$$y = b + \frac{H}{K}(b_1 - b) + \frac{J}{K}(b_2 - b),$$

nach Elimination der Ausdrücke

$$\frac{d\Sigma}{dx}, \frac{d\Sigma}{dy}, \frac{d\sigma}{dx} \text{ und } \frac{d\sigma}{dy}$$

und nach Substitution der Werthe

$$F_2 f - F f_2 = H$$

und

$$F f_1 - F_1 f = J,$$

$$H + J + F_1 f_2 - F_2 f_1 = K.$$

Anmerkung. Diese Methode gehört nicht zum Gebiete der Algebra, sondern der höhern Analysis. Sie kann desshalb erst dort ausführlich und zweckdienlich behandelt werden. Da man sich ihrer aber mit viel Vortheil bedienen kann, dürfte ihrer schon hier anhangsweise Erwähnung geschehen.

## §. 281.

### Beispiel. *

$$x^7 - 5x^2y^4 + 1506 = 0,$$

$$y^5 - 3x^4y - 103 = 0.$$

### Auflösung.

1.

$x = a = 2$, so ist $F = -0{,}0035$,

$y = b = 3$, „ „ $f = +0{,}0084$.

Mithin:

$x = a_1 = 1{,}9965$, folglich $F_1 = -0{,}000113$,

$y = b_1 = 3{,}0084$ und $f_1 = -0{,}000161$,

$x = 1{,}996387$ und $y = 3{,}008239$.

## §. 282.

### Aufgaben.

1.

| | |
|---|---|
| I. $\frac{x-1}{y-1} = 35$ | $x = 36, \ldots$ |
| II. $\frac{z^3-1}{y^3-1} = 46655$ | $y = 1, \ldots$ |

2.

| | |
|---|---|
| I. $x^3 + y^3 - 35 = 0$ | $x = 3, \ldots$ |
| II. $x^2y + xy^2 - 30 = 0$ | $y = 2, \ldots$ |

* Aus Heis.

3.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x + y - 16 = 0 & x = 12, \ldots \\ \text{II. } x^3 y - 2x^2 y^2 + x y^3 - 3072 = 0 & y = 4, \ldots \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x^3 + x^2 y - x y^2 - y^3 - 72 = 0 & x = 4, \ldots \\ \text{II. } x^3 - x^2 y - x y^2 + y^3 - 24 = 0 & y = 2, \ldots \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x^2 y - p^3 + 3p^2 x - 3p x^2 + x^3 = 0 & x = (p\sqrt{p}) : (\sqrt{p} + \sqrt{q}). \\ \text{II. } x y^2 - q^3 + 3q^2 y - 3q y^2 + y^3 = 0 & y = (q\sqrt{q}) : (\sqrt{p} + \sqrt{q}). \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x^2 + 4xy + 6x - 5y^2 + 5 = 0 & x = 1;\ 2;\ 3;\ 4. \\ \text{II. } x^2 - 7xy + 9x - 8y^2 + 8 = 0 & y = 2;\ 3;\ 4;\ 5. \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } y^3 + y^3 z^3 + z^3 - 17 = 0 & y = 2;\ 1;\ 1 + i\sqrt{2}. \\ \text{II. } y + yz + z - 5 = 0 & z = 1;\ 2;\ 1 - i\sqrt{2}. \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } y^2 x^3 - y^2 x^2 - 2y^2 x - y x^3 + y x^2 + 2yx - 2x^3 + 2x^2 + 4x = 0 & x = 2;\ -1;\ \ldots \\ \text{II. } y^2 x^2 - y x^2 - 2x^2 - 2y^2 + 2y - y^2 x + yx + 2x + 4 = 0 & y = 2,\ 1;\ \ \ldots \end{array}$$

9.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x^3 + 5yx^2 + (5y^2 - y + 1)x + y^3 - y^2 + 4y = 0 & x = 0;\ -4. \\ \text{II. } x^2 + 4yx + y^2 - y = 0 & y = 0;\ 1. \end{array}$$

10.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } 8y^2 - 6y - 26xy + 21x^2 + 11x = 2 & x = 2;\ 3;\ 6;\ 7. \\ \text{II. } y^2 - 3xy + 2x^2 + 2x = 4 & y = 4;\ 5;\ 10;\ 12. \end{array}$$

11.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x^3 + 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x + y^3 - y^2 + 2y = 0 & x = -2;\ 0. \\ \text{II. } x^2 + 2yx + y^2 - y = 0 & y = 0;\ 1. \end{array}$$

12.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x^4 + 2yx^3 + (2y^2+1)x^2 + (y^3+9y^2+y-81)x + y^2 = 0 & x_{1,2} = \pm\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-27}; \; y_{1,2} = 3. \\ \text{II. } x^3 + 2yx^2 + 2y^2x + y^3 + 9y^2 - 81 = 0 & x_{3,4} = \pm\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-27}; \; y_{3,4} = -3. \end{array}$$

13.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x + 5y - 25 = 0 & x = 5; \; \ldots \\ \text{II. } xy^2 - 3z^3 - 56 = 0 & y = 4; \; \ldots \\ \text{III. } y^3 + z - 66 = 0 & z = 2; \; \ldots \end{array}$$

## §. 283.

### Anwendung.

1. Welche Zahl gibt zum Product aus ihrem dritten, vierten und fünften Theil 12150?

   Antw. 90.

2. Wenn man den fünften Theil einer Zahl mit ihrem Quadrate multiplicirt, erhält man 8575.

   L. 35.

3. Von welcher Zahl ist das dreifache Product ihres Biquadrates 62208?

   Antw. 12.

4. Der cubische Inhalt eines Zimmers ist 7560 c′; es ist 6′ breiter als hoch und 7′ länger als breit.

   Hoch 14′; breit 20′; lang 27′.

5. Ein Eisbehälter fasst 400 c′ Eis; er ist 3′ breiter als hoch und 2′ länger als breit.

   Hoch 5′; breit 8′; 10′ lang.

6. Die Summa zweier Zahlen ist 54; die grössere durch die kleinere dividirt, diesen Quotienten mit der grössern multiplicirt, gibt ein Product, das um 45 grösser ist als eine Kubikzahl, deren Wurzel um 1 grösser ist als der neunte Theil der grössern Zahl.

   Antw 36 und 18.

7. Jemand lässt auf einem Gute vom Kaufschilling 10,000 Thlr. auf Zinseszins stehen; nach Verlauf von 4 Jahren erhält er vom Käufer $12155\,{}^1/_{16}$ Thlr. Wie hoch berechnen sich die Procente?

Antw. 5.

8. Die Summa dreier Zahlen beträgt 21, die Summa ihrer Cuben 1971.

Antw. $x = 12$; $y = 6$; $z = 3$.

9. Vier Studirende wollen auf ihrer gemeinschaftlichen Reise ihre gemeinschaftliche Kasse vom Sparsamsten verwalten lassen; sie werfen hiezu ihr Reisegeld zusammen. Da zeigt es sich nun, dass der zweite 2 Thlr. mehr hatte als der erste und der dritte 4 Thlr. mehr als der zweite, und endlich der vierte hatte 1 Thlr. mehr als der Dritte. Das Product aus diesen 4 Summen ist um 878000 grösser als das Biquadrat der Summa der zweiten.

I. 48 Thlr.; II. 50 Thlr.; III. 54 Thlr.; IV. 55 Thlr.

10. Bei einem Brückenbau sind noch einmal soviel Maurer als Taglöhner beschäftigt; jeder Maurer erhält soviel Groschen Taglohn als Maurer und jeder Taglöhner soviel Groschen als Taglöhner sind. Alle zusammen arbeiten schon noch einmal soviel Tage als ihre Gesammtzahl beträgt und empfangen hiefür 2197 Thlr. als Lohn.

Antw. 26 Maurer; 13 Taglöhner; 78 Tag.

11. Ein Wasserbehälter kann in einer Stunde und 30 Minuten von 4 Röhren gefüllt werden, wenn sie alle zugleich fliessen. Die zweite Röhre brauchte hiezu 2 Stunden, die dritte 4 Stunden, und die vierte 6 Stunden mehr als die erste, wenn jede allein flösse. In welcher Zeit wird der Behälter von der ersten Röhre allein gefüllt?

Antw. 3,8 ... Stunden.

12. Mehrere Personen legen zu einem gemeinsamen Geschäfte 21900 Thlr.; dies reicht nicht und es legt desshalb Jeder noch so viel Hundert Thlr. zu als Theilhaber waren. Mit diesem ganzen Gelde gewinnen sie so viel Procente als Personen waren, und nachdem ein Jeder vom gemeinsamen Gewinn 26 mal so

viel Thaler als Theilhaber waren, empfangen hatte, bleiben ihnen immer noch 594 Thlr. reiner Gewinn zum Vertheilen.

Antw. $x = 6$; 9; 11.

13. Von welchen 2 Zahlen ist die 28fache Summa, ihr 7faches Product und die Summa ihrer Cuben einander gleich?

Antw. $x = 2;\ -4;\ 7 \pm \sqrt{-7}\ .\ y = -4;\ 2;\ 7 \mp \sqrt{-7}$.

14. Bei einem Baue sind 4mal so viel Arbeiter beschäftigt als jeder täglich Groschen zum Lohn erhält; sie arbeiten zusammen 476 Tage weniger als ein Taglohn aller in Groschen ausmacht und bekommen hiefür 1920 Thl. Arbeitslohn.

Antw. $x = 12$; Arbeitstage 100.

15. Wie heissen die 2 Zahlen, deren Differenz 5 und deren Product mit ihrer Summa multiplicirt, eine Zahl gibt, die um eins vermindert gleich einer Kubikzahl wird, deren Wurzel die Differenz der gesuchten Zahlen ist?

Antw. 2 und 7.

16. „Der Kaiser Timur gab nach der Einnahme und Zerstörung Bagdads den Befehl, auf den Trümmern dieser Stadt eine vierseitige Pyramide von 90000 Köpfen zu errichten. Bei der Aufschichtung blieben 560 Köpfe übrig, wie viel Schichten enthielt die Pyramide?“

Antw. 64.

17. In einer geometrischen Proportion ist das Product der innern oder äussern Glieder 48, die Summa der 4 Glieder 30 und die Summa ihrer Kuben 2520.

Antw. $x : y = z : t$; $4 : 6 = 8 : 12$.

18. In einer geometrischen Reihe ist die Summa aller Glieder 31, die Summa ihrer Quadrate 341 und die Summa ihrer Kuben 4681. Wie gross ist das erste Glied, der Exponent und die Anzahl der Glieder?

Antw. Erstes Glied $= 1$ oder 16, Exponent $= 2$ oder $\frac{1}{2}$, Anzahl der Glieder $= 5$.

19. Es sind 3 Zahlen; die Summa aus dem Quadrate der ersten und aus dem Quadrate der Differenz zwischen der zweiten und dritten gibt 20, die Summa aus dem Quadrate der zweiten und aus dem Quadrate der Differenz der ersten und dritten gibt 52,

die Summa aus dem Quadrate der dritten und aus dem Quadrate der Differenz zwischen der ersten und zweiten gibt 68.

Antw. $x = 2$, $y = 4 \ldots$, $z = 8 \ldots$

20. Es sind 3 Zahlen; das Product aus dem Quadrate der ersten und aus der zweiten ist 1210, das Product aus dem Quadrate der zweiten und aus der dritten ist 700 und das Product aus dem Quadrate der dritten und aus der ersten ist 539.

Antw. I. 11; II. 10; III. 7.

21. „Es sind 4 Zahlen; das Product aus dem Quadrate der ersten und der zweiten ist A, das Product aus dem Quadrate der zweiten und dritten ist B, das Product aus dem Quadrate der dritten und vierten ist C und das Product aus dem Quadrate der vierten und ersten ist D.

Lösung: $\sqrt[15]{\frac{A^8 C^2}{B^4 D}}$, $\sqrt[15]{\frac{B^8 D^2}{C^4 A}}$, $\sqrt[15]{\frac{C^8 A^2}{D^4 B}}$, $\sqrt[15]{\frac{D^8 B^2}{A^4 C}}$.“

Anmerkung. Heis §. 104 und 105.

Druck der J. B. Metzler'schen Buchdruckerei in Stuttgart.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

K. POSCHEGAR
Buchbinderei - Stempel
8031 PUCHHEIM
Augsburger Straße 33 1/2

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Weber, Gotthelf

Algebra zur Selbstbelehrung mit Beispielen und Aufgaben

Stuttgart 1869

Math.p. 742 b
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11011249-8